

X SISTEMI I DI PUNTI MATERIALI

1

- * Come punti liberi (sistemi planetari)
- * come punti "vincolati" vincolati (corpo rigido)

Proprietà dinamiche descritte dalle leggi della dinamica per ciascun punto, ma alcune proprietà di insieme possono essere descritte da parole di insieme.

Definito un sistema di punti la forza agente su ciascun punto può determinare il moto, può essere ~~esp~~ scritta come:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

$\vec{F}_i^{(e)}$ = forze esterne al sistema agenti sul punto (ad esempio gravitazione)

$\vec{F}_i^{(i)}$ = forze interne

(ad esempio gravitazione degli altri punti) tensione di fili, molle, ...

La divisione è un po' arbitraria dipende da cosa intendiamo considerare come sistema

In ogni caso, per una volta definito il sistema valgono le seguenti ass.

• Per ogni coppia di punti

$$\vec{F}_{ij} = - \vec{F}_{ji} \quad \text{Az. reazione}$$

Per ogni punto $\vec{F}_i^{(e)} = - \vec{F}_e^{(i)}$

PER DESCRIVERE IL SUO
MOTO INTRODUCIAMO ASS.
GLOBALI: $\rightarrow$
 $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$
 $E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$\downarrow$
Reazione del punto
sull'esterno del sistema
NON E' RILEVANTE
PER LA DINAMICA
DEL SIST.

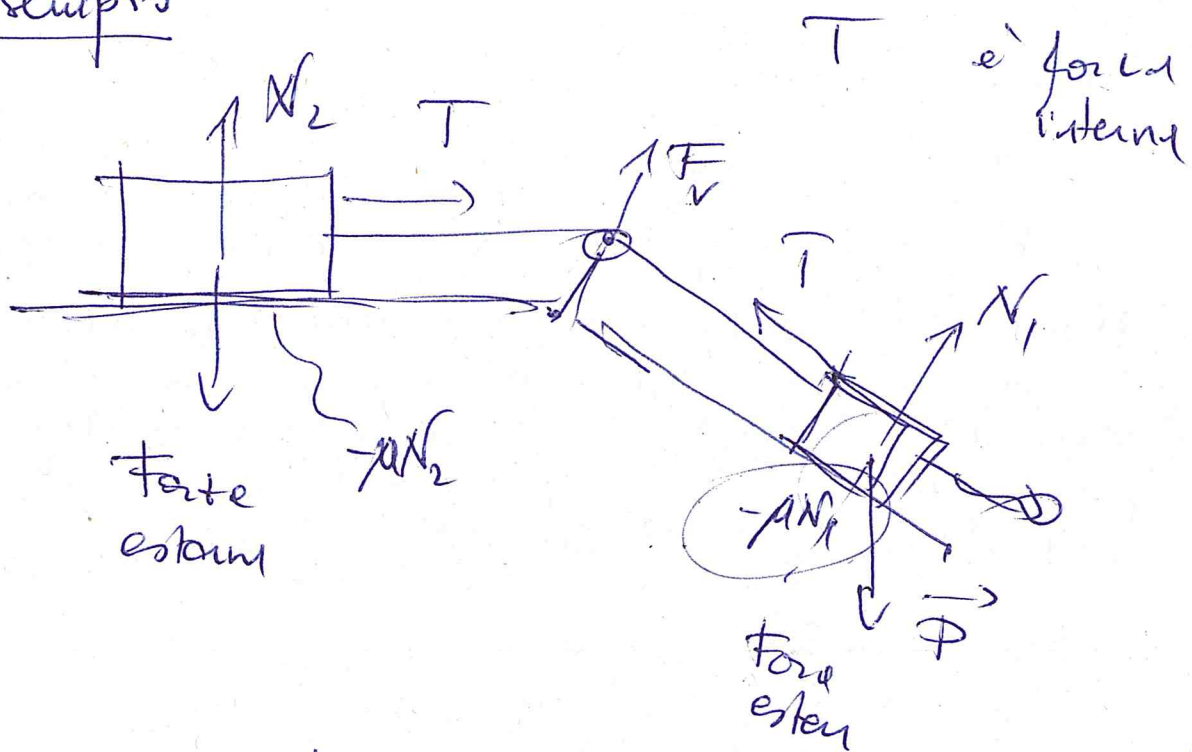
Nota: stiamo considerando forze resali
in un sistema inerziale, altrimenti $\vec{F}$ potrebbe non essere

