GRAVITAZIONE

Si tratta di un caso particolare molto importante, associato ad una forza fondamentale, di un sistema di punti materiali sottoposti a mutua interazione.

Il problema può essere semplificato e risolto in modo analitico nel caso di due corpi isolati, ad esempio sole-pianeta o pianeta-satellite (problema dei due corpi). Sistemi più complessi sono risolvibili in modo approssimato o con tecniche numeriche, conoscendo la legge della forza e la distribuzione delle masse.

Nell'esposizione analizzeremo il problema da due punti di vista:

1) Derivazione della legge di forza a partire dai dati osservativi sul moto dei pianeti e dalle leggi della dinamica
2) Derivazione della legge del moto (nello specifico delle traiettorie per corpi orbitanti) a partire dalla legge di forza e dalle leggi della dinamica.

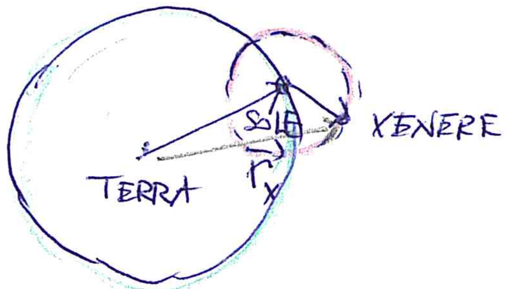
Utilizzeremo dunque, nel caso in studio, la legge della dinamica nei due modi che abbiamo prefigurato: 1) per esplicitare la legge della forza a partire dai moti (dalle accelerazioni) 2) per dedurre ~~i moti~~ (altri) moti dalla legge di forza generale

PARTE I : LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Ricostruiamo brevemente il processo storico e i dati osservativi che hanno portato alla formulazione della LEGGE DELLA FORZA di gravitazione:

Antichità (sistema Tolemaico): Ipotesi geocentrica e descrizione delle traiettorie nel riferimento terrestre. ~~Ka~~ Complessità dei moti risolta tramite epicicli : le traiettorie seguono orbite circolari o combinazioni di orbite circolari

Esempio: Sole - Terra - Venere



$\vec{r}_v = \vec{r}_s + \vec{r}_{sv}$ Nel riferimento terrestre

[Per pianeti con satelliti, serve un ulteriore epiciclo]

Il moto circolare del sole attorno alla terra può essere descritto i coordinate polari:

$$x_s(t) = r_s \cos(\omega_s t) = \mathrm{Re}\left[r_s e^{i\omega_s t}\right]$$
$$y_s(t) = r_s \sin(\omega_s t) = \mathrm{Im}\left[r_s e^{i\omega_s t}\right]$$

Similmente il moto della venere attorno al sole. Per venere attorno alla terra si ha:

$$x_v(t) = \mathrm{Re}\left[r_s e^{i\omega_s t} + r_{sv} e^{i\omega_{sv} t}\right]$$
$$y_v(t) = \mathrm{Re}\left[r_s e^{i\omega_s t} + r_{sv} e^{i\omega_{sv} t}\right]$$

In termini generali il moto di un pianeta tramite epicicli può essere rappresentato come la somma di funzioni sinusoidali di ampiezza e periodo differenti. ~~Questa espressione~~

$$R(t) = r_1 e^{i\omega_1 t} + r_2 e^{i\omega_2 t} + \dots$$

dove la parte reale e immaginaria di $R(t)$ rappresentano le coordinate x e y.
Questa espressione matematica corrisponde alla rappresentazione di Fourier di una funzione periodica: ogni funzione periodica è rappresentabile come somma finita di funzioni sinusoidali elementari.
In questa luce, la rappresentazione dei moti di Tolomeo ~~è matematicamente co~~ (che non conosceva la ~~trasformata~~ rappresentazione di Fourier) è matematicamente corretta, ma di fatto richiede l'introduzione di un numero arbitrario di parametri per la descrizione dei moti e non consente di individuare ~~una~~ la regolarità del problema.

