Lezione 6 : Esempi di forze

$\vec{F} = m\vec{a}$ richiede una "legge di forza" per non essere una tautologia.

Forza $\longrightarrow$ moto — Problema fondamentale diretto

Moto $\longrightarrow$ forza — " " inverso

* Forze "fondamentali" riconducibili a proprietà irriducibili della materia

* Forze "empiriche" leggi descrittive di fenomeni complessi, per le quali si è trovata un'espressione della forza "semplice"

In entrambi i casi, perché la legge $\vec{F} = m\vec{a}$ sia utile, la legge di forza deve esprimere la dipendenza della forza in relazione alle caratteristiche dell'ambiente e della sua interazione con l'oggetto. Servono espressioni analitiche per la forza

Attenzione

1) ~~La forza peso~~

~~E' una manifestazione locale della forza di legge di gravitazione universale, sperimentalmente si osserva che~~

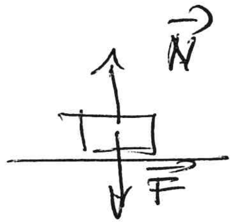
Prima di procedere all'illustrazione di espressioni analitiche per ~~le forze~~ alcune forze materiali o comuni, soffermiamo l'attenzione sulle reazioni vincolari

2

Le reazioni vincolari sono forze che intervengono in un sistema, determinando ~~le condizioni di equilibrio~~ (ma = 0) o le condizioni dinamiche di un sistema. Di esse non è nota in generale un'espressione analitica ma non si possono ~~trascurare~~ INDIVIDUARE
SI POSSONO ~~CONOSCERE~~ ANALIZZANDO nell'analisi di un problema. Se agendo con
LE CONDIZIONI DI EQUIL (ma = 0)
delle forze su un corpo, esso non si muove, significa che altre forze (reazioni vincolari) intervengono come reazioni dell'ambiente esterno alle prime forze.

1) La forza normale -

1a) Corpo appoggiato al tavolo -

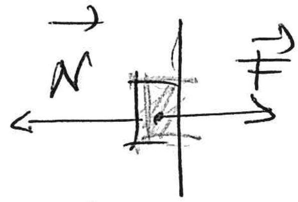


$\vec{N} = -\vec{F}$ ($\vec{N} + \vec{F} = 0$ condizione di equilibrio din. secondo Legge II)

l'intensità di $\vec{N}$ non è definita, dipende da F

è definita la direzione e il verso
non è una reazione

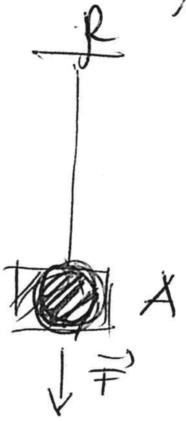
1.b) Corpo spinto contro il muro



stessa situazione, ma chiarisce che la reazione è normale al piano

2) La tensione dei fili

Si possono avere situazioni di equilibrio analoghe a quella del tavolo, con corpi appesi ad un filo o "tirati" da un filo



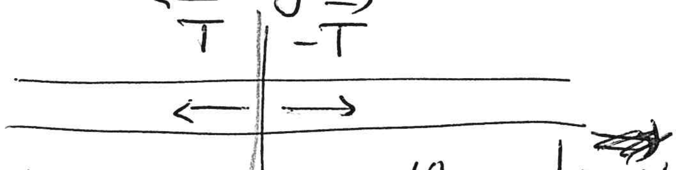
Affinché il ~~sistema~~ corpo A sia in equilibrio il filo deve reagire con una forza (reazione vincolare) a $\vec F$

* Il filo risulta teso e la forza lungo il filo (con direzione lungo il filo) che sostiene un punto materiale ad un punto fisso (f) o che collega due punti materiali, è detta tensione del filo

