Lezione 11: Oscillatore armonico

(Mazzoldi et al. 9.1 ÷ 9.3, 9.7 ÷ 9.9)

* MOTO ARMONICO SEMPLICE: moto notevole del punto materiale attorno alla posizione di equilibrio stabile per un generico potenziale.

$$E_p(x) \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right|_{x=0}}_{\text{"costante elastica" } k} x^2$$

* Equazione del moto dell'oscillatore armonico semplice (e libero):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

E' equazione lineare e omogenea di secondo grado → soluzione generale: combinazione lineare (sovrapposizione degli effetti) di due soluzioni indipendenti con due costanti di integrazione, il cui valore è determinato dalle condizioni iniziali del moto

* Metodo generale per la soluzione[(*)] poiché la derivata di una funzione esponenziale è ancora una funzione esponenziale, cerchiamo soluzioni del tipo $f(t) = e^{\alpha t}$ con α complesso

---

(*) METODO GEN. PER EQ. DIFF. OMOGENEE E LINEARI

$$f(t) = e^{\alpha t} \Rightarrow f'(t) = \alpha e^{\alpha t} \Rightarrow f''(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}$$

Per ~~l'oscillatore~~ l'equazione dell'O.A.S. si ottiene:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

che è soddisfatta per ogni valore di t se vale la condizione:

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i\omega_0$$

Si hanno dunque le due soluzioni indip.

$$X_1(t) = e^{-i\omega_0 t}$$
$$X_2(t) = e^{i\omega_0 t}$$

La soluzione generale è dunque:

$$x(t) = A_1 e^{-i\omega_0 t} + A_2 e^{i\omega_0 t} \qquad (**)$$

con la condizione che $x(t)$ sia reale poiché rappresenta un'osservabile fisica: la posizione del punto materiale.

Ricorriamo alla formula di Eulero (rappr. dei numeri complessi):

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t$$

e troviamo, sostituendo in $(**)$:

$$x(t) = (A_1 + A_2)\cos\omega_0 t + i(A_2 - A_1)\sin\omega_0 t$$

da cui seguono le condizioni:

$$\begin{cases} Im(A_1 + A_2) = 0 \\ Re(A_2 - A_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = a + ib \\ A_2 = a - ib \end{cases}$$

sostituendo:

$$x(t) = 2a\cos\omega_0 t + 2b\sin\omega_0 t$$

che è equivalente a

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Energia dell'oscillatore:

Abbiamo già visto, nel caso della forza elastica, che

$$E_m = E_k + E_p =$$
$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$
$$= \text{cost}.$$

$E_m = \text{cost}$, E_k e E_p oscillano con periodo $\frac{T}{2}$ (frequenza doppia) dello periodo (frequenza) proprio dell'oscillatore.

È utile valutare il valor medio di E_k e E_p su un periodo (in previsione di fenomeni dissipativi). $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$

$$\langle E_k \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} E_m$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} E_p$$

L'integrazione su un periodo è equivalente all'integrazione di $\cos^2 x$ o $\sin^2 x$ tra 0 e π; poiché la fase è irrilevante se considero un periodo intero.

Vale: $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx + \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \right] \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1}{2}$

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO:

~~Lo~~ L'O.A.S. corrisponde al caso ideale in assenza di attriti. ~~Nel~~ Nel caso più generale l'energia meccanica è dissipata per effetto del ~~for~~ lavoro delle forze di attrito.

$$W_{n.c.} = \Delta E_m$$

Le forze agenti su oscillatori armonici "reali" sono, nella maggior parte dei casi, forze di natura viscosa:

$$\vec{F}_A = -\eta \vec{v}$$

~~Questa forza~~ è collineare al moto, e dunque diretta come la forza elastica e gli spostamenti. L'eq. del moto è ancora monodimensionale:

$$ma = -\eta v - kx$$

Eq. ~~generale~~ DIFFERENZIALE dell'O.A. smorzato:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Avendo posto: $\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \\ \gamma = \dfrac{\eta}{2m} \end{cases}$

Soluzione gen. della forma $f(t) = e^{\alpha t}$
(è ancora eq. diff. lineare e omogenea)

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

Ha soluzione per ogni valore di t, se

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

Da cui:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Si distinguono tre casi, corrispondenti a tre situazioni fisiche differenti:

1. <u>OSCILLATORE SOVRASMORZATO</u>

$\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Si hanno due soluzioni <u>reali</u>:

$$\cancel{\alpha}_{1,2} = -\gamma\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}\right) = \begin{cases} -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \end{cases}$$

