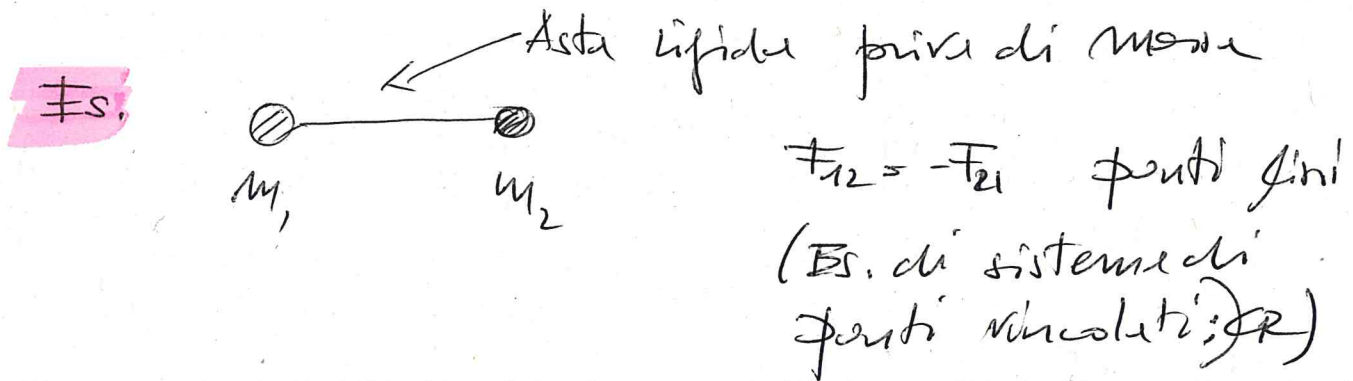


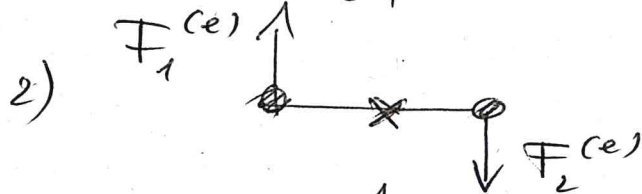
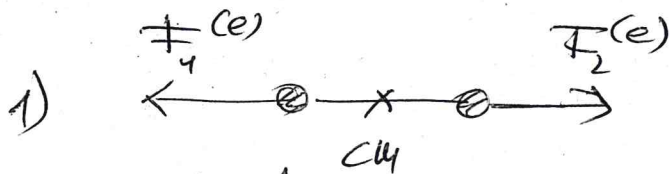
Il momento delle forze e il momento della pta' di moto: dinamica rotazionale

(1)

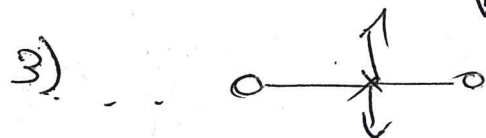


Equilibrio traslazionale:

$$\sum_i \vec{F}^{(e)} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{J}_{cm} = \text{cost}$$



$$\vec{J}_{cm} = \text{cost}$$



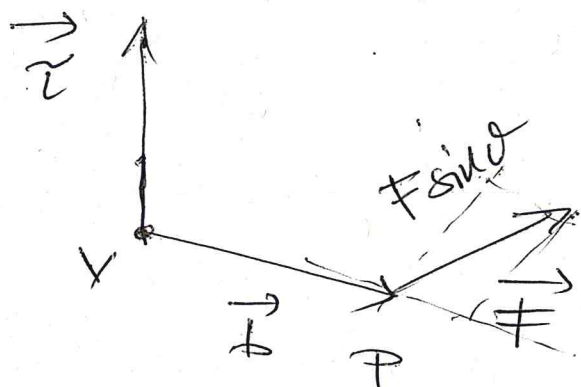
tuttavia è esp. comune che il sistema di punti nella condition 2) ruoti attorno a un asse. Quindi la conditione

$$\sum_i \vec{F}^{(e)} = 0$$

è conditione necessaria per l'equilibrio di un sistema di punti, ma non sufficiente. Il sistema può ruotare attorno ad un asse. Per la descrizione dei moti di rotazione (moti angolari) è utile introdurre alcune nuove

Possiamo caratterizzare l'azione delle forze agenti (2) sul sistema 1) e 2) tramite una grandezza vettoriale che tenga conto del punto di applicazione della forza e della sua direzioni rispetto ad un punto fisso

MOMENTO DELLA FORZA:



Punto (fisso): V $\vec{r}_0$

Punto di applicazione: $\vec{P}$

Braccio della forza: $\vec{b}$

$$\underline{\underline{\vec{\tau} = \vec{b} \times \vec{F}}}$$

Per il modulo della ~~forza~~ momento della forza si ottiene: $\tau = b F \sin \theta$, ove $F \sin \theta$ è la componente della forza ortogonale ~~alla~~ al braccio della forza.