Nella maggior parte dei problemi di dinamica/statica possiamo

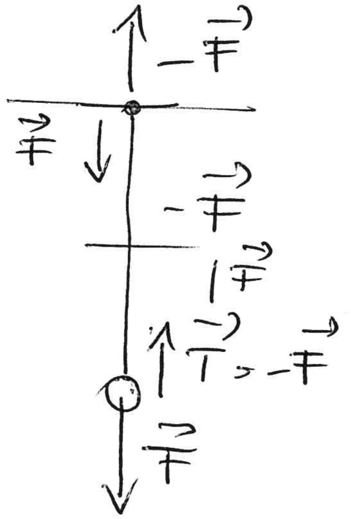
* ~~Supponiamo~~ il filo inestensibile (lunghezza costante) e di massa nulla.

* In condizioni di equilibrio statico la risultante delle forze su ogni elemento ~~del filo~~ di un filo inteso è nulla



$\vec T = -\vec T$ tensione del filo

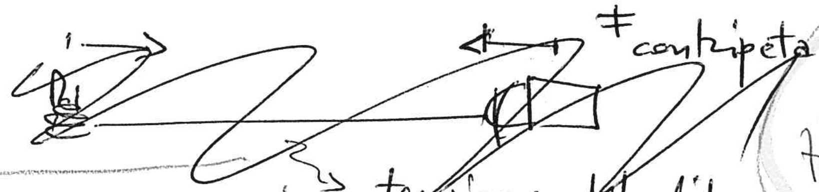
* Alle estremità del filo $|\vec T| = |\vec F|$ dove $\vec F$ è la forza esterna



$\Longrightarrow$ la forza esterna è bilanciata (fino che il filo non si rompe) da una reazione vincolare t.c. $\vec T = -\vec F$

Quindi per mantenere un filo ad uguale tensione T, ~~ai estremi gli estremi~~ deve anche applicare al filo una forza uguale

La tensione $\vec T$ si trasmette a tutti i punti del filo. In virtù della tensione del filo il punto P (l'altra estremità del filo) subisce una forza $\vec F$ ~~= reazione alla forza del corp~~ subisce T



e questa stessa forza è presente in tutti i punti del filo

CASO del Filo in movimento

$\vec a \neq 0$

Poiché la massa del filo è trascurabile, nulla!

$m\,a = 0$ su ogni elemento del filo.

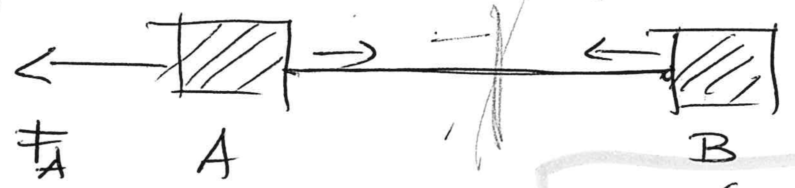
Dunque la risultante delle forze esterne su ogni punto del filo è nulla !

Quindi la tensione del filo è identica in tutti i punti anche durante il moto e si trasmette agli estremi del filo

Ma quanto vale ? Ancora Fext ? No !

Esempio:
quanto vale la tensione?

$$\begin{cases} F - T = m_A a_A \\ T = m_B a_B \end{cases}$$



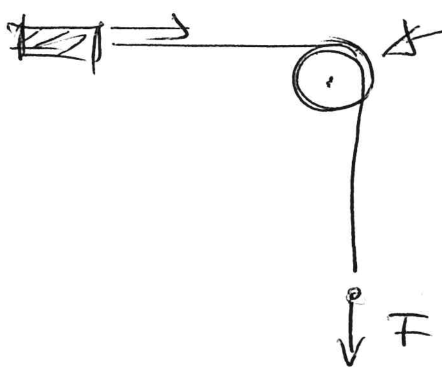
se il filo è teso $a_B = a_A$

$$\boxed{F = (m_A + m_B)\,a} \qquad \boxed{T = \frac{m_B}{m_A + m_B} F}$$

~~La forza $\vec{F}_A$ si trasmette al corpo B tramite il filo. Poiché $m_{filo} = 0$ si può trascurare la sua massa~~