~~fraseye~~

* Valgono le seguenti relazioni per γ_1 e γ_2

$$\boxed{\gamma_1 = \gamma\left(1-\sqrt{1-\omega_0^2/\gamma^2}\right) < \gamma\left(1+\sqrt{1-\omega_0^2/\gamma^2}\right) = \gamma_2}$$

In termini dimensionali si ha $[\gamma] = T^{-1}$ e posso introdurre le costanti di tempo

$$\tau_1 = 1/\gamma_1 \quad \text{e} \quad \tau_2 = 1/\gamma_2 \quad \text{con } \boxed{\tau_1 > \tau_2}$$

Per $\gamma^2 \gtrsim \omega_0^2$ $\quad \gamma_1 \lesssim \gamma_2$ $\quad$ e $\tau_1 \gtrsim \tau_2$

Per $\gamma^2 >> \omega_0$ $\quad 0 \simeq \gamma_1 << \gamma_2 \simeq 2\gamma$ $\quad \tau_1 >> \tau_2$

* La soluzione generale è:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t} = \\ &= Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \end{aligned}}$$

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

* non ci sono termini oscillanti
* per ~~[illegible]~~ tempi lunghi il termine e^{-t/τ_1} è dominante (l'altro svanisce prima) e controlla lo smorzamento ($x(t) \to 0$ per $t \to \infty$)
* Lo smorzamento diventa più lento (controllato da τ_1) al crescere di γ.

2. OSCILLATORE CRITICAMENTE SMORZATO

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$$

Si hanno due soluzioni reali degeneri.

La soluzione generale e' del tipo

$$(A + Bt)\, \underbrace{e^{-\gamma t}}$$

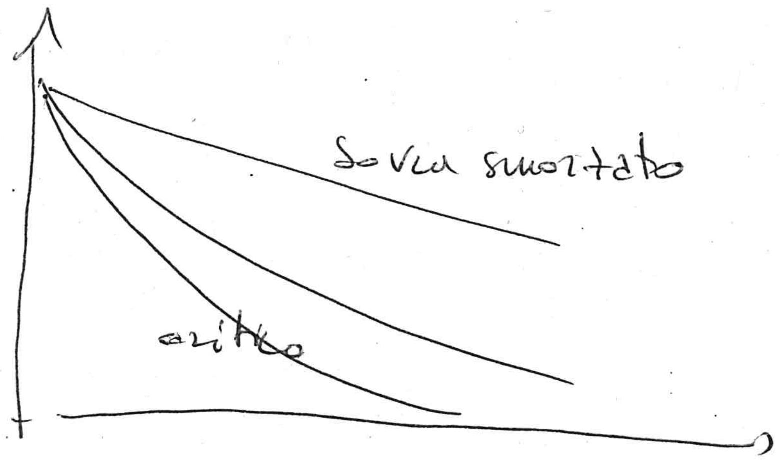
→ termine di smorzamento

[Provare a sostituire per dim. la solut. $te^{-\gamma t}$ è la seconda soluzione indip. dell'omogenea]

Questa condizione corrisponde al caso limite del caso precedente e determina lo smorzamento più rapido dell'oscillatore, con costante di tempo

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \left(= \frac{1}{\omega_0} \right)$$

Se C.I. $x(0) = x_0$:



3. OSCILLATORE SOTTO SMORZATO

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$$

Soluzioni complesse

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega' \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

* Questo è il caso più interessante e rappresenta situazioni come il pendolo o la molla, che abbiamo esaminato nel limite $\gamma = 0$ (senza attriti) –

* Le soluzioni indip:

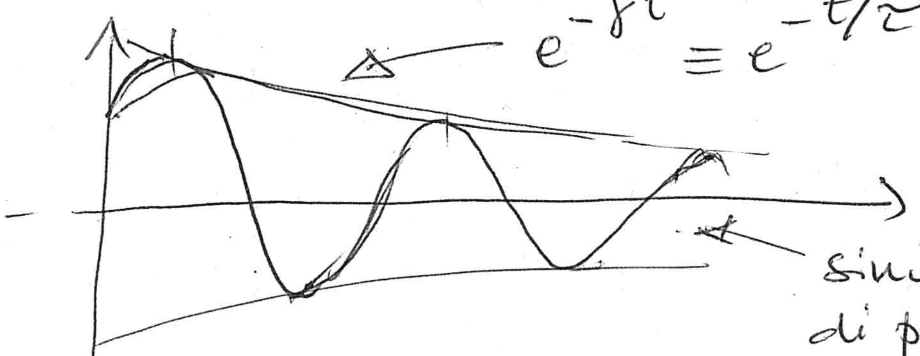
$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \; e^{i\omega' t}$$
$$x_2(t) = e^{-\gamma t} \; e^{-i\omega' t}$$

