Lezione 9

① DEF. LAVORO

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $\qquad W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_i dW_i$

② EN. CINETICA $\quad E_K = \frac{1}{2} m v^2$ pto materiale

③ TEOR $\quad W_{AB} = \Delta E_K$

④ LAVORO EROGATO $\quad \Delta E_K < 0 \quad W_{AB} < 0$
$\rightarrow$ lavoro su un altro sist.

⑤ POTENZA MEDIA $\quad \frac{\Delta W}{\Delta t} \rightarrow$ ISTANT $\quad \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

⑥ UNITA' DI MISURA

⑦ ESEMPI – PESO, ELAST $\rightarrow$ indip dalla traie
F posizionali
$\Rightarrow W_{AB}$ chiuso $= 0$

– ATTRITO (Anche viscoso) – F dip STATO DI MOTO (direz. e verso di F)
$W_{AB} < 0$ su linea chiusa
$\Delta E_K < 0$

⑧ IN GENERALE!

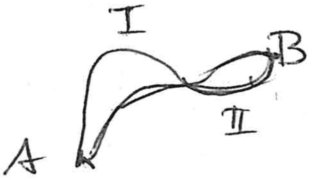
a) F è DETTA CONSERVATIVA SE W_{AB} INDIP DALLA TRAIETTORIA

b) EQUIV. SE $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \Longleftrightarrow$ CONS.

c) SE F CONSERVATIVA AMMETTE EN. POTENZIALE

~~[illegible]~~

(9) SIA W_{AB} INDIP TRAIE $\forall$ PUNTO B



$$W_{ABA} = \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_{I} + \int_B^A (\vec{F}\cdot d\vec{s})_{II}$$

Scelta arbitrariamente

— A e B scelti arbitrariamente.

— Traiett. scelta arbitrariamente.

$$= \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_{I} - \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_{II} = 0$$

qs. identità vale per $\vec{F}$ indip. dallo stato di moto, ~~[illegible]~~ $\vec{F}$ non cambia segno cambiando il percorso (o il senso di integrazione) ma $d\vec{s} \to -d\vec{s}$ in ogni punto

Quindi se ~~vale~~ 8a) $\Longleftrightarrow$ 8b) ~~in modo~~ con la dim. inversa in modo analogo

(10) Se W_{AB} indip. da percorso posso definire funzione SCALARE t.c.

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = U(A) - U(B)$$

(11) LA FUNZIONE CHE ~~...~~ INTRODUCO E' OMOGENEA AL LAVORO $\Longrightarrow$ E' UN'ENERGIA

(12) E' DEF. OPERATIVAM (<u>MISURATA</u>) TRAMITE IL LAVORO TRA DUE PUNTI

(13) MA VOGLIO UNA FUNZIONE <u>DEL PUNTO</u>

→ scelgo un riferimento (arbitrario) O

→ definisco per il punto P (qualunque) la funzione scalare:

$$U(P) = W_{PO} + U(O) \iff W_{PO} = U(P) - U(O)$$

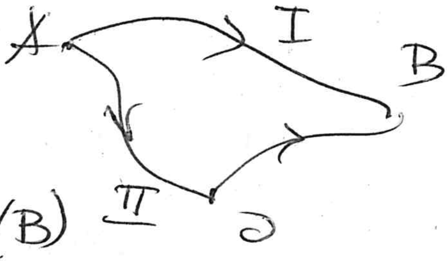
$$U(P) = \int_P^O \vec{F}\cdot d\vec{s} + U(O)$$

$$U(P) = -\int_O^P \vec{F}\cdot d\vec{s} + U(O)$$

→ lavoro contro la forza conservativa per andare in P dal punto di rif.

(14) Dalla definizione:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= W_{AO} + W_{OB} \\ &= W_{AO} - W_{BO} \\ &= U(A) - \cancel{U(O)} \cancel{+U(O)} - U(B) \end{aligned}$$



* W_{AB} dip. solo da A e B, è indip. dalla scelta del riferimento
* La funzione SCALARE detta ENERGIA POTENZIALE è definita a meno di una cost. arbitraria

(15) $E_p \equiv U$ identifico En. pot. con la funzione

$$\Rightarrow \boxed{W_{AB} = -\Delta E_p = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)} \quad (\text{cons}$$

1) LA RELAZIONE TROVATA NON HA CARATTERE GENERALE COME $W_{AB} = \Delta E_K$, MA VALE <u>SOLO</u> PER FORZE CONSERV.

