

Lezione 10

(1)

Le forze CONSERVATIVE AMMETTONO Potenziale

$U = U(\vec{r})$ funzione del posto, la cui espressione esplicita dipende dalla natura delle forze ed è calcolata tramite

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(A) - U(B) \quad (1)$$

L'energia potenziale è una funzione scalare del posto definita tramite la (1) come $E_p(\vec{r}) = -U(\vec{r})$

In modo reciproco, la forza è univocamente determinata dalla forma del potenziale ϕ , che è lo stesso, dell'energia potenziale.

Consideriamo, per iniziare, il caso monodimensionale

$$F = F_x \quad F_y \text{ e } F_z \text{ nulle}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow dW = F_x dx = -dE_p \quad (2)$$

$$\text{Dalla (2) si ricava} \quad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

La forza (monodimensionale) è determinata dalla derivata della funzione scalare E_p (monodim.) che deve dunque essere derivabile

Abbiamo visto i seguenti esempi:

$$E_p = m g z + \text{cost} \quad \text{En. pot. peso}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \text{cost} \quad \text{En. pot. forza elastica}$$

Da cui espressione della forza:

$$F_z = - \frac{dE_p}{dz} = -mg \quad \text{Peso}$$

$$F = - \frac{dE_p}{dx} = -kx \quad \text{Forza elastica}$$

Nel caso generale tridimensionale $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$
e $E_p = E_p(x, y, z)$ è una funzione scalare di
tre coordinate. La relazione per il lavoro
(infinitesimo) è più complicata e in coord.
cartesiane:

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

per

Vedrete ad Analisi II che c. n. s. affinché la
forza sia conservativa è che $F_x dx + F_y dy + F_z dz$
sia un differenziale esatto e che valga

$$\oint F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \quad \text{con.}$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad , \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad , \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad (2)$$

ove i simboli esprimono la derivata parziale rispetto ad una variabile.

Significato: consideriamo una funzione scalare $f = f(x, y, z)$ e definiamo la funzione

$$g_{y,z}(x) = f(x, y=y_0, z=z_0)$$

con y_0 e z_0 punti fissi.

Si tratta di una famiglia di funzioni di una sola variabile x , con una dipendenza parametrica da y_0 e z_0 . Se queste funzioni sono continue e derivabili posso definire:

$$g'_{y,z}(x) = \frac{dg_{y,z}}{dx} \quad \text{derivata per } y, z \text{ fissi a } y_0 \text{ e } z_0$$

Se la funzione è derivabile per ogni valore di y_0, z_0 , posso costruire una funzione di tre variabili

$$h(x, y, z) = g'_{y,z}(x) \equiv \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial f}{\partial x}} \right\} \text{DERIVATA PARZIALE}$$

DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x , in ogni punto dello spazio (x, y, z)

Il ragionamento si estende in modo analogo a tutte le coordinate, e a derivate di ordine superiore. Si possono definire derivate seconde e derivate miste:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dots$$

Ad Analisi II si dimostra che la condizione di irrotazione nulla è equivalente a

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} ; \dots$$

Che, per la proprietà dell'energia pot e della F , si significa

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} ; \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} ; \dots$$

cioè l'ordine di derivazione non è rilevante la funzione è un potenziale e la forza definita da

$$\vec{F} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \hat{k} \right) \quad (4)$$

è conservativa

(3)

La relazione (4) può essere scritta in forma compatta introducendo l'operatore vettoriale gradiente di una funzione:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

con questa definizione per una forza conservativa ~~si può scrivere~~ che ammette il potenziale E_p si può scrivere:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla} E_p(x, y, z) \quad (5)$$

Viceversa, se $\vec{F}$ può essere scritta nella forma (5) allora è conservativa e il lavoro delle f , è calcolabile dalla variazione (cambiata di segno di E_p):

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz = \\ &\quad \text{differenziale esatto} \\ &= \int_A^B \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = \\ &= - \int_A^B dE_p = E_p(A) - E_p(B) \end{aligned}$$

Nel caso tridimensionale (o generale) $E_p(x, y, z)$ è una funzione dello spazio - Le regioni di spazio individuate dall'eq.

$$E_p(x, y, z) = \text{cost}$$

Sono dette superf. equipotenziali -

Lungo una superficie equipotenziale il lavoro è nullo :

$$\cancel{W}_{AB} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{E_p(x,y,z)=\text{cost}} = -\Delta E_p = 0$$

Qs. relazione è vera anche nel limite infinitesimo

$$\left(\vec{F} \cdot d\vec{s} \right)_{E_p=\text{cost}} = -dE_p = 0$$

Donque ~~anzi~~ la forza è ortogonale alla superficie equipotenziale in ogni punto - Cioè il $\vec{\nabla} E_p$ (gradiente di E_p) è ortogonale alle superfici equipotenziale e indica la direzione lungo cui varia E_p (come la derivata)

[$\Rightarrow$ È possibile ridurre al caso monodimensionale localmente, se utile]

Esempio di potenziale bidimensionale.