La risultante delle forze interne e' nulla

$$\vec{R} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{31} + \dots$$

La ~~risult~~ Non e' nulla pero' la risultante su
ciascun punto - Qs. proprieta' pero' la
sue conseguenze interne al moto del
centro di massa. Un punto materiale ~~del~~

Esempio



3

Il moto del sistema descrivibile come somma di
moto traslatorio di un punto di rif. speciale detto C. M. o c.m. +

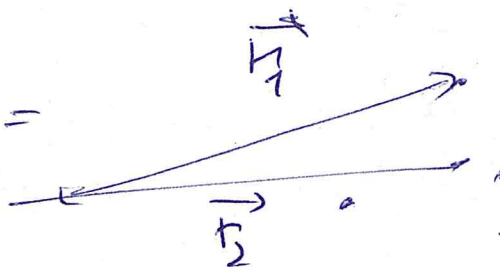
TEOREMA DEL MOTO DEL C. D. MASSA

+ moti rotazionali
attorno al c.m.

Il centro di massa del sistema si muove sotto la
risultante delle F. ESTERNE come un
punto materiale di massa $M = \sum m_i$ (somma
delle masse del sistema in parti) —

— Dim. richiede prima la definizione del
centro di massa. —

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} =$$



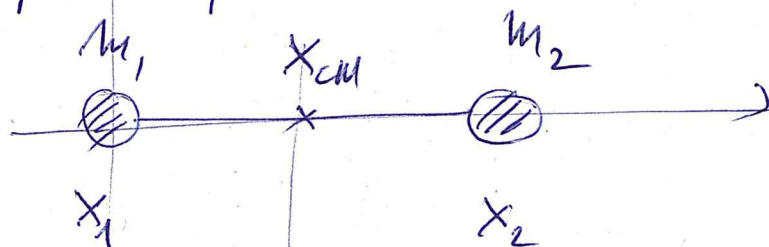
$$= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_N \vec{r}_N}{M_{TOT}}$$

possiamo scomporre in coordinate

(4)

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M_{TOT}} \quad , \quad \dots \quad ecc.$$

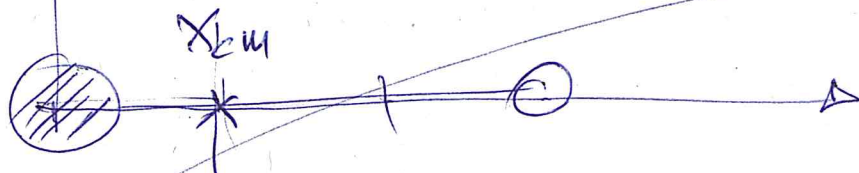
Esempio esplicito:



$$m_1 = m_2 \equiv m$$

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(x_1 + x_2)}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$m_1 = 2m_2 \equiv 2m$$



$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 \cdot 2m + x_2 m}{3m} = \frac{2x_1 + x_2}{3}$$

$$x_{cm} = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$$

Punto medio

$$x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}$$

NOTA: la posizione del cm rispetto ai due (X) punti NON dipende dal sistema di riferimento.

La posizione assoluta dip. dal sist. di riferimento — (vedi x1)

In termini generali:

(5)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{OO}' \quad \Leftrightarrow \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{OO}'$$

$$\vec{r}_{cm}' = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{OO}')}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{r}_{cm}' = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} + \vec{OO}'$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \vec{r}_{cm}' + \vec{OO}'}$$

→ stessa relazione
tra $\vec{r}_{cm}'$ e $\vec{r}_{cm}$ e
i supplementi

Calcoliamo la velocità del cm

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M_{TOT}} \right) =$$

$$= \frac{1}{M_{TOT}} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M_{TOT}}$$

Abbiamo perciò definito $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ come
quantità di moto globale del sistema
(somma vettoriale delle q.ta' di moto dei
singoli punti)

→ = q.ta' di moto del cm
e tutta la massa M in quel p.

Notevoli

$$\vec{P} = M_{\text{TOT}} \vec{v}_{\text{CM}} \\ = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

(6)

~~Ace del C.M.~~

~~Il centro di massa è~~

È importante ricordare che il centro di massa è un'astrazione matematica utile per la descrizione del sistema, ma non esiste un pto materiale nel centro di massa, in generale.