2) L'ESPRESSIONE DI $E_p(\vec{r})$ DIPENDE DALLA FORZA CONSERV. PARTICOLARE A CUI CI SI RIFERISCE (MENTRE E_K HA ESPRESSIONE DI VALIDITÀ GENERALE)

3) D'ALTRONDE, IN CASO DI F CONS., LA RELAZIONE PERMETTE IL CALCOLO ESPLICITO DI E_p E NE PRECISA IL SIGNIFICATO LEGANDOLO ALLA <u>CAPACITÀ DI EROGARE LAVORO</u>

a) × SE DURANTE IL MOTO $\Delta E_p < 0$

$\Rightarrow W_{AB} > 0$ Lavoro erogato a scapito dell'en. potenziale

b) × SE $\Delta E_p > 0$

$\Rightarrow W_{AB} < 0$ occorre compiere lavoro per far avvenire il processo

c) × <u>SE</u> LINEA CHIUSA $\Delta E_p = 0$ $W_{AB} = 0$ LAVORO NETTO

16 Linea chiusa F conservativa:

$W_{AB} = 0$ $\Delta E_K = 0$ $\underline{E_K \text{ conservata}}$

F non conservativa

$W_{AB} < 0$ $\Delta E_K < 0$

F dissipative (attriti)

17 Nota! ANCHE E_K è def. a meno di una cost arbitraria: è d'altronde naturale porre $E_K = 0$, per $v = 0$ fissato il sist. di rif. (in un altro sistema $v = 0 \Rightarrow v' \neq 0$)

18 Commento su $W_{AB} = -\Delta E_p$ qs relazione è il lavoro delle forze conservative

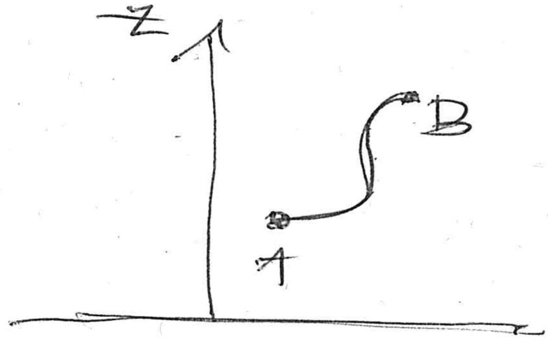
~~Se il la~~

Per il lavoro contro le forze cons.

$$L_{AB}(\text{contro } F \text{ cons.}) = \Delta E_p$$

Si deve compiere lavoro CONTRO le forze conservative per aumentare l'en. potenziale

(17) ES LAVORO F PESO e ESPRESSIONE DELL'EN. POTENZIALE



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} =$$

$$= -mg \int_A^B \hat{u}_z \cdot d\vec{s} =$$

$$= -mg(z_B - z_A) = -\Delta E_p$$

$$\boxed{E_p(z) = mgz + cost}$$

scelgo cost = 0 per z=0 o (o per il riferim. del problema cinem.)

* Se il punto SCENDE (CADE "LIBERO")

$z_A > z_B \Longrightarrow \Delta E_p < 0$ PERDE EN. POT.

$W_{AB} > 0$ EROGA LAVORO

* Se il punto SALE (VIENE FATTO SALIRE)

$z_A < z_B \Longrightarrow \Delta E_p > 0$ GUADAGNA EN. POT.

$W_{AB} < 0$ ASSORBE LAVORO

(18) EN. POT. DELLA FORZA ELASTICA

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B k x \hat{u}_x \cdot d\vec{s}$$

$$= -\int_A^B k x \, dx = -\frac{1}{2} k \left(x_B^2 - x_A^2 \right)$$

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 + cost}$$

cost = 0 per $x = 0$ CENTRO DELLA FORZA

- Per spostarsi dalla condizione di riposo
  allontanarsi

* $\Delta E_p > 0 \implies W_{AB} < 0$ FORNIRE LAV

- Per tornare alla condiz. di riposo

$\Delta E_p < 0 \implies W_{AB} > 0$ EROGA LAV.

(19) CONS. ENERGIA MECCANICA

- Si DEF. $E_M = E_K + E_p$
- Se Agiscono solo forze conservative

$$\Delta E_K = W_{AB} = -\Delta E_p$$

$$E_K(B) - E_K(A) = E_p(A) - E_p(B)$$

$$(\ast\ast\ast) \quad E_K(B) + E_p(B) = E_K(A) + E_K(B)$$

$$E_M = \text{costante} \quad (A \text{ e } B \text{ arbitrari})$$

Per forze cons. l'en. meccanica è conservata

Principio di cons. dell'en. meccanica

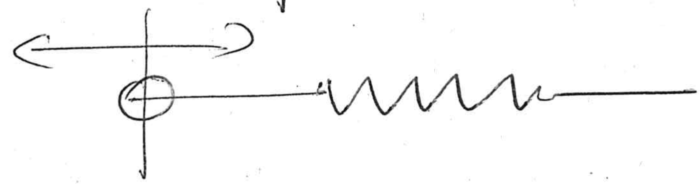
(20) Abbiamo visto esempi in cui ΔE_K o ΔE_p cambiano - La relazione $(\ast\ast\ast)$ dice che durante il moto E_K e E_p si trasformano l'una nell'altra.