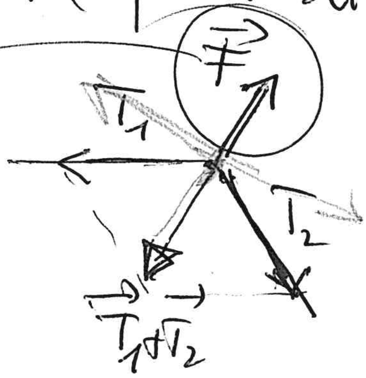
Se $m_A = m_B$ R_A deve essere uguale a R_B se il filo è teso e infatti $T = \frac{1}{2} F$

— Non è necessario che il filo sia rettilineo



cambia la direzione della forza

Nel punto di curvatura



$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$

Forza di reazione del perno è una forza normale

$F_T = m a_T = 0$

c'è equilibrio sul filo

La reazione normale è uguale alla risultante delle tensioni

Esempi di forze

1) Forza peso

× manif. locale, sulle sup. terrestre, della forza di gravitazione

Si osserva sperim. che in uno stesso luogo tutti i corpi, qualunque sia la loro massa inerziale, ~~assumono~~ se lasciati liberi di cadere la stessa accelerazione $\vec{g}$. Diretta verso il basso, lungo la verticale e con modulo $g = 9{,}8\ m/s$ (in media)

× Consistentemente con la II legge della dinamica si definisce forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$

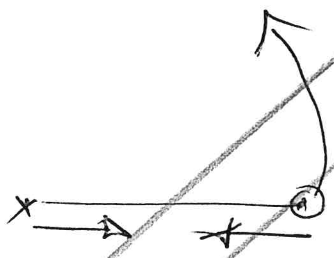
× Nota q. def. sembra tautologica ma significa che 1) osservando i moti si è stabilita la natura di $\vec{P}$:

- indip. dal punto
- intensità $\div$ alla massa inerziale

2) se un corpo generico ha massa m, la forza $\vec{P}$ dovrà essere considerata nel computo delle forze complessive che agiscono su un corpo

× Non confondere $\vec{P}$ e m, ancorché prop.

* ~~Approfondimento sul moto circolare~~



1) $T = m\omega^2 r$ Forza centripeta

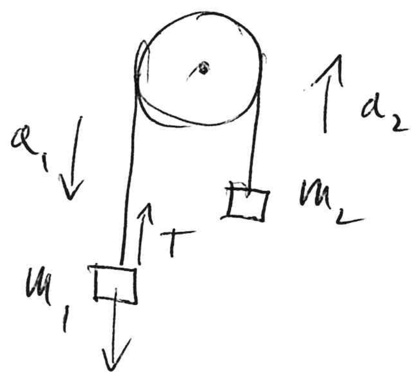
2) La tensione nel filo è identica in tutti i punti

3) Al dentro $\vec{T}_{centrif} = -\vec{T}_{centrip.}$

Esempio

× Macchina di Atwood

Dopo il peso



$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ m_2 g - T = -m_2 a \end{cases}$$