(4)

$$\mathbb{E}_p = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$$

Si ricavi l'espressione delle forze:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathbb{E}_p$$

$$= -\frac{\partial \mathbb{E}_p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \mathbb{E}_p}{\partial y} \hat{j}$$

$$= -k(x \hat{i} + y \hat{j}) =$$

$$= -k \vec{r}$$

(con $\vec{r}$ definito nel piano)

La forza è diretta verso un punto (centro della forza) ed ha verso discorde alla distanza dal punto e intensità proporzionale alla distanza:

$$|\vec{F}| = k \sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

Qs forza rappresenta una forza elastica bidimensionale, nel piano ed è

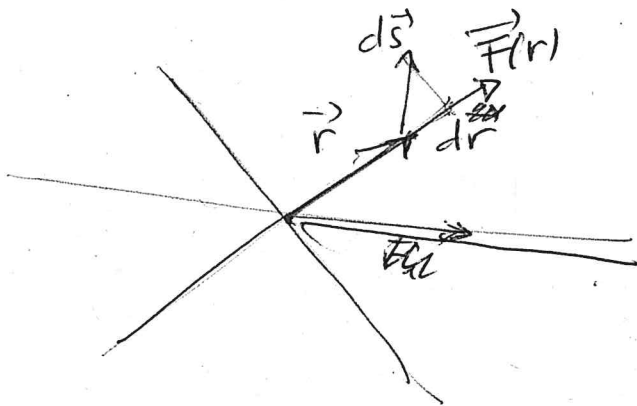
un esempio di FORZA CENTRALE

(come lo è anche la forza elastica monodimensionale)

FORZE CENTRALI Sono dette le forze che, in una regione di spazio, hanno direzione sempre rivolta ad un punto fisso detto CENTRO DELLA FORZA e ~~il cui~~ modulo funzione solamente della distanza (r) dal punto fisso

~~Le forze centrali sono CONSERVATIVE~~
~~(proprietà notevole!)~~

Rappresentazione:



$$\vec{F} = F(r) \hat{u}_r$$

PROPRIETÀ NOTEVOLTE:

Le forze centrali sono conservative

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) \underbrace{\hat{u}_r \cdot d\vec{s}}_{\substack{\text{proiezione di } d\vec{s} \text{ su } \hat{u}_r \\ = dr}} =$$

$$= \int_A^B F(r) dr$$

funzione solo di r

$$= f(r_A) - f(r_B)$$

$\Leftarrow$ Ammette potenziale

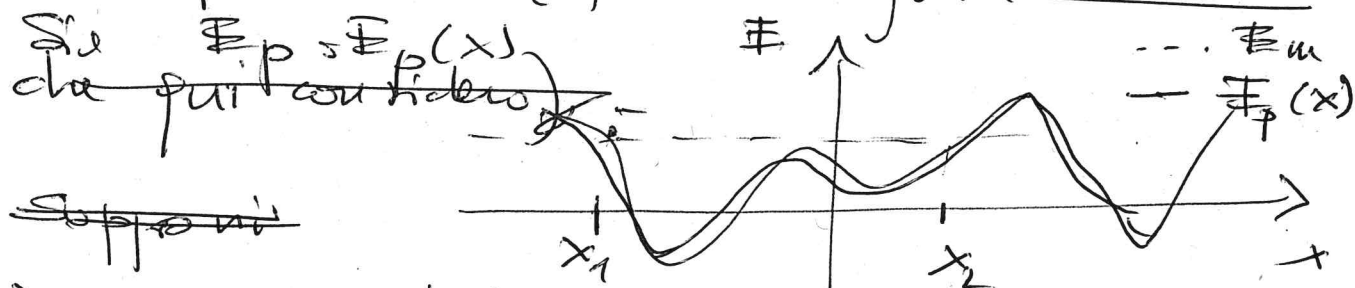
(5)

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO PER IL PTO
MATERIALE E MOTO ATTORNO AI PUNTI

DI EQUILIBRIO ($\Leftarrow$ Applicazione notevoli di F_p)

Sappiamo che le forze agenti sul punto sono conservative e quest'ultimo dunque potenziale. Per semplificare le discussioni, consideriamo una forza monodimensionale. Prendiamo ad es., nell'intorno di un punto, il caso generale al caso monodimensionale identificando la direzione della forza con la direzione del gradiente

del potenziale (~~per una forza conservativa~~)



