Lezione 8 : Energia meccanica (1)

* Osservabili ~~globali~~ ~~per~~ (integrali) permettono di ottenere informazioni sul moto o sulle forze agenti su un punto materiale senza dover risolvere le equazioni del moto

* Visto un primo esempio con il teorema dell'impulso :

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \Delta \vec{q} \quad ; \quad q = m\vec{v} \qquad (1)$$

* Non sempre ~~il~~ problema in ~~oggetto~~ studio ci fornisce $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Abbiamo già visto alcuni esempi ~~di~~ in cui invece di avere $\vec{a} = \vec{a}(t)$, conoscevamo $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x})$ o $\vec{a} = \vec{a}(\vec{v})$

$\longrightarrow$ Soluzione di eq. differenziali

* Vogliamo ora porci il problema di risolvere un problema dinamico quando ~~ci viene~~ è noto ~~esempio~~ $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ (dipende dalla posizione)

In analogia alla (1), possiamo cercare di risolvere il problema integrando la dip di $\vec{F}$ lungo il percorso

In termini funzionali sto dicendo che come ho fatto

$$\int_0^t F(t)\,dt \qquad \text{quando } F = F(t)$$

posso provare a fare (esempio monodim.)

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx \qquad \text{quando } F = F(x)$$

Esempio $F = -kx$

→ ma qual è il significato di qs. integrale ?

~~Partiamo dal caso generale (3D)~~

$$\cancel{\int_{\vec r_A}^{\vec r_B} \vec F \cdot d\vec s}$$

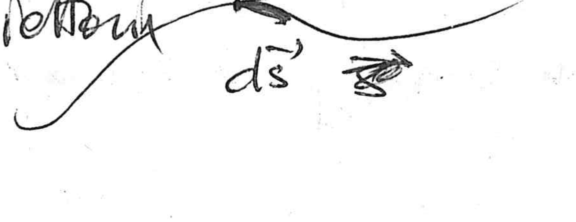
Introdurre i concetti di lavoro e energia

Def.: LAVORO DELLA FORZA

$$dW = \vec F \cdot d\vec s$$

Prodotto scalare: $dW = F\,ds\cos\theta$

Per ogni istante lungo la traiettoria



Si possono presentare tre casi:

$$dW = F ds \cos\theta \quad \begin{cases} \theta < \frac{\pi}{2} & dW > 0 \quad \text{Lavoro motore} \\ \theta = 0 & dW = 0 \\ \theta > \frac{\pi}{2} & dW < 0 \quad \text{Lavoro resistente} \end{cases}$$

* Nel <u>lavoro resistente</u> il moto ~~avviene~~ (lo spostam. per essere precisi) avviene in direzione opposta alla forza. (È dunque non a causa di quella forza soltanto!)

* ~~Definizione molto restrittiva~~

~~Es. moto rettilineo uniforme~~ $\vec{F} = 0$

~~ma dW~~ $= 0$

* Lavoro totale su uno spostamento finito

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \lim_{\Delta \vec{s} \to 0} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i$$

<u>Integrale curvilineo</u>

Si riduce ad un integrale funzionale in casi semplici (monodim. ad esempio)

Se agiscono più forze:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$$dW_{TOT} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) \cdot d\vec{s}$$

$$= dW_1 + dW_2 \dots$$

$$W_{TOT} = W_1 + W_2 + \dots$$

Es. $\vec{F}_{TOT} = \vec{F} + \vec{F}_{ar} = 0$

W_1 = lavoro motore

W_2 = lavoro resistente

$$\boxed{W_1 = -W_2}$$

~~Es. Moto circolare uniforme:~~

Es. Moto circolare unif. ~~Attrito~~

$\vec{F}_{centrip.} \Longrightarrow dW = \vec{F}_{cen} \cdot d\vec{s} = 0$

Spost. $\perp$ Forza

La forza centripeta non compie lavoro

<u>Nota</u>: def di LAVORO HA UN SIGNIFICATO MOLTO RESTRITTIVO — Non corrisponde alla sensazione di lavoro