1500 COPERNICO: Ipotesi eliocentrica

1600 BRAHE: Astronomia osservazionale di precisione e ricostruzione delle traiettorie dei pianeti secondo l'ipotesi eliocentrica

1602 - 1618: KEPLERO individua regolarità nelle osservazioni di Brahe che gli consentono di formulare tre leggi generali per il moto dei pianeti in un sistema eliocentrico

1° legge: I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il sole è uno dei fuochi
[$\Rightarrow$ il moto è piano]

2° legge: I pianeti spazzano aree uguali in tempi uguali (velocità areale costante)

$\frac{dA}{dt} = cost$ è valida per tutti i pianeti, ma il valore della velocità cambia da pianeta a pianeta

Vedremo che questa legge implica/discende dalla conservazione del momento angolare nel moto

3^a legge (1618): Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo della distanza media pianeta-sole. Nella formulazione precisa la distanza è espressa in termini di "semi-asse" maggiore dell'ellisse:

$$(3) \quad T^2 = K_S a^3$$ con K_S identica per tutti i pianeti

Nel 1610, scoperta dei pianeti ~~Medicei~~ Medicei (Galileo), Keplero osserva le stesse regolarità nei moti ~~ri~~ ~~riferiti~~ delle lune di Giove, se riferite a Giove. In particolare $T^2 = K_G a^3$

⟹ in un sistema a due corpi(*) sole-pianeta o pianeta-luna (quindi non solo in un sistema "eliocentrico") valgono le leggi di Keplero

⟹ ~~Inizio~~ concetto di "forza".
Secondo Keplero $F \to$ sostiene la velocità (visione pre-Newtoniana). La terza legge, indicando pianeti più "veloci" se vicino al sole, gli suggerì una forza maggiore vicino al sole. ~~Keplero~~ La formulazione corretta (in termini di acc.) è Newton

(*) Nella descrizione di Keplero non si pensa a "due corpi" ma a 1 corpo in un riferimento fisso nell'altro corpo

1665 Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ → la forza è associata all'accelerazione centripeta

Nell'approssimazione di moto circolare (adottata da Newton:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

(~~se~~ vogliamo $\frac{dA}{dt} = \frac{\text{Area}}{T}$)

Dunque:

$$F_{SP} = m_p \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} m_p r$$

Sostituendo al posto di T^2 la 3ª legge di Keplero

$$F_{S,P} = \frac{4\pi^2}{K_S} \frac{m_p}{r^2} \qquad (4)$$

La forza (gravit.) dipende dalla massa (inerziale) del pianeta e dell'inverso del quadrato della distanza – K_S è identico per tutti i pianeti, ma la legge vale anche per le lune di Giove (con K_G) – Quindi Giove è soggetto (passivo) della forza (4), ma è anche soggetto attivo rispetto alle sue lune. E la legge ha forma universale –

Dunque un pianeta in modo reciproco esercita una forza sul sole:

$$F_{p,s} = \frac{4\pi^2}{k_p} \frac{m_s}{r^2}$$

Per il principio di azione e reazione deve essere (in modulo)

$$F_{s,p} = F_{ps} \Rightarrow k_p m_p = k_s m_s$$

poichè la relazione deve valere per qualunque coppia sole-pianeta, $k_p m_p$ è una <u>costante universale</u> $\gamma = k_s m_s \longrightarrow 1/k_s = \frac{m_s}{\gamma}$

È posta nella forma $\frac{1}{\gamma} = G$

$$F = G \frac{m_s m_p}{r^2}$$ legge della gravitazione di Newton

G non dipende dalle masse e dalla geom. ma caratterizza l'intensità dell'interazione gravitazionale.

In termini dimensionali

$$[G] = [F] L^2 M^{-2}$$
$$= M L T^{-2} L^2 M^{-2} = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

(*) Alcune precisazioni sull'uso della 3ª legge di Keplero per dedurre (indurre?) la legge di Gravitazione:– (Mazzoldi, Nigro e Voci è confuso su qs. punto) —

- La terza legge di Keplero descrive le orbite dei pianeti attorno al sole. Per orbite circolari:

$$T^2 \div r^3$$

- Assumendo che F di gravità sia la forza centripeta che determina il moto circolare uniforme

$$m_p\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = F \Rightarrow F_{SP} \div \frac{m_p}{r^2} \quad (\circ)$$ (Forza esercitata dal sole sul pianeta)