$$\boxed{a_1 = -a_2} \equiv a$$

$$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a$$

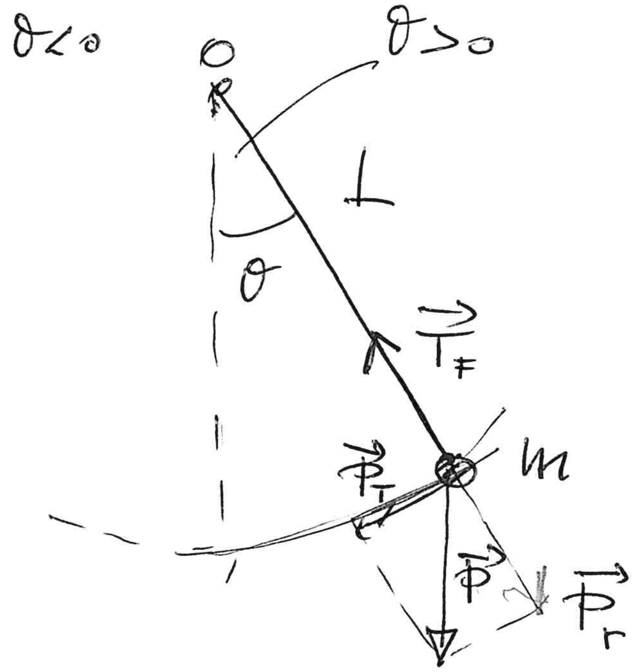
$$\boxed{a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g} \quad = 0 \text{ se } m_1 = m_2$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Si può saltare

▷ Permette lo studio del moto uniformemente accelerato, riducendo a a valori piccoli

Il pendolo semplice



- $\vartheta(0) = \vartheta_0$
- $v(0) = 0$
- filo <u>inestensibile</u> di lunghezza L
- moto sotto l'azione delle forze peso e tensione vincolare del filo

$$\vec{P} + \vec{T}_F = m\vec{a}$$

× Si può scomporre l'analisi in coordinate polari ~~nelle~~ individuate da $r = L$ e $\vartheta = \vartheta(t)$ angolo rispetto alla verticale

× $$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N =$$

$$= L\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{u}_T + \omega^2 L\,\hat{u}_r$$

(*) dalla derivata di v intrinseca vedi retro

× Eq. del moto:

radiale: $$T_F - mg\cos\vartheta = m\omega^2 L \quad (*)$$

tangenziale: $$-mg\sin\vartheta = mL\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \quad (**)$$

(**) Segno discorde perché $\vec{P}_T$ è diretta nel verso opposto al segno di ϑ

(*) Segno di g e $\omega^2 L$ discordi perché l'accelerazione è <u>centripeta</u>

Nota: in (*) non c'è moto: la reazione vincolare garantisce che il moto sia circolare (L = cost), ma non circolare unif., che richiede $\cancel{\frac{d^2\theta}{dt^2}}$ o ω = cost $\quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$

→ Per risolvere il moto risolviamo (**) nella approssimazione di piccole oscillazioni

$\theta \sim 0 \qquad \sin\theta \simeq \theta \qquad (\theta \lesssim 13°)$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta}$$

Eq. del moto armonico semplice in θ

→ $a = a(\theta)$ anziché $a = a(t)$ $\quad$ Eq. differenziale

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

con θ_0 e φ fissati dalle condizioni iniziali (viene $\varphi = \pi/2$)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (***)$$

(per $\theta \geq 13°$, il moto è sempre periodico ma non è armonico semplice e la relazione (~~***~~) non è esatta)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{velocità ang.}$$

$$a_T = -\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Possiamo trovare la tensione del filo

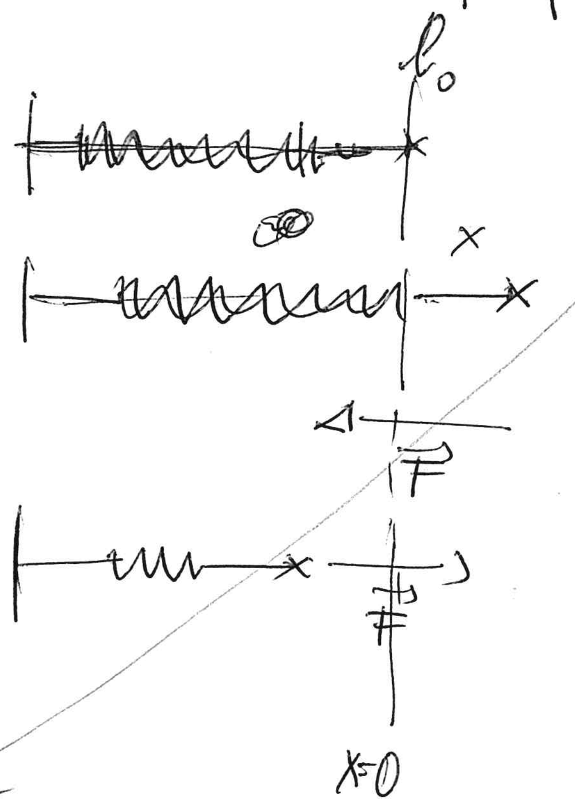
$$T_F = m\left[g\cos\vartheta + \omega^2 L\right]$$