Es. sollevatore di <u>pesi</u>

~~POTENZA~~ Grandezza fisica derivata

UNITA' DI MISURA

~~[illegible]~~

dalla definizione

$$[W] = [F \cdot L]$$

$$1\,J = 1\,N \cdot 1\,m \qquad \underline{SI}$$

POTENZA:

Lavoro per unità di tempo:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

potenza istantanea → caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro

A rigore:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{F}\,d\vec{s}\right) = \cancel{\frac{d\vec{F}}{dt}\,d\vec{s}} + \vec{F}\,\frac{d\vec{s}}{dt}$$

Ma l'ipotesi che si fa nella definizione del lavoro è $\vec{F}$ istantanea alla posizione $\vec{r}$ → costante, che determina uno spost. $d\vec{s}$

Unità di misura per la ~~potenza~~

$$[P] = \frac{[W]}{[T]} = 1\, J/s = 1\, W \qquad \text{Watt}$$

* Ho definito il lavoro e ho fatto alcune manipolazioni, ma non ho imparato granché SALVO CHE POSSO CARATTERIZZARE L'EFFETTO DI UNA FORZA SU UNO SPECIFICO SPOSTAMENTO.

* Valutiamo il lavoro di una forza su un punto materiale soggetto solo a quella forza, sfruttando la II legge della dinamica possiamo esprimere il lavoro in dip. da grandezze cinematiche osservabili del moto:

$$\boxed{\begin{array}{l} W = f(\text{osservabili del moto}) \\ I = f(\text{osservabili del moto}) \end{array}}$$

Manipolazione:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$= m \vec{a} \cdot d\vec{s} =$$

$$= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} =$$

$$= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}\, dt = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\right) dt$$

$\rightarrow$

sappiamo dalle regole di derivazione

che $$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= 2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}$$

Sostituendo :

$$dW = \frac{1}{2}m\,d(v^2) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

~~Quindi dove il lavoro~~

Dunque il lavoro (infinitesimo) è uguale alla ~~diff~~ variazione tra $\frac{1}{2}mv^2$ ~~lungo~~ lo spostam.

Per uno spostamento finito

$$W = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Per vederlo ~~senza~~ cambio di variabil

$z = \frac{1}{2}mv^2$ $\quad \int dz = z$

oppure somme sui segmenti e ~~l~~estesso

[illegible]

Definisco $E_K = \frac{1}{2} m v^2$ En. cinetica

grandezza omogenea al lavoro, che permette di calcolare il lavoro su una traiettoria

$$\boxed{W_{AB} = E_k(B) - E_k(A)} \quad (**)$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Legge di validità generale conseguenza delle leggi della dinamica e valida dunque per qualunque forza

Nota! Lavoro motore $W > 0$ $E_k(B) > E_k(A)$

Lavoro resistente $W < 0$ $E_k(B) < E_k(A)$

→ Forze di attrito diminuiscono l'en. cinetica, cioè la velocità ovvero decelerano il moto

A RIGORE

$\Delta E_K = W_{AB}$ → E_K definita a meno di una ~~misura~~ costante. Scelta ovvia cost = 0

Unità di

$1\,J = 1\,N \cdot m$ ← dalla definizione del lavoro

Il lavoro è invariante rispetto al cambio di sist di rif. traslati e ruotati, ma non è invariante al cambiare della dell'osservatore in generale - Nemmeno limitandosi al caso di OSS. INERZIALI

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{v}_{OO'} \qquad v_{OO'} \neq 0$$

$$E_k' \neq E_k \qquad E_k' = \frac{1}{2} m v'^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v' + v_{OO'})^2$$

d'altronde $F = F'$ (oss. inerziale)

ma $d\vec{s} \neq d\vec{s}\,'$

* Il teorema dell'en. cinetica vale per tutti i sist. inerziali (L'HO RICAVATO USANDO LA SECONDA LEGGE DI NW) anche se $W \neq W'$ e $\Delta E_k \neq \Delta E_k'$