- Riprendiamo il caso del saltatore con l'asta:

$$E_K(0) + E_p(0) = E_K(h) + E_p(h)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$$

(21) Moto armonico semplice



$F = -kx$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Longrightarrow \text{m.a.s.}$$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

A = max ampiezza (elongazione della molla)

$$E_m = E_k + E_p =$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

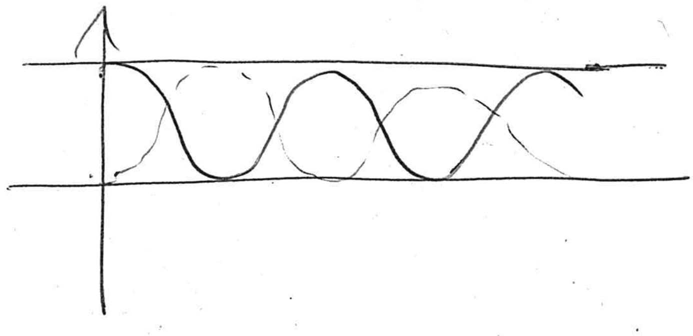
$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{k}{m}\right) A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \underbrace{\left[\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right]}_{1}$$

E_m = cost

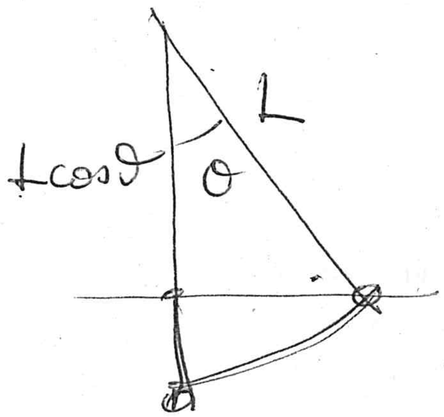
$E_k \propto \cos^2$

$E_p \quad \sin^2$



CONTINUO SCAMBIO E CIN ↔ POT

(22) Pendolo



$$E_m = mgL(1-\cos\vartheta_{max})$$

$$E_p = mgL(1-\cos\vartheta)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gL(1-\cos\vartheta) = \cancel{m}gL(1-\cos\vartheta_0)$$

$$v = \sqrt{2gL(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}$$

velocita' durante il moto —

(23) CASO DI FORZE N.C.

$$W = W_{p.c.} + W_{N.C.} = \Delta E_k$$ teor. en. cinetica

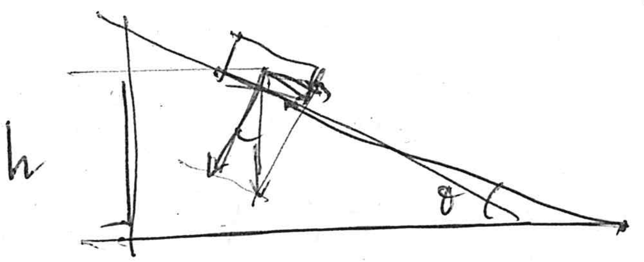
$$-\Delta E_p + W_{NC} = \Delta E_K$$

$$W_{NC} = \Delta(E_k + E_p)$$

$$W_{NC} = \Delta E_m \quad (<0)$$ oss. sperimen.

il lavoro delle forze non cons. e' uguale alla variazione dell' energia meccanica

(23) Esempio : PIANO INCLINATO



$v_i = 0$

$$W_{nc} = \frac{1}{2} m v_f^2 - mgh$$

$$-\mu N \Delta s = \frac{1}{2} m v_f^2 - mgh$$

$$-\mu \cancel{m} g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{2} \cancel{m} v_f^2 - \cancel{m} gh$$

$$v_f = \sqrt{2gh\left(1 - \mu \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

Senza attrito $v = \sqrt{2gh}$

così è inferiore.

(24) L'ESPRESSIONE DELL'EN. POTENZIALE DIPENDE DALLA FORZA (TRAMITE $W_{AB} = -\Delta E_p$)

→ Analogamente, la forza è univocamente determinata dall'energia potenziale.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

→ Si dimostra che $\oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$ è c.n.s. per l'esistenza di un pot. con proprietà

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \; ; \; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \; ; \; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

→ DERIVATE PARZIALI

→ $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \equiv \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{i} + \ldots$

Nel caso monodim.

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

Peso $mgz \to -mg$

Molla $\frac{1}{2}kx^2 \to -kx$

---

(25) ~~Es.~~ Esempi Bidim.

$$E_p = \frac{1}{2}k(x^2+y^2) \to \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -k(x\hat{i} + y\hat{j}) = -k\vec{r}$$

F. elastica nel piano

$$|F| = k\sqrt{x^2+y^2}$$