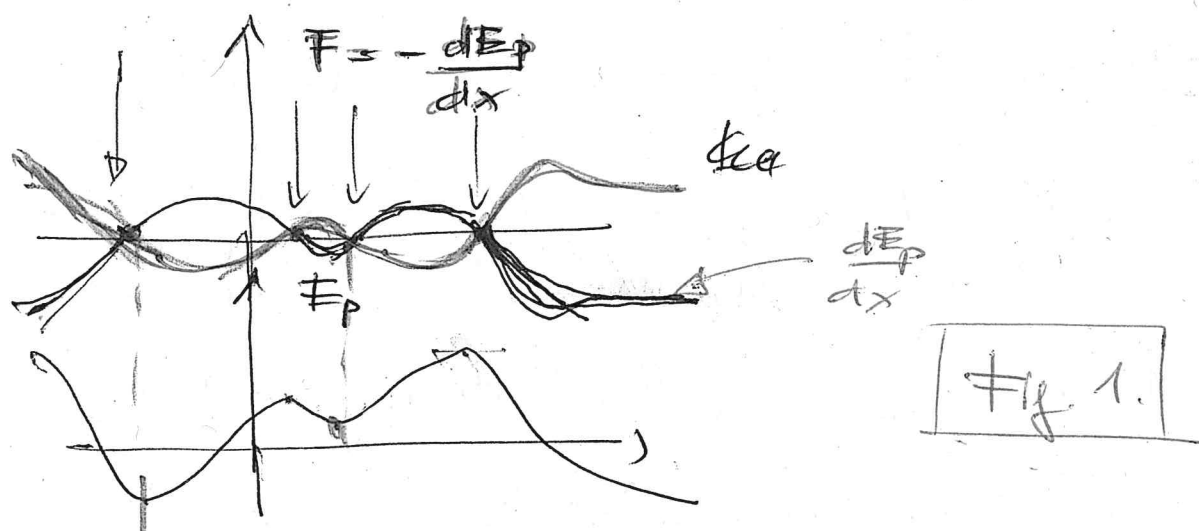
~~Dalle proprietà di~~

$$E_m = E_k + F_p(x) = \text{cost}$$

Per una $E_k > 0$ e $E_m = \text{cost}$ costante ~~in~~ ^{totale} ~~con~~ ⁱⁿ ~~relazione~~ ^{figura}, il moto è confinato alle regioni con $F_p(x) \leq E_m$, ad es. x_1 e x_2

* Le condizioni di equilibrio per il pto materiale sono def. dalla condizione $F=0$ e cioè $-\frac{dF_p}{dx} = 0 \quad \Leftarrow$ Punti di derivata nulla

Posiamo costruire graficamente il grafico della forza:



Le condizioni di equilibrio corrispondono
a pts di minimo e di massimo del potenziale

Attorno ai minimi:

$$F(x_m - \Delta x) > 0$$

$$F(x_m + \Delta x) < 0$$

ai massimi:

$$F(x_m - \Delta x) < 0$$

$$F(x_m + \Delta x) > 0$$

la forza è discorde
allo spostamento dal
punto di equilibrio
statico $\Rightarrow$ esercita

una forza di richiamo

(in altri termini determina
un'accelerazione con
verso opposto a Δx)

la forza è concorde
allo spostamento
dal punto di
equilibrio statico

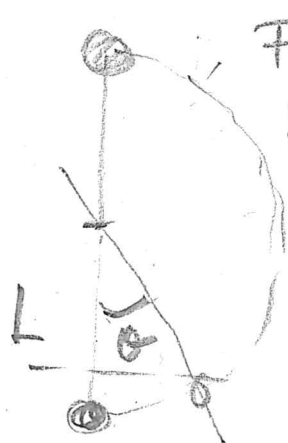
$\Rightarrow$ esercita una

forza che allontana
il punto ulteriormente
dalla posizione di
equilibrio

(6)

I minimi di $\mathbb{F}_p$ sono posizioni di equilibrio stabile, mentre i massimi di $\mathbb{F}_p$ corrispondono a condizioni di equilibrio instabile.

