

Urto tra due pti materiali

* URTO = due pti vengono a contatto (inter) in un intervallo τ piccolo rispetto al tempo di osservazione del sist.

* τ piccolo $\Rightarrow$ punti non si muovono durante tutto il tempo τ - e fatta ~~impulso~~ molto intensamente l'urto $\Rightarrow$ ~~FORZA IMPULSIVA~~

* FORZE CHE SI MANIF. SONO INTERNE $\Rightarrow$ BRACCIO URO $\neq 0$ pu $\tau \neq 0$
 $J = \int F(t) dt$
 $F(t) = 0$ o, pu lo stesso, $J(t) = 0$

$\Rightarrow$ conservazione qta' moto complessiva durante l'urto

forche la forza impulsiva dell'urto e' molto grande

$$\vec{P}_{tot} = \vec{P}_{cm} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm} = \text{costo}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{cm} = \text{cost}} \quad \text{quindi} \quad \boxed{CM \text{ E' INERZIALE}}$$

(e posso scegliere CM come rif. pu la derivazione dei moti interni) Nota che, generalizzando, sempre

- In altri termini pti anche dire che il lavoro delle forze interne non pu' modificare lo stato di moto del centro di massa.

- Invece: $\vec{J}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12} dt \neq 0$ e $\vec{J}_{12} = -\vec{J}_{21}$

$$\Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = \vec{J}_{12}$$

$$\Delta \vec{p}_2 = -\vec{J}_{12}$$

$$\boxed{\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2}$$

VARIATIONI DI QTA' DI MOTO UGUALI E OPPOSITE

$\Rightarrow J(t) = 0$ o conservabile

ENERGIA NELL'ORTO

$$\Delta E_K = W$$



Solo forze
interne

→ se le forze esterne
sono trascurabili, posso
scrivere $W = W_F$

$$\Delta E_K = W^{(I)}$$

→ il lavoro interno è
invariante per rif. inerziali

$$W^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad \text{posizioni relative}$$

Dunque per ogni rif. inerziale $\Delta E_K = \Delta E_K'$ -

In particolare la relazione è vera nel rif.
del centro di massa -
Sappiamo che

$$E_K = \underbrace{\frac{1}{2} M V_{CM}^2}_{\text{costante}} + E_K''$$

teorema di
Koernig.

→ ~~ΔE_K~~ quello che varia è l'en. cinetica relativa
al centro di massa

→ in generale $\Delta E_K \neq 0$ e non sappiamo
se le forze che agiscono durante l'urto
sono conservative o non conservative

~~For~~ differente?

Se sono conservative → $\Delta E_K = 0$

Supponiamo che ci siano sia forze conservative che non conservative: - Dal teorema dell'energia cinetica:

ΔE_K Relativa al CM

$$\Delta E_K' = \cancel{W_{nc.}} + \cancel{W_{con.}(\neq)}$$

$$\Delta E_K' = \cancel{W_{nc.}} + \Delta E_p \quad \Rightarrow \text{esprimibile tramite potenziale}$$

Per le forze conservative notiamo che:

~~$\neq$~~ non metter con

* Abbiamo assunto forze impulsive
cioè $F=0$ per tempi $t < t_1$ e $t > t_2$
con $t_2 - t_1$ intervallo durante il quale avviene l'urto -

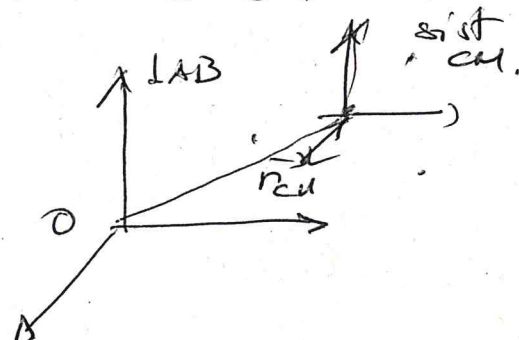
* Eventuali variazioni di en. potenziale avvengono durante l'urto, ma abbiamo assunto che durante l'urto la posizione dei punti sia fissa, quindi durante l'urto il potenziale è costante -
 $\Delta E_p = 0$

$\Rightarrow$ L'energia cinetica può variare per effetto di forze non conservative -

Si utilizza la variazione di energia cinetica per classificare gli urti

Descrizione uni:

- x Si dice sistema del laboratorio il sist. di riferimento inerziale in cui è posto il dispositivo che compie le misure e studia le caratteristiche dell'urto
- x sistema del CM. → bilocale con il centro di massa



$$\vec{p}_{CM}' = 0 \rightarrow \vec{p}_0' = 0$$

ptu' di moto totale relativa al CM
O' nulla.