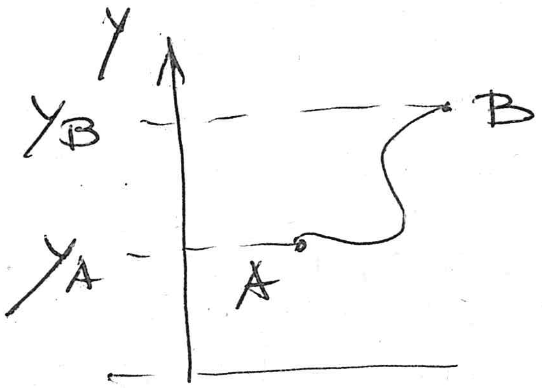
* IL TEOR. EN. CINETICA È CONSEGUENZA DELLA LEGGE DI NEWTON. HA UN'UTILITÀ PRATICA NELLA SOLUZIONE DI PROBLEMI DINAMICI CON $\vec{F}^h$ $\vec{F}(\vec{r})$

Esempio 1

Lavoro della forza peso

$$\boxed{\vec{F}_p = -mg\,\hat{j}}$$

Forza costante (indip dalla posizione) sulla verticale



$$\text{Calcoliamo}\quad W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$

$$= -mg\int_A^B \hat{j}\cdot d\vec{s}$$

spostamento infinitesimo nella direzione dell'asse y

$$= -mg\int_A^B dy = -mg(y_B - y_A)$$

Usiamo il teorema dell'energia cinetica per trovare la relazione tra <u>velocità</u> e <u>quota</u>

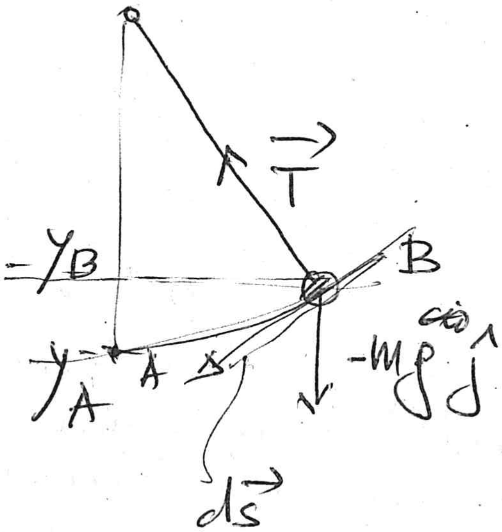
$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(y_A - y_B)$$

$$v_B = \left[v_A^2 + 2g\,(y_A - y_B)\right]^{1/2}$$

Relazione già trovata in cinematica per il moto di caduta di un grave (integrando l'acc. rispetto al tempo e poi riarrangiando il risultato)

Nota: Il risultato non dipende dal percorso, ma solo da Δy !

Es. 2 Pendolo



$$dW = \left(\vec{F}_p + \vec{T}\right)\cdot\vec{ds}$$

$$= \vec{F}_p\cdot\vec{ds} \qquad \left[\vec{T}\cdot\vec{ds} = 0\right]$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_p\cdot\vec{ds} =$$

$$= -mg\,(y_B - y_A)$$

$$W_{AB} = \Delta E_K$$

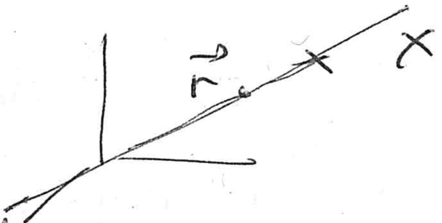
La variazione di energia cinetica del pendolo è identica a quella di un punto materiale di <u>egual massa</u> che cade sulla verticale per <u>lo stesso dislivello</u> !

<u>Nota:</u> $|v|^2$ è identico, ma non $\Delta\vec{v}$

Le forze che non compiono lavoro hanno un effetto, e non le posso trascurare se voglio conoscere

Forza elastica

$$\boxed{\vec{F} = -k\,\overset{x}{\cancel{A}}\,\hat{u}_x}$$



dove considero una forza ~~spostamento~~ lungo una direzione specifica.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}_x = -k\int_A^B x\,dx = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

Anche in questo caso ~~cosi~~ il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale

$W_{AB} > 0$ se $x_A > x_B$ cioè se lo spostamento è verso la posizione ~~direzione~~ di riposo della forza elastica (centro della forza)