Acceleration :

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M_{\text{TOT}}}$$

$$M_{\text{TOT}} \vec{a}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Se il sistema è INERZIALE, per ciascuna pnto vale il secondo principio della dinamica:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

$$M_{\text{TOT}} \vec{a}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

$$= \sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(e)}}_{\text{Risultante delle forze esterne}} + \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(i)}}_{\text{Risultante delle forze interne e' nulla}}$$

$$M_{\text{TOT}} \vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}^{(e)}$$

Il centro di massa si muove sotto l'azione delle forze esterne applicate al sistema, come se tutte le forze fossero applicate in quel punto e se tutta la massa fosse in quel punto

TEOR. DEL C.M.

→ moto ^(CM) determinato solo dalle F. Esterne

→ moto di ogni singolo punto determ. dalle forze agenti in ciascun punto

(8)

— SOMMARIO: —

centro di massa è un punto (definito in termini matematici, cui non corrisponde un punto materiale fisico) con prop. notevoli

$$1) \quad \vec{P} = M_{\text{TOT}} \vec{v}_{\text{cm}}$$

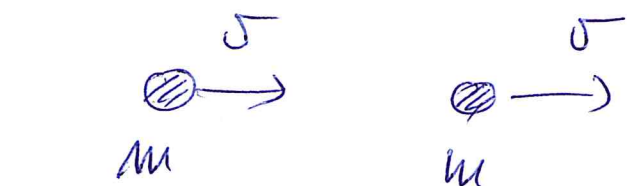
Si muove in ~~media~~ (pesata sulle masse) con una velocità corrispondente alla media (pesata sulle masse) delle velocità dei punti

$$2) \quad \vec{F}^{(e)} = M_{\text{TOT}} \vec{a}_{\text{cm}}$$

L'acc. del cm è la media (pesata sulle masse) delle acc. dei singoli punti —
 Il cm. ~~È~~ **ACCELERATO** solo se ~~$\vec{F}^{(e)} \neq 0$~~ $\vec{F}^{(e)} \neq 0$
 altrimenti i punti accelerano, ma il cm è fermo (o in moto rettilineo uniforme) rispetto a un sistema inerziale

NOTA: Qs. risultati, oltre ad applicazioni notevoli che vedremo, giustificano a posteriori la scelta di descrivere il moto di corpi estesi in termini di PIÙ MATERIALE. Il cm corrisponde al ptb materiale ideale di un corpo esteso

Esempio : Determinare il ~~moto del cm~~ ⑨
la velocità del ~~cm~~ - pu :



$$v_{cm} = \frac{mv + mv}{2m} = v$$



$$v_{cm} = \frac{-mv + mv}{2m} = 0$$

PRINCIPIO DI CONS.
QUANTITÀ DI MOTO PER CM,
SIST. DI PTI MATERIALI

~~Per un~~

Per un singolo punto $\vec{F} = 0$ implica
moto con $\vec{v}$ costante, o con $\vec{F}$ cons.

Per sistemi di punti : $\vec{a}_{cm} = 0$ se $\vec{F}^{(e)} = 0$

Quindi $\vec{P}$ è conservata se la risultante
delle forze esterne è nulla. —

x Si noti che $\vec{F}_i$ non sono costanti ma
la somma complessiva $\sum \vec{F}_i = \text{costante}$ se
non ci sono azioni esterne.

(10)

Consideriamo, per semplicità, il caso di un sistema di due punti, non soggetto all'azione di forze esterne: $\vec{F}(e) = 0$

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \quad \text{e d'altronde}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \text{poichè } \vec{P} \text{ è conservato, dato che } \vec{F}(e) = 0$$

dunque:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = 0$$

implica che

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = - \frac{d\vec{P}_2}{dt} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Poichè abbiamo supposto che $\vec{F}(e) = 0$, ~~allora~~
 $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono dovute solo a forze interne
e cioè, essendo il sistema di due punti,
devono essere forze mutuamente esercitate
da 1 su 2 e da 2 su 1.

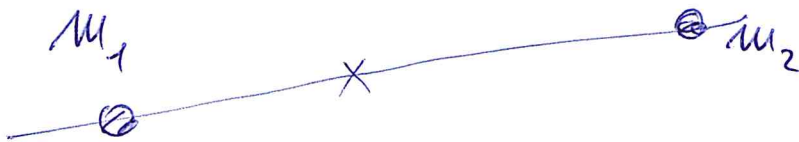
In altri termini, abbiamo trovato il
principio di azione e reazione

(11)

Tuttavia q.s. relazione è $\neq$ debole di
risultato generale relativo al principio di azione e
reazione, poiché la relazione vettoriale che ho
ricordato ~~per via~~ è una relazione tra enti
matematici $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, che richiede
identità di intensità, direzione e opposizione in
verso. Ma ~~non~~ i due vettori non devono
necessariamente essere ~~coincidenti (stessa retta)~~
giacere sulla stessa retta.