* La soluzione generale:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A_1 e^{i\omega' t} + A_2 e^{-i\omega' t}\right]$$

formula di Eulero → $$= e^{-\gamma t}\left[a\cos\omega' t + b\sin\omega' t\right]$$

rappresentaz. con ampiezza e fase → $$= A e^{-\gamma/t} \sin(\omega' t + \varphi)$$



$e^{-\gamma t} \equiv e^{-t/\tau}$ SMORZAM.

sinusoide di periodo $\frac{2\pi}{\omega'}$

Energia dell'oscillatore ~~sottosmorzato~~ smorzato

$$\Delta E_m = W_{n.c.}$$ ← deve essere dissipata nell'attrito viscoso

Dim. formale:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} m v \frac{dv}{dt} + k x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = (ma + kx)\, v$$

$$\frac{dE_m}{dt} = (-\eta v)\cdot v = \underbrace{F_A \cdot v}_{\text{Potenza dissipata dall'attrito viscoso!}}$$

OSCILLATORE FORZATO

L'oscillazione libera di un oscillatore armonico reale è SEMPRE SMORZATA attriti. Per rendere l'oscillazione persistente è necessario "forzare" l'oscillazione con una perturbazione periodica esterna:

$$\cancel{F_{ext}}\ F(\cancel{x}t) = F_0 \cos \omega t$$

* F non dipende da x, ma da t
* il periodo della forzante è ω, in generale diverso da ω_0

Utilizziamo il formalismo complesso:

$$F(x) = F_0 e^{i\omega t} = F_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Ma solo la parte reale ha interesse fisico. Poiché l'eq. è lineare se scrivo

$$\boxed{F = F_R + i F_I}$$

e trovo una soluzione complessa

$$\boxed{x = x_R + i x_I}$$

Allora x_R è soluzione per F_R $\Longleftarrow$ In questi termini posso usare il formalismo complesso ma considerare solo la parte reale della soluzione!

× Eq. diff. dell'oscillatore forzato:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \qquad (\text{Eq OF})$$

Avendo imparato le proprietà dell'esponenziale, provo la soluzione

$$x(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

Sostituendo in (Eq. O.F.):

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t + \varphi}\ i2\gamma\omega Ae^{i\omega t + \varphi} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t + \varphi} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\boxed{Ae^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}} \ (***) \quad \text{soluzione } \forall t$$

Soluzione complessa con $\varphi \neq 0$ in generale

→ soluzione ha la le stessa freq. della forzante

→ " fase differente

La soluzione $\boxed{x_R(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$

Dalla relazione (***) l'ampiezza dell'oscillazione e la fase dipendono da ω: $A = A(\omega)$ e $\varphi = \varphi(\omega)$. → Vediamo come

AMPIEZZA E FASE

$$* \quad A(\omega) = |Ae^{i\varphi}| = \frac{F}{m} \frac{1}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}$$

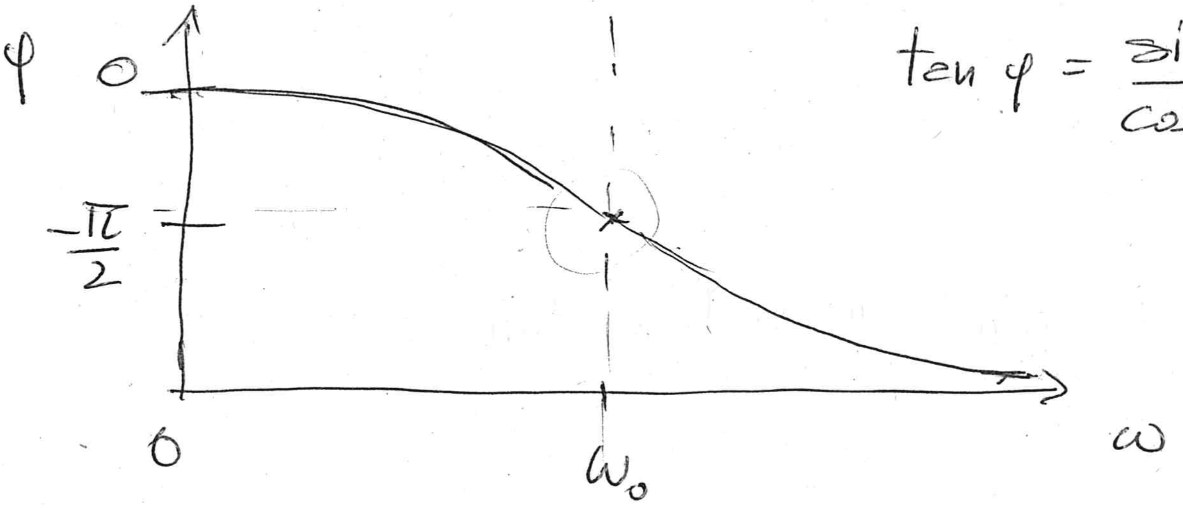
$$* \quad \varphi(\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{\mathrm{Im}\, Ae^{i\varphi}}{\mathrm{Re}\, Ae^{i\varphi}}\right) = \operatorname{atan}\left[\frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]$$

