

Lezione 7

Sistemi di riferimento non inerziali: non riconoscono il principio di inerzia, cioè vedono ~~ma~~ effetti non soggetti a forze esterne muoversi di moto accelerato -

Es. 1 → moto di un oggetto in auto durante una frenata

Es. 2 → traiettorie degli oggetti al suolo rispetto ad una pedana in una festa.

Anche il II principio ha limiti di validità e non è riconosciuto in sistemi non inerziali, che vedono moti unif. accelerati in assenza di forze esterne -

Es. 1 → moto di una biglia su un treno in frenata (cambio di modulo di \vec{a})

Es. 2 → moto di una biglia su una ruota in rotazione (cambio di direzione di \vec{a})

È possibile "salvare" le apparenze (e utile o sempre nella descrizione dei moti) descrivendo il moto tramite l'introduzione di forze apparenti



\vec{a}_{NI} = acc. del treno ^(oss. N.I.) risp. all'osservatore a terra (osservatore inerziale)

\vec{a}_{NE} = acc. della biglia (libera) ~~forma~~ rispetto all'osservatore solidale con il treno (osservatore mobile o non inerziale)

$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_{NI}$ forza apparente agente sulla biglia "vista" dell'oss. ~~mobile~~ N.I.

Se la biglia è soggetta ad una forza \vec{F} (risultante di forze) reale nel sist. Inerziale

Per l'oss. N.I. vale:

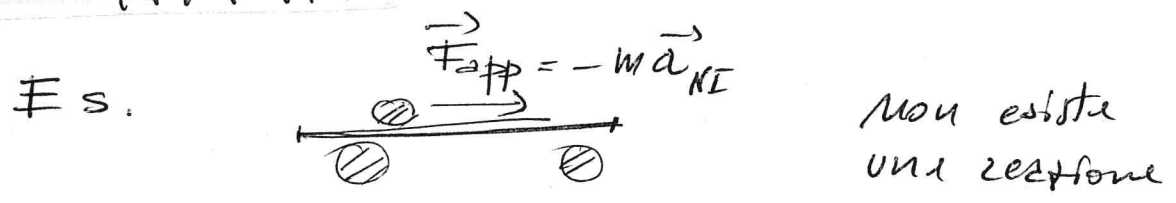
$\vec{F} + \vec{F}_{app} = m\vec{a}$

L'ac. di un ~~oggetto~~ punto materiale in un sist. di riferimento NI ~~è~~ soddisfa la II legge di Newton, purché la forza risultante includa le forze apparenti

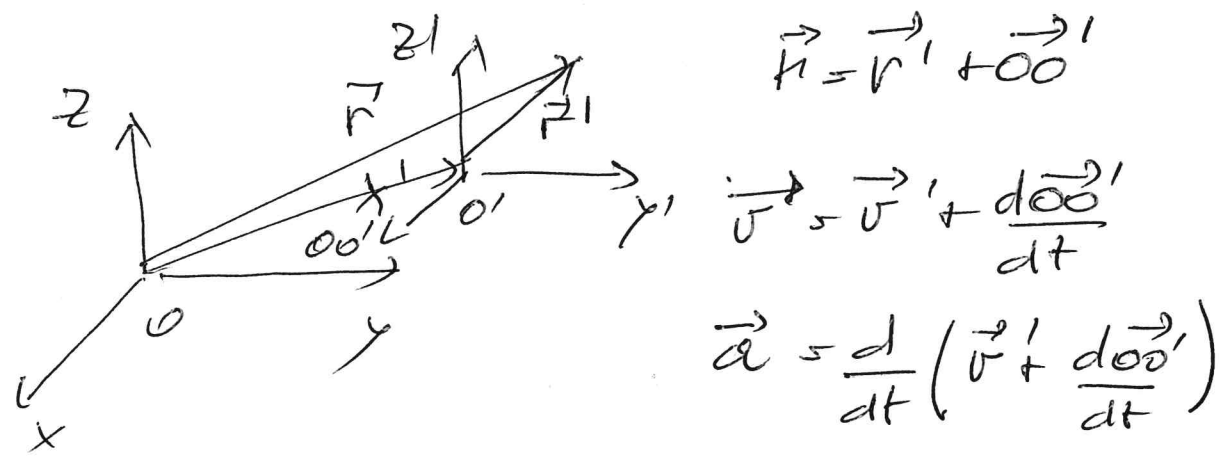
$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_{NI}$