In queste relazioni compare la massa (inerziale) del pianeta

- Non esiste una terza legge di Keplero per l'orbita del sole attorno al pianeta. Le leggi di Keplero valgono per orbite attorno al sole (assunto riferimento inerziale). Non posso dunque scrivere in modo immediato $F_{P,S} \div m_S/r^2$ (occhio! Il Mazzoldi lo fa ma non ne dà giustificazione) —

Per scrivere la relazione che consente di esplicitare la massa del sole nella legge di fatto serve un procedimento di astrazione

• Le leggi di Keplero valgono per satelliti dei pianeti. Ad esempio per le quattro lune di Giove. ~~I valgono con periodo diff.~~

$$T^2 \div r_L^3$$ ← è valida ma con costante di prop. diversa

• Posso perciò scrivere per Giove e le sue lune:

$$F_{G,L} \div \frac{m_L}{r^2} \qquad (1)$$

• Poiché la struttura della legge (1) è osservata per diversi casi – Sole-pianeti, pianeti-lune, per astrazione posso ritenere che sia una legge generale e, ad esempio, immaginare che Giove eserciti una forza su tutti i corpi secondo la (1) e dunque anche sul sole:

$$F_{P,S} \div \frac{M_S}{r^2} \qquad (2)$$

• A questo punto dal confronto di (0) e (2) e ~~dalla validità~~ assumendo la validità dell ~~princ. d~~ ~~posso concludere che~~ III legge di Newton, posso concludere che $F_{P,S} = F_{S,P} \Longrightarrow F = -G \frac{M_S M_P}{r^2}$

cioè la cost. di prop. in (0) e (2) ~~dip~~ è universale

- La legge è verificata sperim. su ampie scale, per ricavare G occorre conoscere il valore delle masse -
- Prima verifica ad opera di Nw:
  - oggetti cadono sulla terra $F = mg$

    $$g = G\frac{m_T}{r_T^2}$$

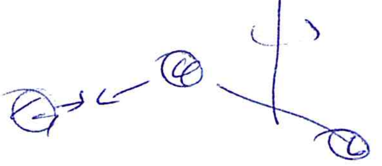
    Tuttavia G e m_T non sono noti indip.. La misura di g misura $G \cdot m_T$ (r_T era noto con precisioni dall'antichità)

  - Cadute della Luna sulla terra:

    $$\cancel{m_L}\,\omega_L^2 r_L = \frac{G\,m_T\,\cancel{m_L}}{r_L^2} \leftarrow$$ dalla misura di r_L e ω_L si ricava $G m_T$!

  - La misura separata di G e m_T (di fatto la "pesatura" di m_T) ha richiesto una misura di G ad opera di Cavendish (1798) -

    Bilancia di torsione per la misura di F tra due masse note -



condizione di eq. della bilancia

MASSA INERZIALE E GRAVITAZIONALE

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Forza G dip. da proprietà corpi ⟶ massa G

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Proprietà cinematica massa I

Per un corpo in caduta sulla terra:

$$m_I g = G \frac{m_G m_{T,G}}{r^2}$$

$$g = G \frac{m_{T,G}}{r^2} \left(\frac{m_G}{m_I} \right)$$

Massa inerziale e gravitazionale sono prop.

⟶ Assunti identici e cost. di prop. riassorbita in G

D'altronde se il rapporto m_G / m_I dipendesse dai corpi potrebbe essere possibile evidenziare la diff. tra i due concetti di massa.

Es: come filo a Pb ⟶ dipende da G e dall'acc. centripeta (I)

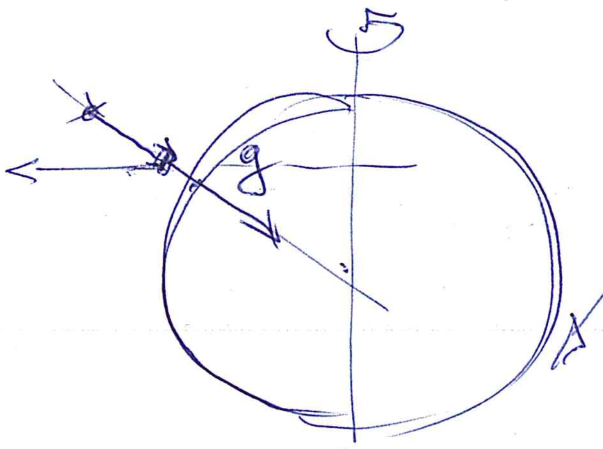
Dim. del FILO A PB.