(segno negativo perchè è a denominatore)

Nota: $A(\varphi)$ e $\varphi(\omega)$ non dipendono dalle condizioni iniziali, che riguardano solo il moto libero –

- Una soluzione generale è la somma della soluzione per il moto libero (che fa zero nell'eq.) + la soluzione per il moto forzato
- dopo un tempo lungo ($t \gtrsim 5\tau = 5/\gamma$) il moto libero è smorzato completamente e l'oscillazione è solo quella del moto forzato
- che avviene a freq. $\omega \neq \omega_0$ con ampiezza e fase dip. da ω

Andamento dell'ampiezza e fase al variare di ω



$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$\omega = 0 \qquad \tan\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\omega = \omega_0 \qquad \tan\varphi = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\infty$ per $\omega < \omega_0$

$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\omega = \infty \qquad \tan\varphi \approx \frac{1}{\omega} \rightarrow 0^+ \qquad \varphi = -\pi$

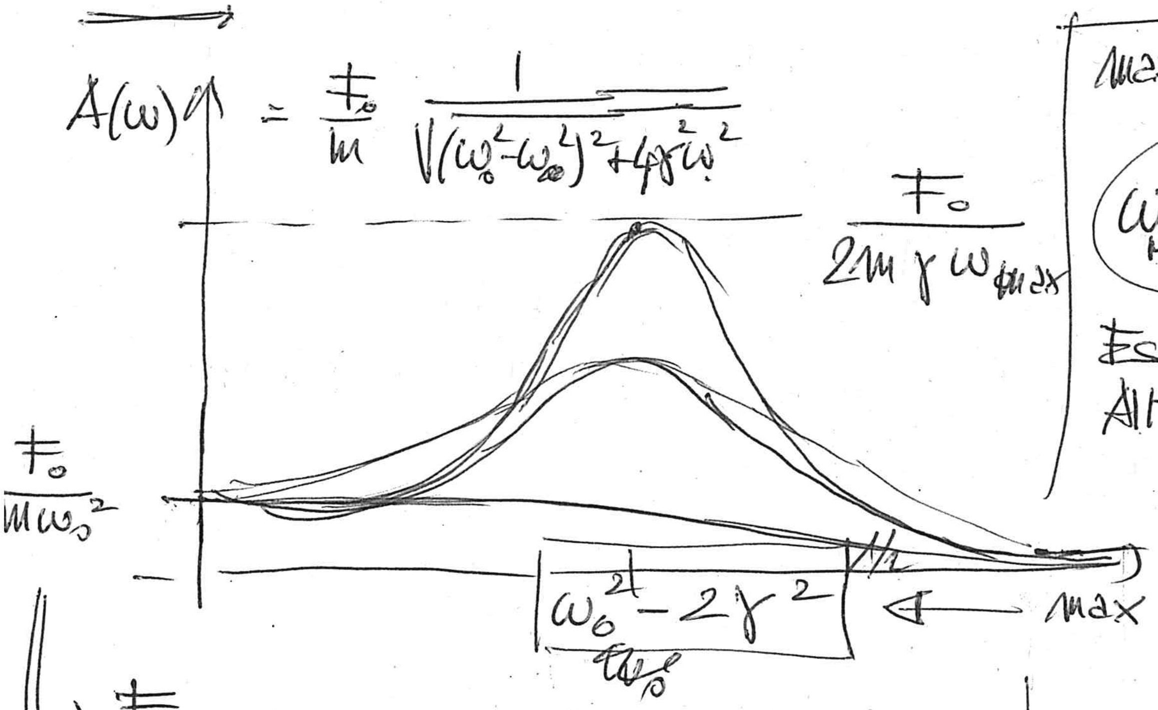
Imp

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

max $\frac{dA}{d\omega} = 0$

$\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0$

Esiste se $\omega_0^2 > 2\gamma^2$
Altrimenti monotona



$\frac{F_0}{K}$ = ALLUNGAM. DELLA MOLLA PARI A F_0 / COST. ELASTICA

P

POTENZA MEDIA FORNITA DALLA FORZANTE

La "forzante" occorre per sostenere (rendere persistente) l'oscillazione. Dunque la potenza fornita dalla forzante eguaglia in media la potenza dissipata dagli attriti viscosi —

$$P_A = F_A \cdot v = -\eta v^2 = -2\gamma m v^2$$

Per $F = F_0 \cos \omega t$, abbiamo la soluzione:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{con } A = A(\omega); \varphi = \varphi(\omega)$$
$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