$W_{AB} < 0$ allontanamento dal centro della forza —

$\longrightarrow$ in questo caso deve intervenire un'altra forza ~~per~~ a determinare lo spostamento

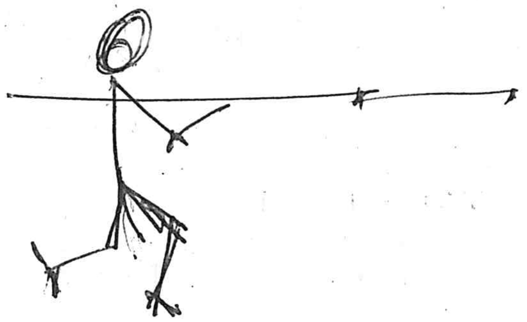
OPPURE CONS. EN. MECCANICA

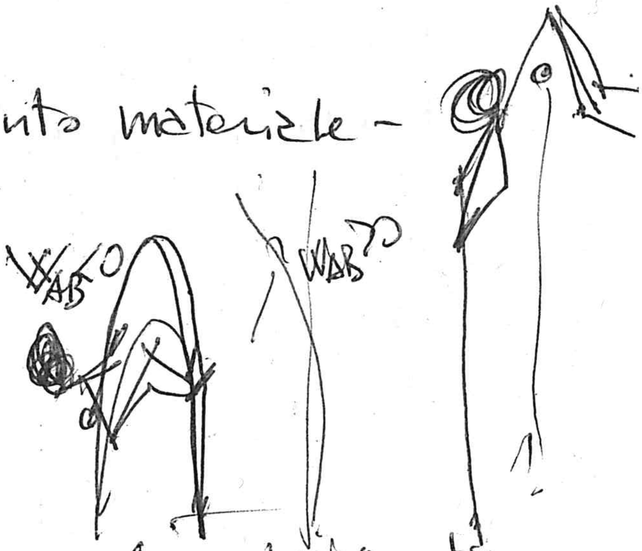
<u>Applicazione</u>: Salto con l'asta: da cosa dipende l'altezza massima raggiunta da un saltatore

× Problema complicato =

Approx – saltatore = punto materiale –

~





(complessivamente lavoro compiuto dall'asta è nullo)

~ non guadagno molto –

proprietà dell'asta? Rincorsa? . . .

Hp. 1 – Asta ~ molla con costante elastica ∞

– En cinetica a fine corsa ⟹ ~~Lavoro per piegare l'asta~~

Moto ottimizzato v_f – velocità a fine corsa

$v_h = 0$ dopo molla piegata

$W_{molla} = -\frac{1}{2} m v_f^2$

Lavoro restituito da v_0 a v_f in verticale quando l'asta si distende. (immagazzina energia e la restituisce) ⟶

Pto max $v = 0$ ⟹ $mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$

⟶ NUMERI

Lavoro della forza di attrito radente

$$\boxed{\vec{F}_{att} = -\mu_d N \hat{u}_v}$$

← opposto allo spostamento (che ha la stessa direzione della velocità)

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{att} \cdot d\vec{s} =$$

$$= -\mu_d N \int_A^B \hat{u}_v \cdot d\vec{s} = \boxed{-\mu_d N (s_B - s_A)}$$

il lavoro dipende dal percorso: $s_B - s_A$ è la lunghezza dello spostamento lungo la traiettoria.

Nota: lo spostame è $(s_B - s_A) > 0$

$\Rightarrow W_{AB} < 0$ il lavoro della forza di attrito è sempre negativo

$\Delta E_k < 0 \rightsquigarrow$ velocità diminuisce

Esempio: lavoro di una forza frenante costante — (Allineata allo spost.)

$\vec{F} \cdot \vec{ds}$ $F_{fr}(s_B - s_A)$

$-\mu N (s_B - s_A) = \Delta E_k$

Consideriamo $v_f = 0$ auto che si ferma

$-F_{fr}(s_B - s_A) = \cancel{\frac{1}{2} m v_f^2} - \cancel{\frac{1}{2}} m v_i^2$

$$\boxed{\Delta s = (s_B - s_A) \div v_i^2}$$

Lo spazio di frenata è proporzionale alla velocità al quadrato —