Analizzando le situazioni descritte in figura 1) e 2) tramite questa grandezza vettoriale, si ottiene (scegliendo V nel centro dell'asse)

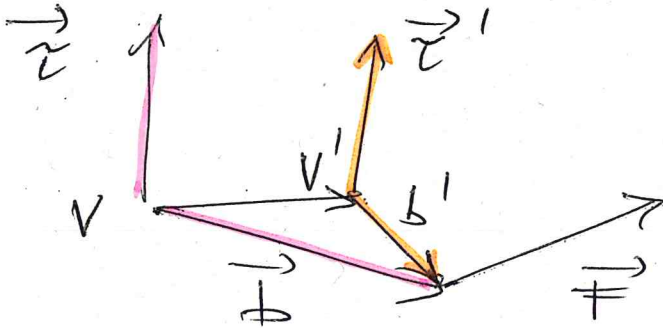
$$1) F_1 b_1 \sin \theta = 0 \quad \text{e} \quad F_2 b_2 \sin \theta = 0$$

$$2) \tau_1 = F_1 b_1, \quad \tau_2 = F_2 b_2$$

con τ_1 e τ_2 concordi in verso

Nel primo caso $\tau_{\text{tot}} = 0$, nel secondo caso $\tau \neq 0 \rightarrow$ a descrivere bene le osservazioni

$\vec{M}_a = \vec{r} \times \vec{a}$) dipende dalla scelta del POLO rispetto a cui è calcolato il momento;



$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{b} \times \vec{F} = \\ &= (\vec{b}' \times \vec{X}'') \times \vec{F} \\ &= \vec{r}' + \vec{X}' \times \vec{F}\end{aligned}$$

Perché $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 =$
 $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \sqrt{x}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$
 Risultante nulla
 solo negli
 che $\vec{c}_1 \neq \vec{c}_2 = 0$ RISULTATO
 GENERALE

Tuttavia, cambiando la scelta del polo negli esempi mostrati ritrova sempre che $\vec{E}_1 \neq \vec{E}_2$ nella configurazione 1) e 3) $\therefore$ **Due folte**

~~collinear quadruple opposite hands to projections~~
~~simple minus complex into for TSP Homom~~
~~in it quadruple are simple quadruple opposite~~
 Points

$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 \neq 0$ nel caso 2). Dunque la
giacitura, ancorché non invariante rispetto
alla scelta del polo, sembra adatta a
determinare la dinamica del problema.
 $\Rightarrow$ La presenza di $\vec{r} \neq 0$ determina una
variazione del moto angolare (acceleration angular)

Questo è in analogia con la II legge di Newton: (4)

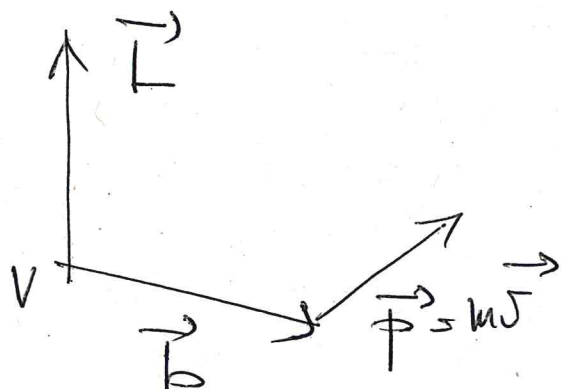
$$\vec{F} \neq 0 \iff \text{variazione di } \vec{v}$$

$$\vec{\tau} \neq 0 \iff \text{variazione di } \vec{\omega}$$

(abbiamo introdotto la velocità angolare vettoriale, nella discussione dei moti relativi)

L'analogia può essere formalizzata introducendo il momento delle quantità di moto in dinamica del punto materiale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



Come per il momento della forza, ~~ma~~ $\vec{L}$ dipende dal polo:

$$\vec{L}_V = \vec{L}_{V'} + \vec{VV'} \times m\vec{v}$$

In generale ~~per~~ $\vec{L} = \vec{L}(t)$, poiché $\vec{p} = \vec{p}(t)$ (cioè la velocità del punto materiale cambia nel tempo.)