$\vec{\omega}$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_T - \vec{a}_c$$

$$\underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}$$

nulla perché il filo è fermo



$$\vec{g}(\theta) = \vec{g} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

- Accelerazione apparente determina una forza secondo $m_I \vec{a}$

La direzione del filo a piombo si discosta dalla verticale a seconda del rapporto m_I/m_g

⟶ Non c'è evidenza di diff. m_I/m_g per diversi materiali

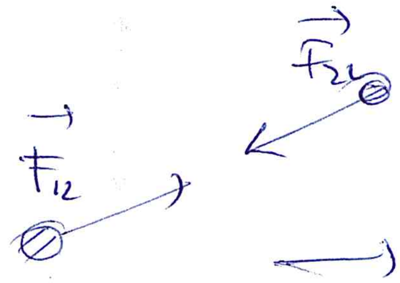
Espressione vettoriale

$$\vec{F} = -G\frac{m_S m_T}{r^2}\hat{u}$$

- È forza centrale → giustificazione II^a legge Keplero –
- SOLE = CENTRO D. FORZA

Però di fatto è sist. a 2 corpi

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$ → né sole, né terra sono sistemi di rif. inerziali



→ CM è fermo $\vec{F}^E = 0$

Buon rif.

def $\vec{R} = m_1\vec{r}_1 +$

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ di relativa

Eq. del moto per $\vec{R}$ e $\vec{r}$ →

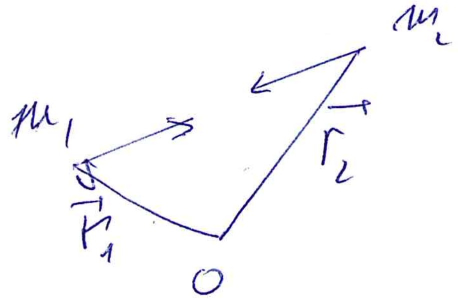
$$\mu\frac{d^2r}{dt^2} = F_{12}$$ → massa ridotta

$$= -G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{G\mu M}{r^2}$$

Interaz. corpo di massa ridotta μ effettiva a CM con massa totale M →

Possiamo descrivere il moto in riferimento al c.d.m.

Siano $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ le posizioni di m_1 e m_2



$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$ cm → R_{cm}

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$ posizione relativa

Eq. del moto per $\vec{r}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

$$= \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \vec{F}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$\boxed{\mu\vec{a} = \vec{F}}$$ con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_{1,2}$$

$$\boxed{F = -G\frac{\mu M}{r^2}\hat{u}_{1,2}}$$ → FORZA CENTRALE PER μ ($M = m_1 + m_2$)

Moto relativo di un oggetto di massa ridotta

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ nel campo di forza centrale di una massa totale M

Limite $m_1 >> m_2$

$M = m_1$

$\mu = m_2$

$\vec{R} = \vec{r}_1$ CM coincide con la posizione di (1)

$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}$ pos. di 2 è relativa a CM

$\longrightarrow$ E' il caso della descrizione di Keplero

——— o ———

Orbita circolare: per sistema $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, M

$$\cancel{\mu} \omega^2 r = G \frac{M \cancel{\mu}}{r^2} \Longrightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r^3}$$

$$\cancel{4\pi^2}$$

$$T = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r^3}{GM}\right]^{1/2}$$

$$M = m_1 + m_2 = m_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$$

$\simeq m_1 (1 + 10^{-6})$ Sole – pianeti

$\simeq m_1 \left(1 + \frac{1}{80}\right)$ terra – luna

La misura del periodo della luna ha una correzione non trascurabile dal rapporto delle masse luna/terra ($\sim 1\%$)