- Se siamo in grado di calcolare \vec{a}_{NI} rispetto ad un s.s. inerziale, possiamo conoscere la dinamica in un sistema non inerziale (v.le \vec{F}_{app})

- Nota \vec{F}_{app} e' uno stratagemma e non e' di calcolo. che non sia una forza reale e' evidente dal fatto che NON SODDISFA IL TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA



- Per calcolare a_{NI} dobbiamo affrontare in modo generale il calcolo delle velocita' e accelerazioni relative in un sistema fisso e uno mobile

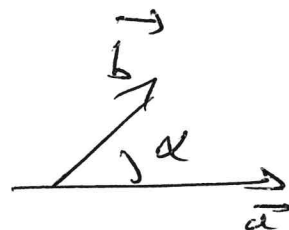


Nel caso generale OO' si muove e gli assi ruotano. La derivata di \vec{v}' deve includere termini di rotazione.

Prodotto tra vettori

1) Prodotto scalare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$



per componenti

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned}$$

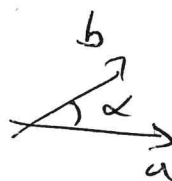
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

① commutata

② è invariante per rotazioni del sistema di riferimento (è una quantità scalare)

2) Prodotto vettoriale

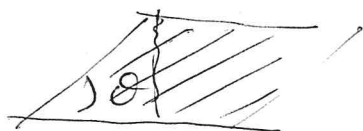
def. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$



$$|\vec{c}| = ab \sin \alpha$$

direzionale $\perp \pi(\vec{a}, \vec{b})$

verso \rightarrow regole destrorse



Modulo è l'area del parallelogramma di lati a, b

per la regola della mano destra è evidente

- che il prodotto vettoriale anticommuta
- Non è associativo $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
- è distributivo

Nel riferimento cartesiano:

(5)

$$\begin{cases} a_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases}$$

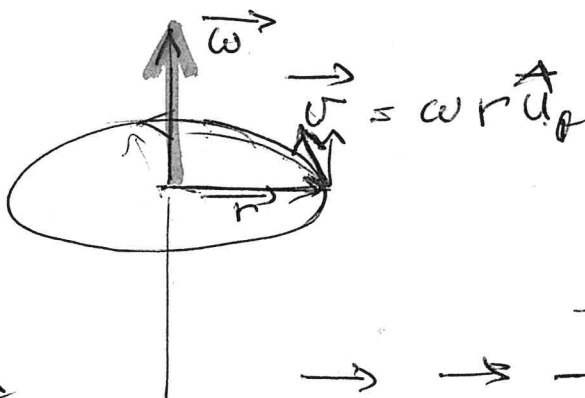
discendono applicando la proprietà distributiva

$$a \vec{c} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

e ricorrendo dalle regole della mano destra che

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i} \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k} \end{cases}$$

(*) Per poter derivare le forme generali della velocità e acc. relative occorre esprimere la velocità angolare in forma vettoriale



Posso scrivere

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
~~$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$~~

Antiorario
Per ω rivolta
a noi

prodotto vettoriale

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

dove ω è una velocità angolare e il vettore \hat{u}_θ è def. con il simbolo del

Se assegniamo $\vec{\omega}$ individuiamo l'asse (6)

di rotazione del moto. Possiamo definire l'accelerazione angolare in forma vettoriale

$$\vec{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \text{acc. angolare}$$

$$= \frac{d\alpha}{dt} \hat{u}_{\omega}$$

$$\equiv \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{u}_{\omega}$$

stesso ~~verso~~ di $\vec{\omega}$
poiché ω è fissa
nel moto circolare

Nota $\vec{\omega}$ in base alla def.