Per rendere esplicita le relazione tra momento della Qta' di moto e velocità angolare, esprimiamo la velocità lungo la traiettoria del pto materiale come somma vettoriale delle componenti radiale e tangenziale della velocità:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$$

Con questa rappresentazione si ottiene:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \left(\frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \right)$$

il primo prodotto vettoriale è nullo, poiché $\vec{r}$ e $\hat{u}_r$ sono paralleli -

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Se il moto è circolare e il Polo è scelto nel centro del cerchio descritto dal moto si ottiene $L = m r^2 \omega$

Per un punto materiale, tutte le forze sono applicate al punto e lo definisci

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE PER IL PUNTO MATERIALE :

6

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

→ Analogo della II legge della dinamica

Dim: ~~Applichiamo~~ Calcoliamo le variazioni nel tempo del momento delle quantità di moto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) =$$

dove $\vec{r}$ è il vettore rettile che congiunge un pto O a P (supponiamo per semplicità

che O è fisso e supponiamo che il sistema sia INERTIALE, cioè le accelerazioni corrispondono a forze reali)

$$\begin{aligned} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \\ \text{perché } O \text{ è fisso} &\rightarrow \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \\ &= 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

perché inerte

LA DERIVATA TEMPORALE DI $\vec{L}$ È UGUALE AL MOMENTO DELLA FORZA, SE ENTRAMBI I MOMENTI SONO CALCOLATI RISPETTO ALLO STESSO POLO FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

(7)

Come conseguenza: se $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ e
 cioè: Il momento della quantità di moto
 è conservato ($\vec{L} = \text{cost}$) se il momento
 della forza è nullo - Si noti che $\vec{\tau} = 0$

non equivale a $\vec{F} = 0$: τ si annulla
 anche per $F \neq 0$ se la forza e il braccio
 sono paralleli. (QUINDI LA CONDIZIONE $\vec{\tau} = 0$
 È IN GENERALE INDIP. DA $\vec{F} = 0$)

Proseguendo l'analogia $\rightarrow$ teorema dell'impulso:
 " del mom. dell'impulso

$$\int_0^{\infty} \vec{\tau} dt = \Delta \vec{L}$$

Nel caso di forze impulsive (breve durata, ma
 elevata intensità); il braccio delle forze è
 costante (perché il punto non si muove
 durante l'applicazione delle forze):

$$\Delta \vec{L} = \int_0^{\infty} \vec{\tau} dt = \int_0^{\infty} \vec{r} \times \vec{F} dt = \vec{r} \times \int_0^{\infty} \vec{F} dt$$

$\vec{r}$ è indep. da
 t , per forze
 impulsive.

$$\Delta \vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}$$

[Unità di misura del
 Mom. forza Nm]

(8)

Not 2: $\vec{L} = \text{cost}$
 $\vec{r} \times m\vec{v} = \text{cost}$

Sono relazioni vettoriali. Dunque $\vec{L} = \text{cost}$ significa che la direzione del momento della qta' di moto è costante, e cioè il piano in cui giacciono $\vec{r}$ e $\vec{v}$ è costante. In altri termini $\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$ implica che il moto è piano.

Nessuna delle relazioni ricavate per il pto materiale aggiunge informazioni non già presente nelle leggi della dinamica. Abbiamo infatti dedotto le relazioni a partire dalle II leggi di Newton.

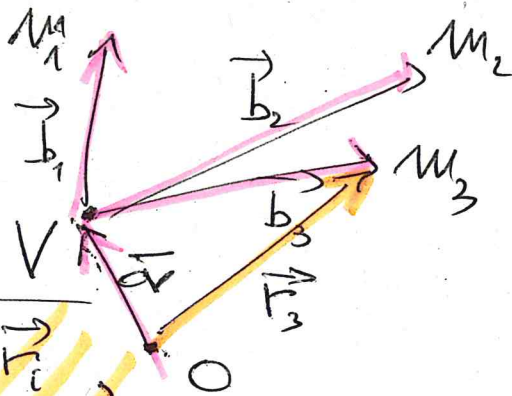
Il momento angolare e il mom. delle forze sono però grandezze utili nella descrizione dei sistemi di punti, come avevamo visto negli esempi da cui siamo partiti.