Legame: $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}$ (1)

Per la ptu' di moto

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

dalla def di CM e derivazione

Dalla (1)

$$m_1 (\vec{v}_1' + \vec{v}_{CM}) + m_2 (\vec{v}_2' + \vec{v}_{CM}) = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' + (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

quindi nel CM $\boxed{m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0}$
i due punti si muovono uno verso l'altro verso in CM.

> Qs. relazione è vera prima e dopo l'urto:

$$\vec{p}_{1,in} = -\vec{p}_{2,in}$$

$$\vec{p}_{1,fin} = -\vec{p}_{2,fin}$$

in generale però

$$\vec{p}_{1,in} \neq \vec{p}_{1,fin}$$

La descrizione nel LAB: cambio sist. di riferimento.

Passaggi:

$$1) \quad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm}$$

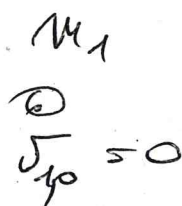
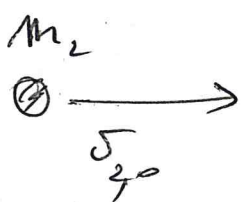
Da questa ricavo la velocità del CM rispetto al laboratorio

2) Risolvo nel CM ($\vec{v}_{cm}$ ignorata e uso $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$ relative al CM)

$$3) \quad \text{Ritorno nel laboratorio con}$$

$$\vec{v}_{i,fin} = \vec{v}'_{i,fin} + \vec{v}_{cm}$$

Es. Biglie, di cui una ferma.



$$m_1 \vec{v}_{1,0} + m_2 \vec{v}_{2,0} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{2,0}$$

- Ad esempio se $m_1 = m_2$ $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{2} \vec{v}_{2,0}$
 il cm. si muove verso m_1 a velocità metà di m_2

- L'orto avviene nel centro di massa e

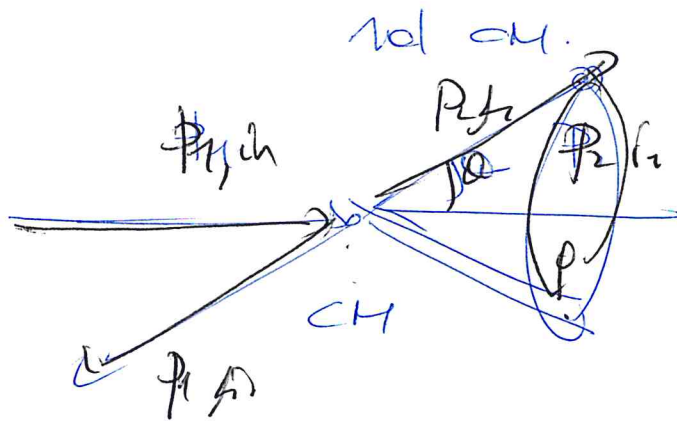
$$m_2 \vec{v}_{2,fin} = -m_1 \vec{v}_{1,fin} \rightarrow \text{e poi usale al Laboratorio}$$

In generale $\vec{P}_1, \mu_1$ e $\vec{P}_2, \mu_2$ non sono compl. determinati.
Numero di $\vec{F}_p$ e incognite nell'orto -

$$\vec{\Phi} = \text{cost.} \Rightarrow \vec{P}_1 f = -\vec{P}_2 f \quad \text{nel c.m.}$$

oppure $\rightarrow$
 $\vec{P}_1 f + \vec{P}_2 f = \vec{P}_{in}$

- X Sono tre relazioni scalari (1 vettoriale)
- X D'altronde le incognite sono 6: $\vec{P}_1 f$ e $\vec{P}_2 f$
 mentre in generale sono assegnate $\vec{P}_{1,in}$ e $\vec{P}_{2,in}$
 (come potrebbe essere il cont. orlo)
- X Quindi esistono 3 parametri indeterminati
 nell'orto



$|\vec{P}_1 f|, \varphi, f$
 sono indeterminati
 (oppure le tre comp.
 x, y, z di una delle
 due particelle di
 moto)

In altri termini l'orto potrà essere assegnato
 ad un angolo definito, ma a priori
 non è definito, né è definito il modulo
 delle f di moto

L'energia può essere la cinetica

①

$$\Delta E_K = 0$$

Collisione elastica

$X_{mc} = 0$ Non ci sono forze
non conservative e l'energia
cinetica è conservata

$$E_{K,in}' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{1}{2} \frac{p_2'^2}{m_2} \quad \leftarrow E_{K,in}' = E_{K,out}'$$