Acc. del moto circolare:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

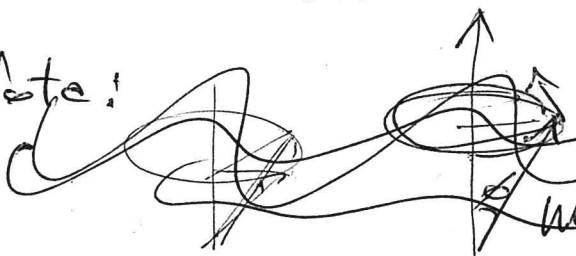
diretta
come \vec{v}
= tangente

diretta come r
= radiale (normale)

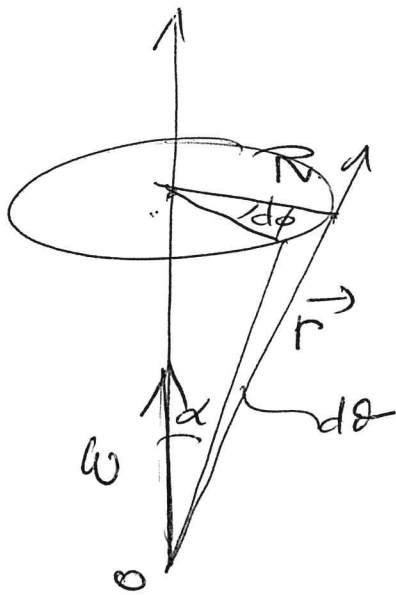
$$a_R = R \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega v = \omega^2 r$$

acc. centripeta

Note:  $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin\theta \hat{k}$
Moto di precessione

Più in generale posso considerare il moto di precessione:



$$v = R \frac{d\phi}{dt}$$

$$= r \sin \alpha \frac{d\phi}{dt}$$

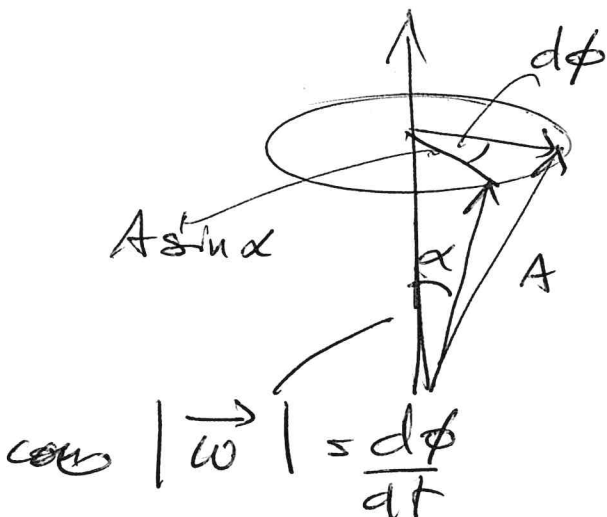
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- La definizione di velocità angolare è indip dalle scelte di O lungo l'asse che normale al moto circolare e perpendic. per il cerchio (in casi generali in cui il moto non è circolare si deve considerare la circ. osculatoria)

RS in generale

- Possiamo considerare una precessione generica di un vettore \vec{A} :

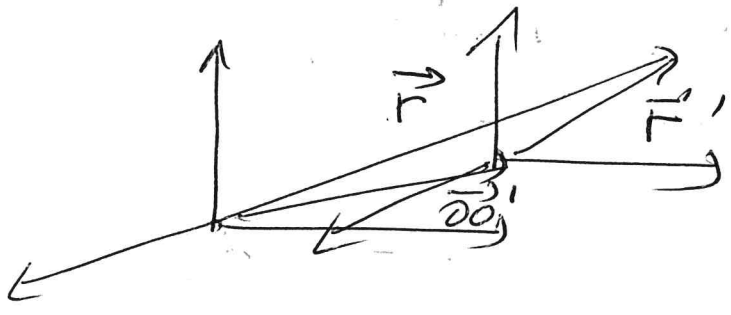


La ~~variazione~~ derivata temp. temporale di \vec{A}

si ottiene come

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

(X) Moto relativo



$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r'}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