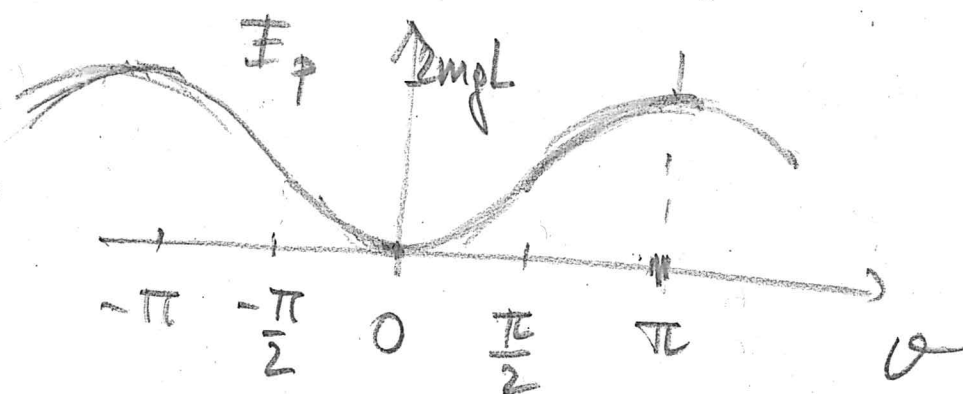
Es.



Pendolo ~~ripida~~ con asta
ripida (di massa trascurabile)

$$\mathbb{F}_p = mgh$$

$$= mgL(1 - \cos\theta)$$



$\theta = \pm\pi$ (e perobici) corrispondono a
punti di equilibrio instabile

$\theta = 0 \pm 2k\pi$ corrispondono a
condizioni di equilibrio
stabile

Analisi dinamica del moto attorno al punto di eq. stabile (minimi di E_p)

- Sfruttiamo una proprietà delle funzioni continue e derivabili a tutti gli ordini (cioè per le quali è definita la derivata $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$ per ogni n) nell'intorno di un punto x_0 .
- È possibile rappresentare la funzione nell'intorno del punto tramite lo sviluppo in serie (detto di Taylor):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \\ &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) \\ &\quad + \dots \text{ordini superiori} \end{aligned}$$

Vedrete la dimostrazione ad Analisi I
(~~sapete che ogni funzione è approssimabile~~)

(7)

Perché lo sviluppo è intero nell'intorno di
un punto (per noi nell'intorno del ^{primo} minimo locale
di $\mathbb{E}_p$), $(x-x_0) \ll 1$ e al limite
infinitesimo. Inoltre, per ogni valore di n

$$(x-x_0)^{n+1} < (x-x_0)^n \quad [\text{poiché } |x-x_0| < 1]$$

In altri termini, ogni termine della serie è
un infinitesimo di ordine superiore al
termine precedente. Si può dunque approssi-
mare convenientemente la funzione troncando lo ~~sviluppo~~^{sviluppo}
al primo termine non nullo della serie.

Nell'intorno di un minimo:

$$\mathbb{E}(x_0) = 0 \quad - \frac{d\mathbb{E}_p}{dx}(x_0) = 0$$

e possiamo scrivere

$$\mathbb{E}_p(x) = \mathbb{E}_p(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbb{E}_p}{dx^2}(x_0) (x-x_0)^2$$

Possiamo ridefinire l'energia potenziale in modo
che $\mathbb{E}_p(x_0) = 0$, poiché il potenziale è
definito a meno di una costante arbitraria

normalmente si definisce il minimo di energia potenziale come zero

Inoltre possiamo scegliere $x' = x - x_0$

come variabile rispetto a cui calcolare le posizioni (lo spostamento del punto di equilibrio scelto come origine) -

Infine notiamo (vedi Fig. 1) in un minimo

$\frac{dE_p}{dx}$ è crescente, e dunque la sua derivata

$\frac{d^2 E_p}{dx^2}$ è positiva. : $\boxed{\frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0}$

Ponendo $\frac{d^2 E_p}{dx^2} \equiv k > 0$ otteniamo

che l'energia potenziale ~~tra~~ nell'intorno di un punto di equilibrio stabile ha la forma generale:

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$F(x) = -kx \quad \leftarrow$$

che è la forma di energia potenziale di una forza elastica

Il moto di un punto MAT. per piccoli spostamenti da un punto di equilibrio è un MOTO ARMONICO

SEMPLICE $\Rightarrow$ Imp. dell'oscillatore armonico

Soluzione generale dell' O.A.S.

8

Eq. diff. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x^2 = 0$

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x^2 = 0 \right] \quad \text{con} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Per le soluzioni generali di un eq. diff. dovete aspettare Analisi II, ma potremo risolverla sapendo che abbiamo già visto una soluzione particolare in cinematica - $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ - dove A e φ sono costanti di integrazione che dipendono dalle condizioni iniziali.