max per $\vartheta = 0$ (sono max entrambi i termini)

3) Forza Elastica (monodimensionale)

Filo reale - estensibile

Forza di direzione costante, con verso rivolto verso un punto O, chiamato centro, e modulo proporzionale alla distanza da O



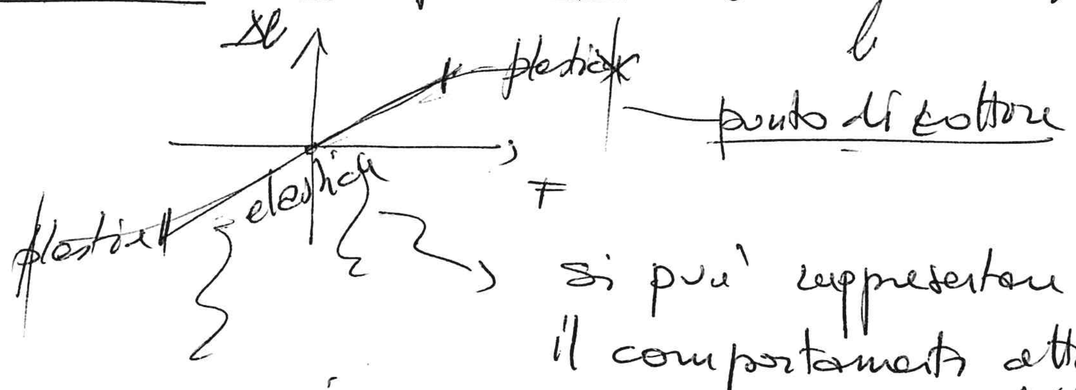
chiamo x lo scostamento dal "centro"

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{u}_x$$

$$\boxed{k = \text{costante elastica}}$$

dipende dal materiale

La forza elastica è ~~rappresentabile tramite una molla~~ è caratteristica dei mezzi materiali estensibili e comprimibili (caso di un filo reale)

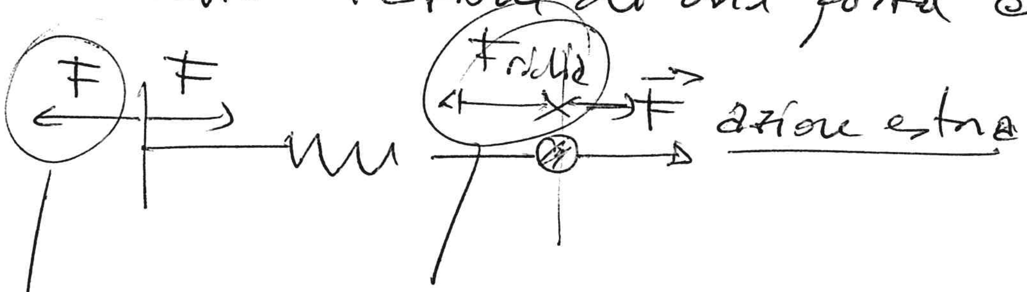


Forza di richiamo

si può rappresentare il comportamento attorno al punto di equilibrio (centro) tramite $F = -kx$