SISTEMA di N PUNTI MATERIALI

(9)

Momento angolare totale del sistema:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{b}_i \times m \vec{v}_i$$



Polo V in generale non fisso e diverso dall'origine O del sistema di riferimento materiale

Valutiamo la variazione di $\vec{L}$ nel tempo (derivata temporale) per trovare l'analogo del teorema del momento angolare centro di massa per un sistema di punti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{b}_i}{dt} \times m \vec{v}_i + \sum_i \vec{b}_i \times m \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

Analizziamo i due termini e poi scomponiamo!

$$1) \frac{d}{dt} \sum_i \vec{b}_i \times m \vec{v}_i = \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i - \vec{r}_V) \times m \vec{v}_i =$$

$$\sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_V) \times m \vec{v}_i = \left(\vec{v}_i // m \vec{v}_i \Rightarrow \text{molto} \right)$$

$$= \cancel{\vec{v}_V} \times \sum_i m \vec{v}_i$$

$$= - \vec{v}_V \times M_{\text{tot}} \vec{v}_{\text{cm}}$$

$$b) \sum_i \vec{b}_i \times m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{b}_i \times m \vec{a}_i$$

(10)

$$= \sum_i \vec{b}_i \times (\vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I)$$

ove le forze sono tutte forze reali poiché il sistema di riferimento è inerziale.
(rispetto a cui è calcolato $\vec{S}_i$)

Definiamo : $\vec{L}^E = \sum_i \vec{b}_i \times \vec{F}_i^E$

momento totale delle forze esterne
rispetto al polo (nota non sono
tutte applicate nello stesso punto)

$$d) \vec{L}^I = \sum_i \vec{b}_i \times \vec{F}_i^I = 0$$

momento totale delle forze interne

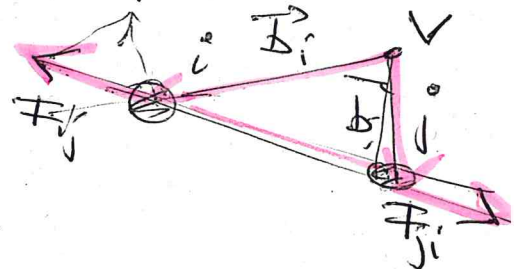
Analizziamo d) : Per ogni coppia di punti i, j

$$\vec{L}_{ij}^I = \vec{b}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{b}_j \times \vec{F}_{ji}$$

$$\vec{L}_{ij}^I = \vec{b}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{b}_j \times \vec{F}_{ji}$$

$$= (\vec{b}_i - \vec{b}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

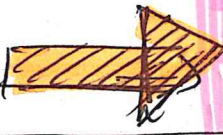
è la congiungente di i e j e
quindi parallela a $\vec{F}_{ij}$



Ricapitolando: T. DEL MOMENTO ANGOLARE

(11)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{r}_v \times m\vec{v}_{cm} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Se $\vec{r}_v \times m\vec{v}_{cm} = 0$  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

Condizioni di nullità di $\vec{r}_v \times m\vec{v}_{cm}$

- 1) $\vec{r}_v = 0$ (POLO FISSO NEL S.S.T. ~~INTERIALE~~ ^{RIFERIM})
- 2) POLO COINCIDE CON IL C.D.M (non necessariamente inettiale) $\Rightarrow$ Punto privilegiato dunque!
- 3) $\vec{v}_{cm} = 0$ (in altri termini ~~è inettiale con~~ ^{es} nel rst. di riferimento ha l'origine in un punto ~~inettiale con c.d.m~~)
- 4) $\vec{r}_o$ e $\vec{v}_{cm}$ sono parallele E' INERTIALE SOLO SE $\vec{r} = 0$

Nota: il risultato $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ discende dalla condizione che le forze sono collineari (forma forte del III principio della dinamica)

Conservazione del momento angolare

① Poniamo il caso $\vec{v} \times m\vec{v}_{cm} = 0$, allora il momento angolare è conservato e

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

La condizione al polo $\vec{M} = 0$ si può verificare in due casi:

① Non agiscono forze esterne sul sistema
 cioè $R(E) = \sum_i F_i(E) = 0$ —

In questo caso la condizione è verificata per qualsiasi polo γ ed inoltre

vale anche che $\vec{P} = \text{cost}$

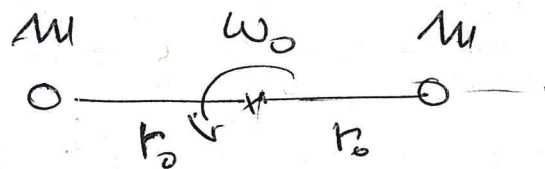
2) $R(E) \neq 0$, ma esiste almeno un polo rispetto al quale $\vec{M} = 0$ — in questo caso $\vec{L} = \text{costante}$, ma $\vec{P} \neq \text{costante}$ ma $\Delta P \neq 0$ in generale $\rightarrow$ scelta del polo importante nell'analisi del problema

Nota: ① È verificata spontaneamente: $\vec{L} = 0$ in un sistema isolato $\rightarrow$ è conferma del principio di Azione e Reazione in forma forte cioè verifica che $\vec{P} = 0$

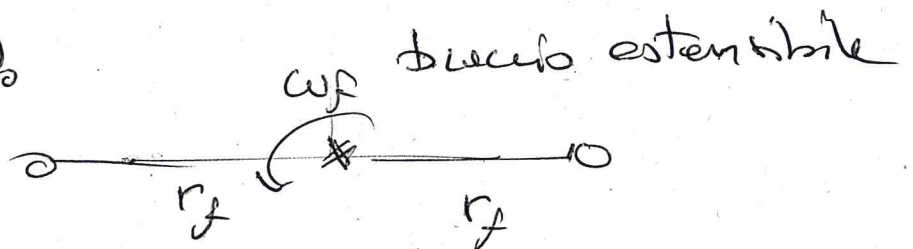
Es. 1 Cons. del momento angolare

L'azione di forze interne può modificare la distribuzione delle masse, ma non il momento angolare $\rightarrow$ si modifica la velocità di rotazione dei punti

Schematico:



$$L_0 = 2mr_0^2 \omega_0$$

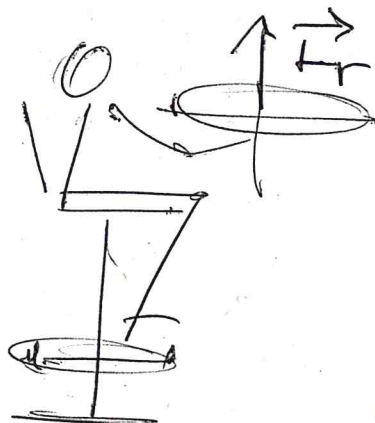


$$L_f = 2mr_f^2 \omega_f$$

$$\Rightarrow L_f = L_0 \Rightarrow \omega_f = \left(\frac{r_0}{r_f}\right)^2 \omega_0$$

x tuffatore
x pattinatore

Esempio (concetto)



ruote in rotazione
viene ribaltata

$$\vec{L}_r \Rightarrow -\vec{L}_r$$

$$\vec{L}_0 \Rightarrow \vec{L}_0 = 2L_r$$

la sedia deve ruotare

11

13 b1

La scelta del polo è arbitraria
- Quale scegliere?

Due punti notevoli:

- x Origine del sist di rif. (inertiale)
- x Centro di massa del sistema -

Verifichiamo due proprietà notevoli

$$1) \quad \vec{L}'_{CM} = \vec{L}_{CM}$$

Il mom angolare ~~rispetto al~~ con polo nel CM è identico nel sist. del CM e nel sist. inerziale

$$2) \quad \vec{L}_O = \vec{L}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}$$

Il mom. ang. con polo sull'origine del sist inerziale è dato dalla somma del mom angolare nel CM rispetto al CM e il mom. angolare della qta' di moto tot ~~per~~

DESCRIZIONE RELATIVA AL C.d.M.