Nel centro di massa: $p_{1,in}' = p_{2,in}' = p_{in}'$

$$\Rightarrow E_{K,in}' = \frac{1}{2} p_{in}'^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)$$

$$E_K' = \frac{1}{2} \frac{p_{in}'^2}{\mu}$$

massa ridotta del
sistema $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

La cons. dell'energia pone un vincolo
al valore del modulo della quantità
di moto - $|p_{in}'| = |p_f|$

Indeterminato solo l'angolo

COLLISIONE ELASTICA:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \\ E_{K,in} = E_{K,fin} \end{array} \right. \rightarrow \Delta E_K = 0 \quad \text{significa } X_{MC} = 0$$

6 ~~incog~~
4 relazioni vincolari
le forze interne sono conservative

Caso 3d : x 2 incognite non definite
dalle condizioni di conservazione
di en. e sta' di moto
x serve misura o conoscere qualche
altra informazione

Caso 2d : x onto nel piano (ad esempio
biglie sul tavolo da biliardo)
4 incognite e 2 eq. vincolari
(one si può anche comp. e
è invariant)

Caso monodim. : sistema ~~unidimensionale~~ ~~unidimensionale~~
in $\theta \rightarrow \pi \rightarrow$ collisione centrale
2 Eq. e 2 incognite

Ovviamente $\vec{P}_{1in}' = -\vec{P}_{2in}$ e $\vec{P}_{1fin} = -\vec{P}_{2fin}$

Inoltre: $\frac{1}{2} \frac{P_{1in}^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{P_{1fin}^2}{m} \Rightarrow |P_{1in}| = |P_{1fin}|$
 $\Rightarrow \vec{P}_{1in} = -\vec{P}_{1fin} \text{ e } \vec{P}_{2in} = -\vec{P}_{2fin}$
le particelle urtano e rimbalzano
l'una all'altro - ϕ e σ cambiano
segno, nel c.m.

URTO MONODIMENSIONALE



NEL LABORATORIO

CASI POSSIBILI 1) CONCORDE



$v_2 < v_1$
(se $v_2 < v_1$ non c'è urto)

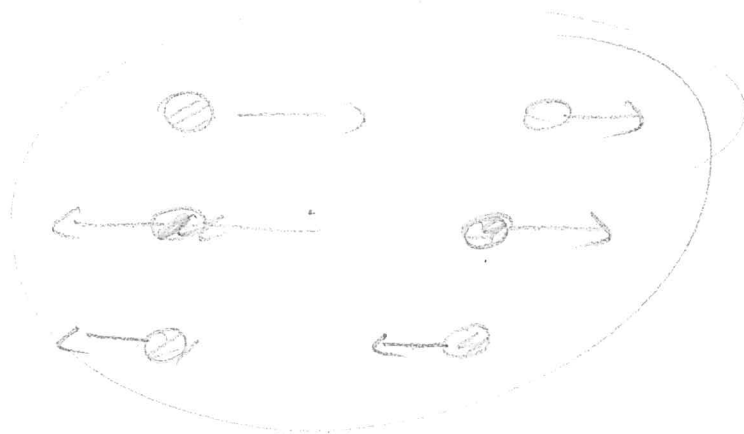
Possibili stati finali:



Caso 2)



STATI FINALI POSSIBILI (NEL LABORATORIO)



NEL C.M. LE PART SONO SEMPRE
RIMB. una cont. l'altra.

Posso assegnare v_1 e chiedere qual è
 v_2 affinché in realtà una delle tre condizioni
(valori separati)

- SOLUZIONE CASO MONO DIM.

- caso generale;

$$\Delta E_k' = 0 \rightarrow |\vec{\phi}_{in}'| = |\vec{\phi}_{fin}'|$$

Dati:

$$x \quad \phi_{1in} = m_1 \sigma_{1in} \quad \phi_{2in} = m_2 \sigma_{2in}$$

$$(1) \text{ Trovo } \sigma_{cm} = m_1 \sigma_{1in} + m_2 \sigma_{2in} = (m_1 + m_2) \sigma_{cm}$$

$$(2) \text{ Trovo } \sigma_{1in}' \text{ e } \sigma_{2in}':$$

$$\sigma_{1in}' = \cancel{\sigma_{1in}} - \cancel{\sigma_{cm}} \quad \text{per componenti } i=1,2$$

$$(3) \text{ Nell'urto elastico } \sigma_{1fin}' = -\sigma_{1in}'$$

$$\sigma_{1fin}' = \sigma_{cm} - \sigma_{1in}'$$

$$(4) \text{ Sistema del laboratorio:}$$

$$\sigma_{1fin} = (\sigma_{cm} - \sigma_{1in}) + \sigma_{cm}$$

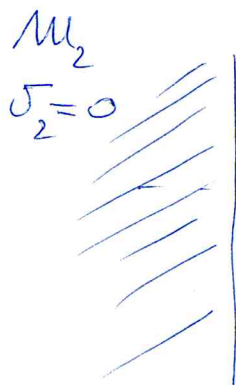
$$\sigma_{1fin} = 2\sigma_{cm} - \sigma_{1in}$$