cost. elastica

Sotto l'azione di una forza esterna

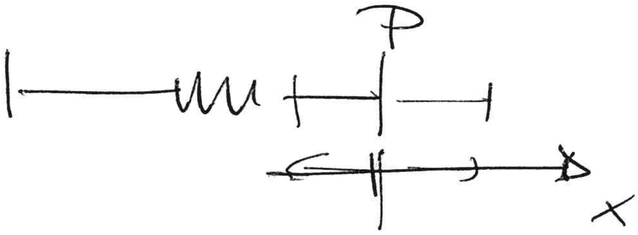


Forza di richiamo "equilibrante"

uguale a F_{est} se il punto è fermo

→ se la molla è libera e entrambi gli estremi, per deformarla dobbiamo applicare una forza F uguale e contraria $|F| = kx$ ad entrambi gli estremi

→ In genere si definire una situazione semplificata con 1 punto fisso / ~~...~~
⇒ agisce come una reazione vincolare e possiamo ignorarne il moto
⇒ studiamo solo il moto del punto materiale P



$$F = -kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Eq. diff. del moto armonico

* Abbiamo visto in cinematica come trovare la legge oraria partendo

da $v = v(t)$ $\longrightarrow$ integrazione

o da $a = a(t)$ $\longrightarrow$ doppia integrazione

In q. caso non è assegnata la legge di $a(t)$ ma una relazione differenziale che collega a ad x.

* ~~Lo studio delle eq. diff. è complesso~~ La soluzione dell'eq. differenziale in q. caso è nota dallo studio della cinematica

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ pulsazione o freq. angolare

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\left[\frac{k}{m}\right] = \frac{[F/L]}{[M]} = \frac{MLT^{-2}}{LM} = T^{-2} \text{ ok.}$$

Soluzione generale:

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

C.I.

$x(0) = x_0$ $\qquad$ $A_0 \sin\varphi = x_0$

$v(0) = 0$ $\qquad$ $A_0 \omega \cos\varphi = 0$

$\longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$A_0 = x_0$

$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

Ho detto "ignorare Q". tuttavia Q agisce da reazione vincolare evitando che la molla nel suo insieme si muova

$F_Q = -F_p = k x(t)$ variabile nel tempo vettore

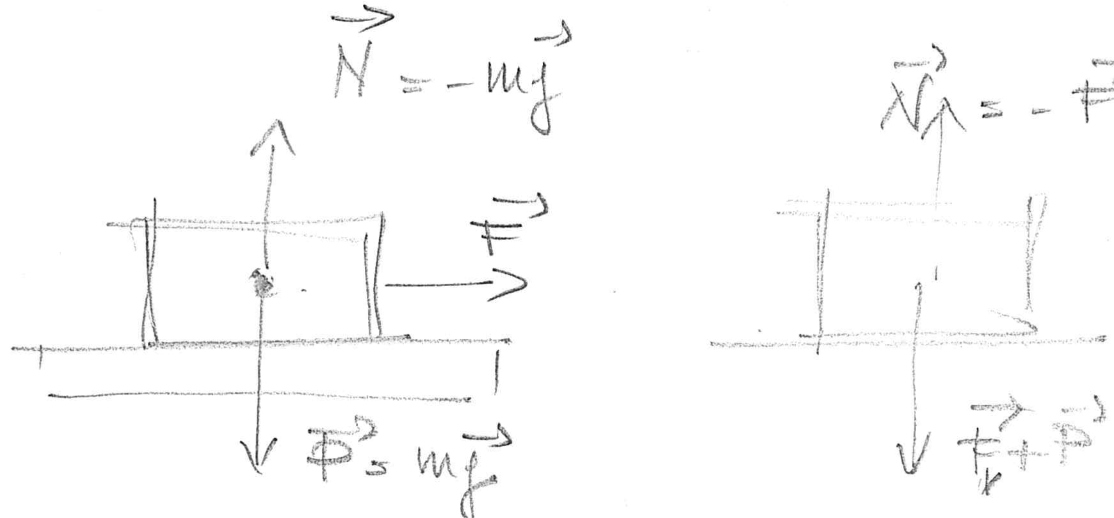
Più in generale;