Note:

- ① - LA SOLUZIONE GENERALE RICHIEDE DOPPIA INTEGRAZIONE $\rightarrow$ ~~due~~ due costanti di integrazione definibili da:

$$\frac{dx}{dt}(t=t_0) = v_0 ; \quad x(t=t_0) = x_0$$

(appure, come abbiamo visto nelle lezioni scorsa forniamo due delle condizioni all'energia meccanica e cinetica)

② L'equazione è omogenea ($= 0$)
e lineare (comparsa somme di derivate
che sono un operatore lineare, cioè tale che
la derivata di una somma è la somma
delle derivate) -

Conseguenza di q.s. proprietà è che se
 $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due soluzioni
indipendenti allora la comb. lineare

$f(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ è ancora una
soluzione dell'equazione differenziale

È facile dim. q.s. proprietà: poiché $x_1(t)$
e $x_2(t)$ sono soluzioni:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 = 0$$

D'altronde, per la linearità delle derivate,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (a_1 x_1 + a_2 x_2) + \omega_0^2 (a_1 x_1 + a_2 x_2) &= \\ a_1 \left[\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 \right] + a_2 \left[\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione gen. può dunque essere costruita come somma lineare di tutte le funzioni indipendenti che sono soluzioni dell'eq. —

Conosciamo $x_1(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ —

Analogamente è soluzione

$$x_2(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi')$$

~~Abbiamo~~ notato però che l'integrazione permette solo 2 costanti arbitrarie, quindi A, B, φ e φ' devono essere legate da una ^{qualche} relazione.

Usiamo le proprietà di trigonometria:

$$\begin{aligned} A \sin(\omega_0 t + \varphi) &= A \cos \varphi \sin \omega_0 t + A \sin \varphi \cos \omega_0 t \\ &= a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

Quindi $A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ è già una soluzione generale che può essere scritta come somma di seno e coseno, identificando:

$$\begin{cases} A^2 = a^2 + b^2 \\ \tan \varphi = b/a \end{cases}$$

En. dell'oscillatore (gli' dato per la molla) -
~~nel c~~

$$E_m = E_k + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} k x^2(t)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2} k A^2 [\sin(\omega_0 t + \varphi)]^2$$

$$k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

E_m è conservata, ok

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi)] dt = \frac{1}{2} E_m$$

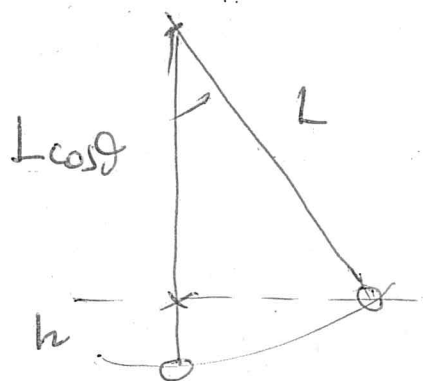
Possiamo porre una condizione iniziale su E_m o E_k
 per fissare A , e su E_k o E_p per fissare φ -

ps. discende da $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

LASCIA PERDERE SE LO STAREMO AD ANALISI I

(10)

Riprendiamo l'esempio del pendolo - attorno a un minimo.



$$\mathbb{E}_p(h) = mgh$$

$$\mathbb{E}_p(\theta) = mgL(1 - \cos\theta)$$

Sviluppo di Taylor nell'intorno del punto di equilibrio stabile $\theta=0$

$$\mathbb{E}_p(\theta) = \mathbb{E}_p(0) + \mathbb{E}_p'(0)\theta + \frac{1}{2}\mathbb{E}_p''(0)\theta^2 + \dots$$

$$\mathbb{E}_p(0) = 0$$

$$\frac{d\mathbb{E}_p}{d\theta}(0) = mgL \sin\theta \Big|_{\theta=0} = 0$$

$$\frac{d^2\mathbb{E}_p}{d\theta^2}(0) = mgL \cos\theta \Big|_{\theta=0} = mgL$$

$$\mathbb{E}_p(\theta) \simeq \frac{1}{2} mgL \theta^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{g}{L}\right) (L\theta)^2$$

$$\mathbb{E}_K = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2$$

con $L\theta = x$ variabile di posizione lungo la traiettoria

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

La soluzione è quella di un oscillatore armonico
ma per individuare il periodo devo conoscere

che $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Nel caso del pendolo :

$$E_p(\theta) = \frac{1}{2} m \left(\frac{g}{L} \right) (L\theta)^2$$

$$\equiv \frac{1}{2} k (L\theta)^2 \quad \text{con } k = m \left(\frac{g}{L} \right)$$

da cui $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Soluzione :

$$x(t) \equiv L\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$[A] = L$$

$$\theta(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$[a] = 1$$

In termini di energia meccanica totale:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] \end{aligned}$$