Nota: Definizione dinamica della massa
Ma noi l'abbiamo proprio definita cinematica.

Es. concettuale:



$$\begin{array}{l} \sigma_{10} = 0 \\ \sigma_{20} = 0 \\ \boxed{F(c) = 0} \end{array}$$

- Lanciati liberi di muoversi per effetto delle
forze interne. Supponiamo le attrattive.

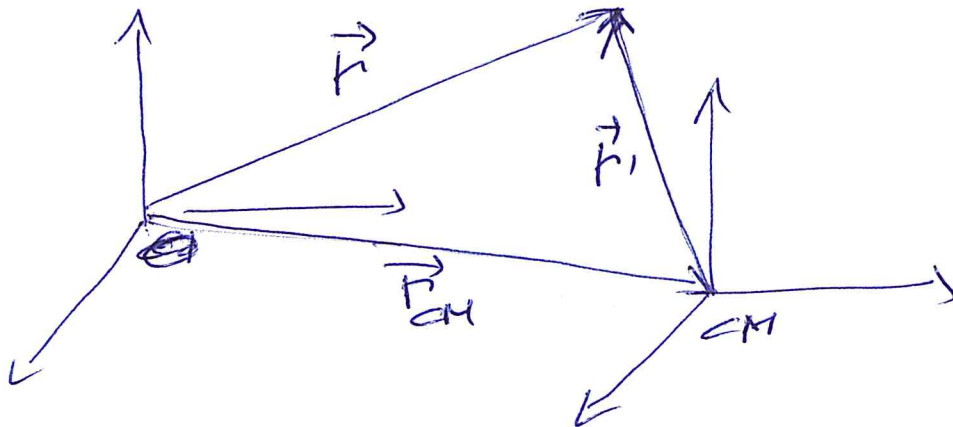
Dove si incontrano?

→ l'incontro
avviene nel CM

- R. Il CM è fermo ($F(c) = 0$). Sotto l'azione
delle forze interne i singoli punti possono
muoversi, ma la loro posizione relativa al
CM ~~non~~ non può variare se si incontrano.

(DI RIFERIMENTO) SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA

- a) origine nel CM
- b) assi fissi (non ruota)
- c) non e' in generale inerziale, poichè $\vec{F}^{(e)}$ può essere diverso da zero



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{CM}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{CM} + \cancel{(\vec{\omega}_{CM} \times \vec{r}')} \quad \text{non c'è rotazione}$$

Il ~~movimento~~ del CM ha $\vec{v}' = 0$ rispetto a se stesso - Quindi $\vec{F}_{CM} = 0 \rightarrow$ La quantità di moto totale del sistema del CM è nulla.

En. cinetica totale nel sist. inerziale e nel CM

$$\begin{aligned} E_K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2 + \cancel{\left(\sum_i m_i \vec{v}_i' \right) \cdot \vec{v}_{CM}} \\ E_K &= E_K' + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \end{aligned}$$

En cin. nel sist. inerziale
= En. rel. relativa al CM +
en. cin. del CM

Lavoro e teor. dell' en. cinetica

TEOR. EN. CINETICA

Per ogni singola particella:

$$\cancel{W_{iA}} = \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 \quad \leftarrow \text{Forma integrale}$$

Sommando su tutte le particelle

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \sum_i \cancel{W_{iAB}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 \\ &= E_K(B) - E_K(A) \end{aligned}$$

$$\cancel{W_{AB}} = \cancel{W_{AB}^{(E)}} + \cancel{W_{AB}^{(Z)}} = \cancel{\Delta E_K} \quad \leftarrow \text{teorema dell'en. cinetica}$$

L'energia cinetica, e la variazione, in generale dipendono dall'osservatore. Ma il teorema è valido indip. dall'osservatore

* Se $\cancel{W}^{(E)} = 0$

[SISTEMA ISOLATO]

$$\Delta E_K = \cancel{W} I$$

$\leftarrow$ indipendente dall'osservatore
inertiale, perché

$$\cancel{W} I = \sum_i \vec{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad \text{per invariante di Galileo}$$

Se le forze sono CONSERVATIVE:

$$W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$$

$$W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p^{(E)} - \Delta E_p^{(I)}$$