$$\vec F = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec r_{12}}{|\vec r_{12}|}$$

dip. dai parametri geometrici

$$\vec P = -m \frac{G m_T}{r_T^2} \frac{\vec r_T}{r_T} = -m\vec g$$

2) Forza di attrito radente



Si osserva sperimentalmente che il corpo rimane in quiete fino a che $\vec F$ non supera una forza di intensità ~~$F_{as} = \mu_s N$~~

la condizione di eq. definita dalle leggi della dinamica dice che $\vec F_{as} = -\vec F$ fino a un valore limite $\mu_s N$ oltre il quale l'oggetto si mette in moto

Attrito

* Quindi in generale

$\vec{F}_{as} \le \mu_s N$ - diretta lungo il piano di appoggio
- verso opposto

Esempio

il libro non cade (scivola) se $\boxed{\vec{P} \le \mu_s \vec{F}}$

* Attrito dinamico

in moto $\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \hat{u}$

ove $\mu_d \le \mu_s$

direzione e verso opposto al moto (individuato dal versore velocità)

Le forze di attrito sono dovute alle forze di coesione dei materiali —
* maggiori tra materiali simili
* ridotte da lubrificanti (liquidi, gas, particolati, cuscinetti)
* liquido sinoviale ← $\mu_s \simeq 0.01$ ←

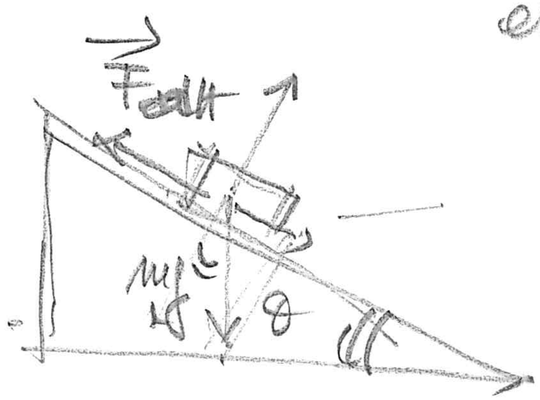
Macchinetti $\simeq$ 0.2

* Condizioni di moto in presenza di attrito –

$$\vec{F} - \vec{F}_{ad} = m\vec{a}$$

$\vec{F} = \vec{F}_{ad} \Rightarrow$ moto rettilineo uniforme

può servire a misurare empiricamente μ_d



~~$\vec{N} = \vec{F}$ cost~~

moto $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Condizione di equilibrio:

① $N + P\cos\theta = 0$ ← reazione vincolare del piano

~~Caso~~ statico:

② $F_{as} = P\sin\theta$ se $P\sin\theta \leq \mu_s P\cos\theta$

$\mu_s \geq tg\,\theta$

Corpo fermo per tutti gli angoli

$\theta < \theta_s$ t.c. $tg\,\theta_s = \mu_s$

~~Se~~ Se invece $a \neq 0$

$$N = P\cos\vartheta$$

$$mg(\sin\vartheta - \mu_d \cos\vartheta) = ma$$

affinché ci sia moto

$$\sin\vartheta - \mu_d \cos\vartheta \geq 0$$

$$\mu_d \leq tg\,\vartheta$$

Se $\mu_d = tg\,\vartheta_d$ moto <u>uniforme</u>

Dalla misura degli angoli si ricostruiscono le misure di μ_d e μ_s.