Nel caso generale di traslazione e rotazione
del sistema mobile k'

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d}{dt} (x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}') =$$

$$= \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + \dots$$

$$= \vec{v}' + x' \cdot \vec{\omega} \times \hat{i}' + y' \vec{\omega} \times \hat{j}' + \dots$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

↳ Velocità angolare (vettoriale)
del sistema mobile

TEOREMA DELLE VELOCITA' RELATIVE

$$\vec{v} = \vec{v}' + \underbrace{\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{velocità di trascinamento}}$$

* Velocità di trascinamento $\vec{v} - \vec{v}'$ differenza di velocità vista dai due osservatori -
Significato: se $\vec{v}' = 0$ (punto solidale con il sistema mobile), la velocità del punto vista dal sistema \mathcal{O} è data dalla velocità di trascinamento espone la velocità vista da \mathcal{O} di un

* Se \mathcal{O}' non è in rotazione rispetto ad \mathcal{O} , ($\vec{\omega} = 0$) con moto rettilineo uniforme in \mathcal{O} è rettilineo uniforme in \mathcal{O}'

- sistemi inerziali secondo il I principio
- ~~teorema delle velocità~~ legge di composizione delle velocità di Galileo

⇒ Ritorniamo il risultato di Galileo sulla composizione delle velocità come ~~sta~~ caso del teorema delle velocità relative

⇒ SIST. INERZIALI

Deriviamo il risultato per trovare l'accelerazione (10)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

può cambiare in
modulo e direzione

$$\rightarrow \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt} (v_x' \hat{i} + v_y' \hat{j} + v_z' \hat{k}) =$$

$$= \vec{a}' + v_x' \frac{d\hat{i}}{dt} + \dots$$

$$= \vec{a}' + v_x' \vec{\omega} \times \hat{i} + v_y' \vec{\omega} \times \hat{j} + \dots$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

TEOREMA DELLE ACC. RELATIVE

(1)

$$\vec{a} = \vec{a}'' + \underbrace{\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\text{Acc. di TRASCINAMENTO}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Acc. di CORIOLIS}}$$

Acc. di TRASCINAMENTO

$$\vec{r}' = 0, \vec{a}' = 0$$

acc. del punto solidale con il sistema mobile

Acc. di CORIOLIS dip. da \vec{v}'

⇒ acc. visto dall'osservatore (NON INERZIALE) solidale con il sistema mobile

$$\vec{a}'' = \vec{a} - \vec{a}_T - \vec{a}_C$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \underbrace{\vec{F}_{\text{inerziali}} + \vec{F}_{\text{coriolis}}}_{\text{Forze apparenti}}$$

$$\vec{F} = -m\vec{a}_{\text{NI}}$$

→ validità del II principio:

$$\vec{F} = m\vec{a}' \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_T = 0 \\ \vec{a}_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_0 = 0 \\ \vec{\omega} = 0 \end{cases}$$

La condizione non pone restrizioni su \vec{v}_0

ma non pone restrizioni su \vec{v}_0 : sistemi

sistemi in moto rettilineo uniforme (relativo) in uno inerziale (se uno di essi è inerte)

PER CAPIRE IL SIGNIFICATO DEI TERMINI:

CASO III - ~~PUNTO~~ UN SISTEMA MOBILE IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\vec{\omega} = \text{cost} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$$

$$\vec{a}_0 = 0$$

$$\vec{a}_T = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \text{acc. centrip.}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (\text{nota riducibile } \vec{v} \neq 0)$$