→ $E_k + E_p = \text{costante}$: cons. dell'energia meccanica

In presenza di F , non CONSERVATIVE:

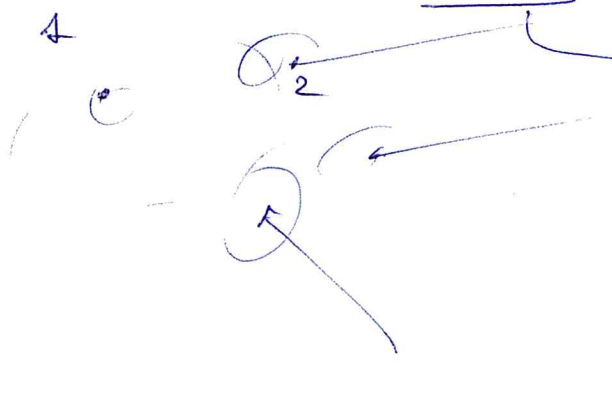
$W_{m.c.} = \Delta E_m$ * ottenuto dalla somma
dell'insieme di più materiali

$$W_{m.c.} = \Delta E_k \neq \Delta E_p$$

NOTA: Per i sistemi particelle (N-particle)

V_{ij} = br. fatta per portare i dalla
posizione z_{ij} ad z_{ij} a p. p. e

$$V^F = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N V_{ij}$$

4

 → non costituiscono due
 bte -
 che c'è dup,
 ma non c'è
 perché

Riepilogazione dei risultati relativi a un sistema di punti -

- 1) Il centro di massa è un punto notevole del sistema $\left[\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{tot}} \right]_{def.}$

la cui posizione relativa agli altri punti materiali è indipendente dall'osservatore:

$$\vec{r}_{cm}'' = \vec{r}_{cm} + \vec{OO}'$$

- 2) Il moto dei punti del cm in un sistema può essere scisso nel moto rispetto al cm, più il moto del cm.

- 3) Il cm si muove sotto l'azione delle forze esterne (l'effetto delle forze interne è nullo) come se tutta la massa fosse concentrata nel cm.

- 4) $\vec{F}(t) = \frac{d\vec{P}}{dt}$ ove $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$ q.tà di moto totale del sistema

Energia cinetica

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

È collegata all'energia ~~totale~~ nel sistema del cm. da

$$E_K = E_K' + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

En. cin. del cm.
+ en. cin. del
mov. relativo al cm.

Lavoro

$$W = W(E) + W(I)$$

$$W(I) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{ij} d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

invariante per transf. di Galileo

Il lavoro delle forze interne non dipende dall'osservatore inerziale

In un sistema con distanze relative fisse (CR) le forze interne non compiono lavoro

Note: Il lavoro delle forze interne non può determinarsi ~~calcolando~~ uno spostamento del centro di massa

Valore il teorema dell'energia cinetica

(3)

$$W_{AB} = \Delta E_k \quad (\text{sommando tutti i termini})$$

Per un sistema isolato $W_{AB} = W_{AB}^{(I)}$

$$W_{AB}^{(I)} = \Delta E_k$$



variazione dell'energia
cinetica indipendente
dall'interazione interna
(perché $W_{AB}^{(I)}$ è indip.)

— Se le forze sono conservative

$$W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)} \quad \text{e} \quad W^{(I)} = -\Delta E_f^{(I)}$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p^{(I)} - \Delta E_f^{(I)}$$

$$\longrightarrow E_k + E_p^{(I)} + E_f^{(I)} = \text{cost.} \equiv E_m$$

In presenza di $f.$ non conservative, l'energia
meccanica si minimizza —

$$\Delta E_k + \Delta E_p = W_{f.c.} + W_{f.\text{non cons.}}$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p + W_{f.\text{non c.}}$$

$$\Delta E_m = W_{f.m.c.}$$

FORZE INTERNE CONSERVATIVE

En. potenziale per l-esima particella -

$$\mathbb{E}_p(i) = \sum_{j \neq i} U_{ij}$$

dove U_{ij} rappresenta il lavoro di $\vec{F}_{ij}$ (la forza interna agente su i dovuta a j) per portare i dalla conf. di riferimento alla

configurazione osservata. Nel ^{calcolo di} questo lavoro j è quella posizione osservata. Dunque per non dover fare altro lavoro per portare j dove si trova (c'è già U^j) -

Quindi

$$U^{\mathbb{F}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} U_{ij}$$

imp