Forza di attrito viscoso

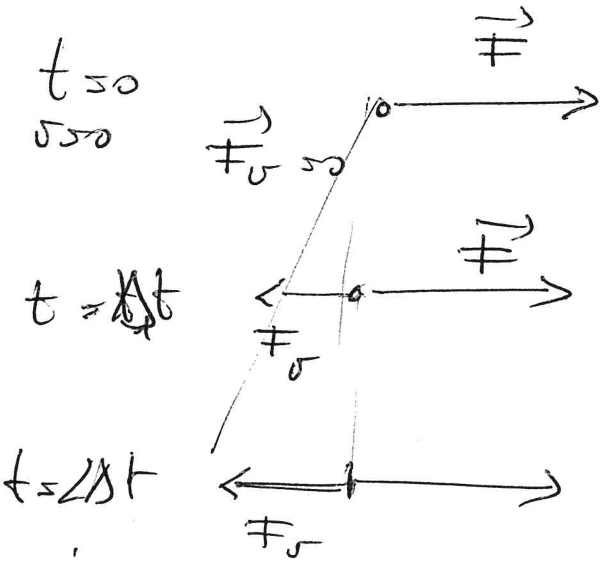
* $\vec{F}_v = -\beta \vec{v}$ $\div$ velocità
verso opposto al moto

→ caratteristica del moto degli oggetti nei fluidi

$\beta \div$ forma del corpo, proprietà del fluido

In condizioni di attrito viscoso si stabilisce un moto rett. unif. — detto talvolta di terminamento o di sedimentazione con velocità costante detta di terminamento o di sedimentazione o di deriva.

Intuitivamente



⇝ moto accelerato con $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

$v \neq 0$

⇝ moto acc., con $\vec{a} = \frac{\vec{F}-\vec{F}_v}{m} < \vec{F}$

Dopo un tempo lungo ...

$\vec{F}_v = -\vec{F} \longrightarrow \vec{a} = 0$!

* In modo analitico possiamo ricavare la legge oraria (legge di vel.) partendo dall'equazione diff. del moto. Di nuovo non abbiamo in questo caso $\underline{a = a(t)}$, ma $a = a(v)$

* Sia $\vec{F}_T$ la forza esterna di trascinam.

$$\vec{F}_T + \vec{F}_{av} = m\vec{a}$$

(nota: sul Mazzoldi $\vec{F}_T = \vec{P}$ e si discute la caduta di un ~~...~~ punto materiale in un fluido. Le relazioni sono vere se il fluido è privo di massa, altrimenti bisogna considerare anche la <u>spinta di Archimede</u>. Lo vedremo in dinamica dei fluidi. Qui vogliamo solo fissare le idee sulla ~~moto~~ legge del moto in condizioni di attrito viscoso)

Nella direzione del moto:

$$F_T - bv = ma$$

$$a_T - kv = \frac{dv}{dt}$$ avendo posto

$$a_T = F_T/m$$
$$k = b/m$$

soluzione dell'equazione diff. tramite
<u>separazione delle variabili</u>:

$$\frac{dv}{kv - a} = -dt$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{k\,dv}{kv-a} = -k\int_0^t dt$$

C.I. $v(0) = 0$

Cambio di variabili

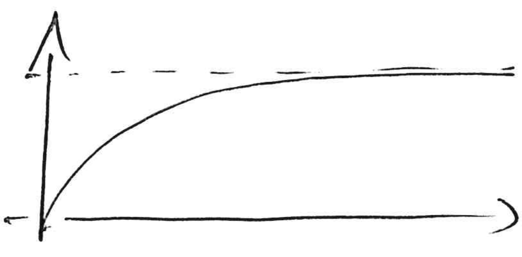
$$u = kv - a$$
$$du = k\,dv$$
$$u(0) = -a$$
$$u(t) = kv(t) - a$$

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = -kt \implies \log\frac{u(t)}{u(0)} = -kt$$

$$\frac{u(t)}{u(0)} = e^{-kt} \implies kv(t) - a = -a e^{-kt}$$

$$v(t) = \frac{a}{k}\left[1 - e^{-kt}\right]$$

$v_T = \frac{a}{k}$



velocità di transiom.