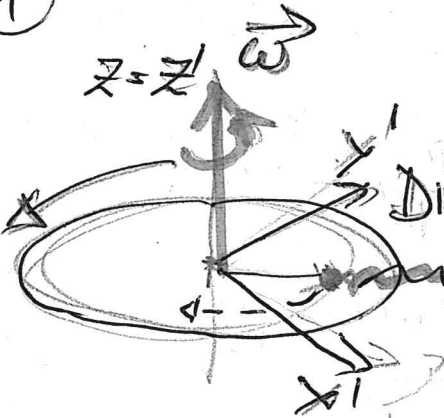
$$\vec{a}' \equiv \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

(Tot NZ)

Acc. centrifuga
[SEGNO MENO]

Acc. di Coriolis
[SEGNO MENO]

1



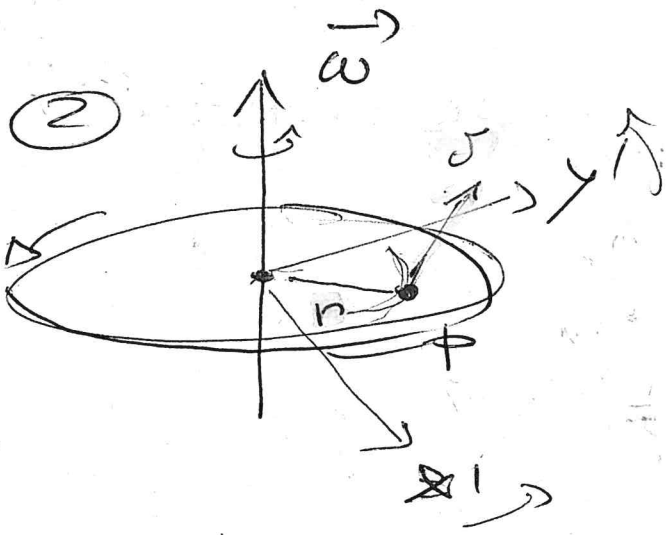
Disco in rotazione o o'

punto fermo rispetto a o
(libero con il disco che gli serve tutto i piedi)
 $\vec{v} = 0$
 $\vec{a} = 0$

Teor. velocità: $\vec{v}' = -(\vec{\omega} \times \vec{r}')$ velocità tang. **ANTI ORARIA**

Teor. acc: $\vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{r}')$
 $\vec{a}' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

L'osservatore mobile vede un'accelerazione centripeta somma dei due termini. Resta per o' il problema dell'origine dell'accelerazione e delle forze associate

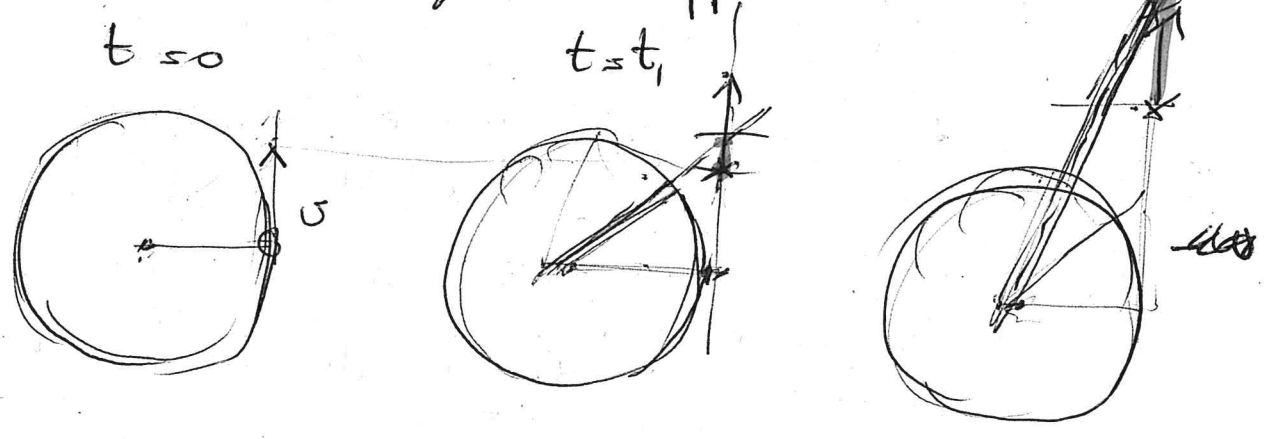


(13)