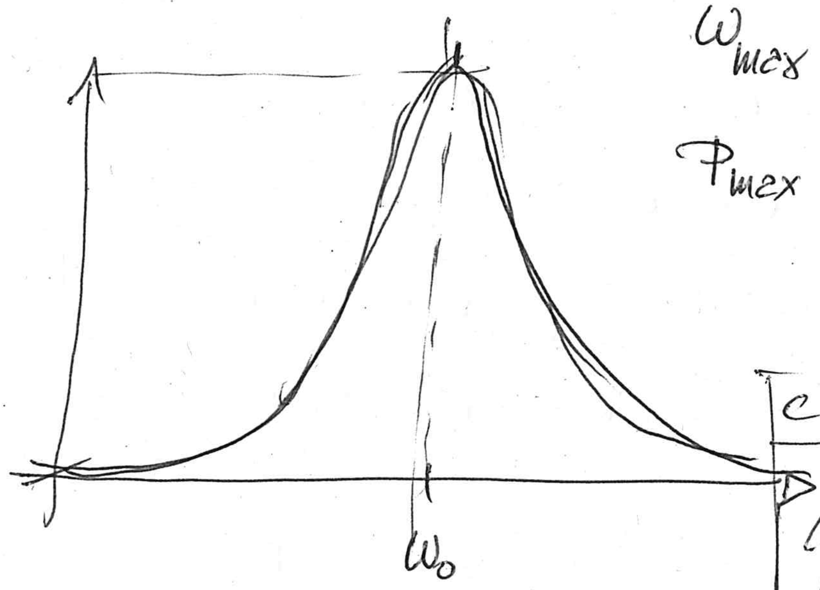
Per la potenza si ottiene:

$$P_A = 2m\gamma\omega^2 A^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

e per la potenza media

$$\langle P_A \rangle_T = m\gamma\omega^2 A^2$$
$$= m\gamma \frac{F_0^2}{m^2} \frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}$$

Potenza media :



$$\omega_{max} = \omega_0$$

$$P_{max} = \frac{F_0^2}{4m\gamma} \propto \frac{1}{\gamma}$$

CURVA DI RISONANZA

max trasferimento di energia al sistema per $\omega = \omega_0$, cioè forzante con stesso periodo del periodo proprio dell'oscillatore armonico

$$\langle P(0)\rangle_T = 0$$

$$\langle P(\infty)\rangle_T \to 0$$

$\frac{dP}{d\omega} = 0$ determina il max.

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\gamma F_0^2}{m}\,\frac{\omega^2}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]}\right) =$$

$$= \frac{\gamma F^2}{m[\quad]^2}\cdot\left(\underbrace{2\omega(\omega_0^2-\omega^2)^2}\cancel{+8\gamma^2\omega^3}+\underbrace{4\omega^3(\omega_0^2-\omega^2)}\cancel{-8\gamma^2\omega}\right)$$

entrambi nulli per $\omega = \omega_0$

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{2\gamma\omega_0} = \underbrace{\left[\frac{F}{m\omega_0^2}\right]}_{\text{Ampiezza per } \omega=0}\cdot\frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Si definisce ~~ampiezza~~ larghezza della risonanza la quantità $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ con

$$\langle P(\omega_{1,2}) \rangle = \frac{1}{2} \langle P(\omega_0) \rangle$$

Si dimostra che $\Delta\omega = 2\gamma$ —

Ampiezza $\div 1/\gamma$
Larghezza $\div \gamma$

$\rightarrow \gamma$ controlla la "qualità" dell'oscillatore e la sua capacità di essere <u>selettivo in freq.</u>

$\Longrightarrow$ NOTA: È un caso fisico generale $F(t)$ sinusoidale ?

× Eq. lineare vale sovrapp. effetti

× Per una generica funzione periodica con freq. ang ω

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\underbrace{\underline{n}\,\omega t}_{\text{Armoniche}} + \phi_n) + a_0$$

× ~~Si~~ può estendere il teorema al caso continuo

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))\, d\omega$$

$\longrightarrow$ ESEMPIO ORECCHIO ANALIZZ. FREQ.