$$\sigma_{1fin} = \frac{2(m_1 \sigma_{1in} + m_2 \sigma_{2in}) - (m_1 + m_2) \sigma_{1in}}{m_1 + m_2}$$

$$\sigma_{1fin} = \frac{(2m_1 - m_2) \sigma_{1in} + 2m_2 \sigma_{2in}}{m_1 + m_2}$$

$$\sigma_{2fin} = \frac{2m_1 \sigma_{1in} + (m_2 - m_1) \sigma_{2in}}{m_1 + m_2}$$

Es. ORTO ELASTICO CONTRO UNA PARETE



Nota si tratta come orto
per rigidità
 m_1, v_1 in

Poi generalizza
al caso con
 Φ — sempre
il muro
— una comp. libe
— l'altro ucto
 $\Rightarrow$ SOLUZIONE

~~immaginiamo~~ $m_2 \gg m_1$ al limite infinito COMPLETA
PERCHÉ
CORPO UCTO
IMMOBILE

Nel ~~sistema~~ sistema CM. $\Phi' = m_2 v_2' + m_1 v_1' = 0$

Sarebbe
molto, & l'orto è elastico:

$\Phi_{fin} = -\Phi_{in}$ e analogamente per p

$\Rightarrow$ la figlia 2mbalza e $m_1 v_{fin}' = m_1 v_{in}'$

Se $m_2 = \infty \rightarrow$ Il cm. coincide con il muro
(ovvia con il laboratorio)

e dunque $v_{in} = -v_{fin}$ nel laboratorio

Sarei portato a pensare che l'energia cinetica si
conservi e qta' moto non si conservi

Vedo $\Delta p_1 = 2 \Phi_1$

La conservazione è garantita da $m_2 = \infty$
per cui la variazione di qta' del moto del muro
è finita per variazioni di velocità del muro
infinitesime.

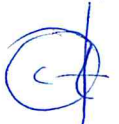
Di fatto $m_2 = \infty$ è una manovra efficace e
il muro è fino in vista di atomi vicini (Forse
sistema) per cui la pallina cambia direzione (F.E.)

CASO 2 : URTO ANELASTICO:

$$\Delta E_K' < 0$$

l'energia cinetica
distribuita

Caso più comune —

Forze di deformazione in fase opposita e quelle
di richiamo   non risultano da. l'energia

COMPLETAMENTE ANELASTICO:

$\Delta E_K' = - E_K'$ tutta l'energia viene dissipata
cinetica relativa al
CM.

se $E_K' = 0$ i due punti rimangono attaccati

Prima dell'urto $\vec{v}_{1in}$ e $\vec{v}_{2in}$

$$1) m_1 \vec{v}_{1in} + m_2 \vec{v}_{2in} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm}$$

Dopo l'urto

$$\vec{v}_{1fu} = \vec{v}_{2fu} = \vec{v}_{fu}$$

$$m_1 \vec{v}_{1fu} + m_2 \vec{v}_{2fu} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{fu} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm}$$

$$\rightarrow \vec{v}_{fu} = \vec{v}_{cm}$$

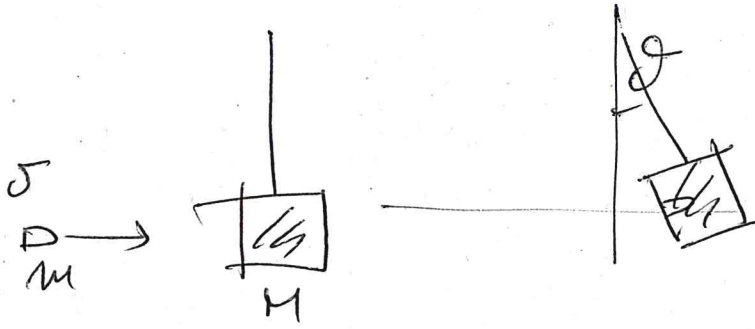
Variazioni di E_K' moto dei punti

~~$\vec{v}_{cm}$~~ $\vec{v}_{cm}$ -
energia cinetica:

$$E_K^{in} = \frac{1}{2} m_{tot} v_{cm}^2 + E_K'$$

dopo l'urto ~~E_K'~~ $E_K' = 0$

Péndulo balístico



Relaciones: $(m+M) v_{cm} = m v_1 + \cancel{M v_2}$

$$(m+M) gh = \frac{1}{2} (m+M) v_{cm}^2$$

Resolviendo $v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}$