P sia legato all'asse da un filo e gli sia data una velocità tangenziale in O pari a $v = \omega r$

- * Il moto per O è circolare uniforme con acc. centripeta $\omega^2 r$. Il filo esercita la forza centripeta tramite la tensione
- * Vi sono di O' : $\vec{v}' = 0$ (il punto P si muove solidamente al disco) e $\vec{a}' = 0$
 Interpretazione di O' : il filo è teso da una forza centrifuga diretta radialmente (Forza apparente)
- * TAGLIA IL FILO: IL PUNTO PROSEGUE TANGENZIALMENTE ALLA TRAIETTORIA IN O e dunque si sposta a raggi maggiori (distanze maggiori dall'asse). Essendo in O il moto libero $v = \text{cost.}$ e dunque $v < \omega R$ per $R > r$
 Per cui O' non vede un moto radiale: il punto rimane indietro \rightarrow è lenta di

una ulteriore forza apparente: CORIOLIS

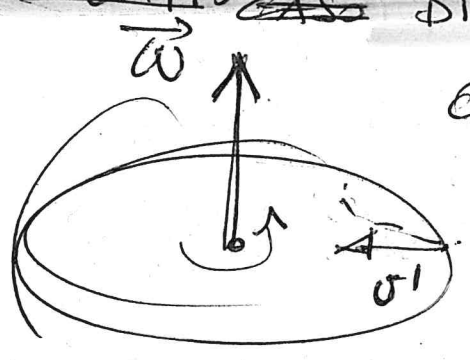


Dopo il taglio del filo:

$\vec{a} = 0$ osservatore \odot

$\vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{CORIOLIS}} \text{ oss. } O'$

ESEMPLO PIU' chiaro
~~ESEMPLO~~ CASO DI F-CORIOLIS



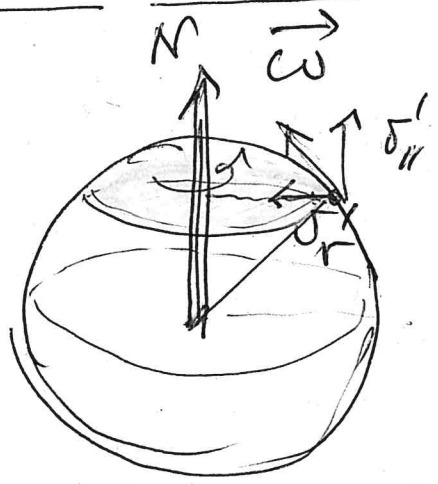
Oss. O : il punto ha una componente radiale
 $v_r = \omega R > \omega r$
 per $r < R$

il punto "anticipa" il disco a raggio r (devia in direzione del senso di rotazione)

~~Oss~~

Oss O' : F_{app} di CORIOLIS ~~STATA~~ MODIFICA LA TRAIETTORIA DALLA DIR. RADIALE
 $\vec{a}' = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ deviazione come ω

Caso del lancio dei proiettili



Lancio verso Nord

$$v' = v'' + v'_r$$

$$F_c = -m[\omega \times v'_r]$$

↙
 Acc. di CORIOLIS
 NEL DISCO

Deviazione verso Oriente dovuta

alla forza di coriolis dipende dalla latitudine

x $F_c = 0$ all'equatore

x Deviazione vs Oriente per colpi verso Nord (Sud) nell'emisfero boreale (Australe)

x Il cambio di direzione di $F_{CORIOLIS}$ passando dall'equatore è resp. della rotazione ciclonica / anticiclonica nei due emisferi