(14)

Punto notevole per cui $\vec{\sigma}_V \times m \vec{\sigma}_{cm} = 0$ e

dunque:

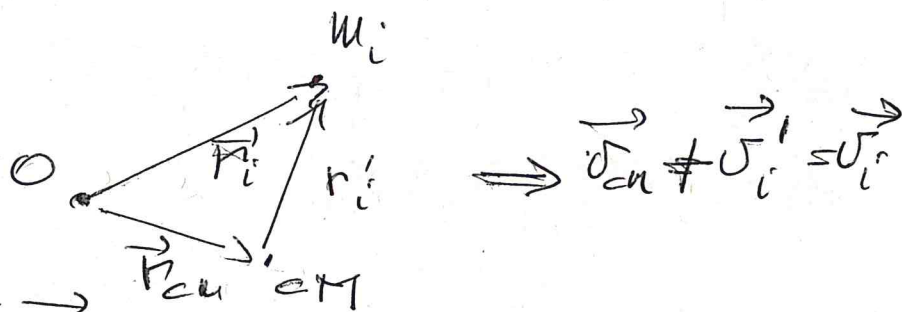
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

(con apice a indicare il riferimento del C.d.M.)

C.d.M. non è in generale inerte: $\vec{a}_{cm} \neq 0$
e dunque $\vec{\tau}'$ ha contributi da $\vec{F}_{app}^i = -m_i \vec{a}_{cm}$

Tuttavia, calcolo $\vec{L}$ nel sist. inerte scegliendo

CM come polo



$$\begin{aligned} \vec{L}_{cm} &= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \\ &= \left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm} \end{aligned}$$

$\vec{L}_{cm} = \vec{L}'_{cm}$ (pta' di moto totale relativa al C.d.M.)

$$\vec{L}_{cm} = \vec{L}'_{cm}$$

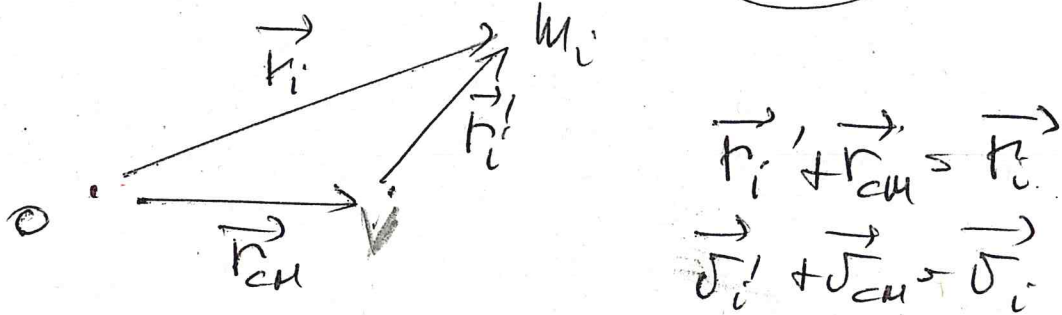
il mom. angolare con polo nel CM è identico nel sist. del CM e in un sist. inerte

$$\vec{\tau}'_{cm} = \frac{d\vec{L}'_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm}$$

È ANALOGO A QUELLO PER I MOMENTI DELLE FORZE

Teorema di Koenig per il mom. angolare

Stabilisce la relazione tra mom. angolare nel sistema inerziale e nel sist. del CM, calcolato rispetto al Polo = ~~origine~~ origine del sistema inerziale - vire



Inoltre la posizione del CM è nulla nel sistema del CM, e la qta' di moto totale nel CM è nulla:

$$\sum m_i \vec{r}'_i = 0 \quad \sum m_i \vec{v}'_i = 0$$

Scegliamo polo = ~~CM~~ O, ma inf. inerziale ($\vec{v}_i$)

$$\vec{L}_{CM} = \sum \vec{r}_i \times m \vec{v}_i$$

$$= \sum m_i (\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) =$$

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \sum_i \vec{r}'_i m_i \times \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i + \sum_i m_i \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{L}_{CM} = \underbrace{\vec{L}_{CM}}_{\text{relativo al CM}} + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}_{\text{del CM}}$$

Proprietà sistemi con forze applicate in diversi punti

16

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{Risultante}$$

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Cambio polo:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{OO'}) \times \vec{F}_i = \vec{M}_{O'} + \vec{OO'} \times \vec{F}$$

Il momento dipende dal polo salvo
per $\vec{F} = 0$ (Risultante nulla)

————— $\rightarrow$ in questo caso $\vec{M}_O \perp \vec{F}$
ma in generale non è vero =

Il sist. può sempre essere ridotto a
 ~~$\vec{R}$ con~~ ~~retta d'azione~~ ~~passante~~ per il polo
non copio