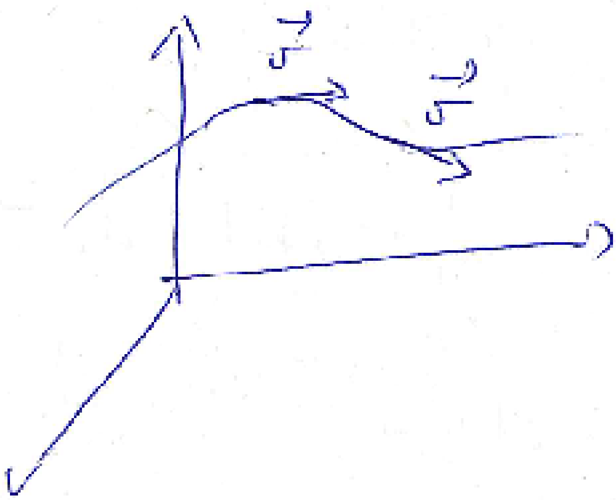
4

- Abbiamo visto che le relazioni vettoriali sono invarianti. Come lo sono le grandezze scalari (nonostante non ci ponessimo questo il problema).
- D'altro canto se un vettore si scrive esplicitamente attraverso le sue componenti che dipendono dalle coordinate – Se infatti scrivo la velocità nella sua rappresentazione intrinseca

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_T \qquad \hat{u}_T = \frac{\vec{v}}{v}$$



conosco $v = \frac{ds}{dt}$

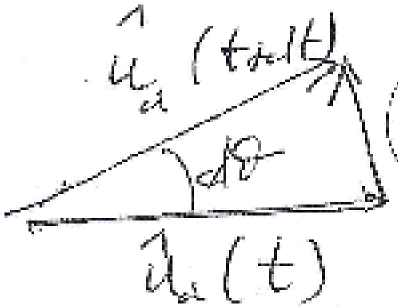
ma non conosco "in modo esplicito" la variazione di $\hat{u}_T$ (cambio di direzione)

Tuttavia l'analisi della rappresentazione intrinseca e delle sue derivate è importante per capire i moti curvilinei (cambi di direzione ~~dello spostamento~~ $d\vec{r}$ e cioè di $\vec{v}$)

Scegliamo un generico vettore e ne calcoliamo la sua derivata utilizzando la rapp. intrinseca:

$$\vec{a} = a\,\hat{u}_a \qquad \hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{a}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \underbrace{\frac{da}{dt}\,\hat{u}_a}_{\text{componente parallela}} + \underbrace{a\,\frac{d\hat{u}_a}{dt}}_{\text{componente perpendicolare}}$$



$$\vec{du} = \hat{u}_a(t+dt) - \hat{u}_a(t)$$

du è $\perp$ a $\hat{u}_a$

Arco = Corda $= |\hat{u}_a|\,d\theta = d\theta$

$$\frac{d\hat{u}_a}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{u}_\perp$$

(che non è $u_{\neq}$

RAPPRESENTAZIONE INTRINSECA

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{u}_a \equiv a\,\hat{u}_a$$

con $a \equiv$ modulo di $\vec{a}$

$\hat{u}_a \equiv$ versore di $\vec{a}$: $\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{a}$

Applicando le regole di derivazione:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\,\hat{u}_a) = \underbrace{\frac{da}{dt}\,\hat{u}_a}_{\text{componente parallela}} + \underbrace{a\,\frac{d\hat{u}_a}{dt}}$$

esprime il cambio di direzione del vettore.

Rappresentazione incrementale, finita, per capire come è diretta e quanto vale:

$$\frac{\Delta\hat{u}}{\Delta t}$$

$$\Delta\hat{u} = \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)$$

- Nel limite $\Delta t \to 0$ $\Delta\hat{u}$ è ortogonale a $\hat{u}(t)$ [e $\hat{u}(t+\Delta t)$] $\Longrightarrow$ componente ortogonale!
- Poichè $|\hat{u}| = 1$, la lunghezza della corda (arco) $|\Delta\hat{u}| = |\hat{u}|\,\Delta\theta = \Delta\theta$

$$\Longrightarrow \frac{d\hat{u}_a}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{u}_\perp$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME :

Siccome diciamo circolare $\frac{dR}{dt} = 0$

Legge oraria per la comp. radiale $R = cost.$

con "uniforme" intendiamo $\frac{d\theta}{dt} = cost \equiv \omega$

ω = velocita' angolare

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt = \theta_0 + \omega t$$

legge oraria per la componente angolare

$$\vec{v} = \omega R \vec{u}_\theta$$

velocità tangenziale costante $v = \omega R$

In coordinate cartesiane :

$$x = r \cos(\omega t + \varphi)$$
$$y = r \sin(\omega t + \varphi)$$

moto armonico semplice

$$v_x = -\omega r \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_y = +\omega r \cos(\omega t + \varphi)$$

FAI DOPO ASSIEME A ACCELERAZIONE E DOPO AVER FINITO SCOMP.

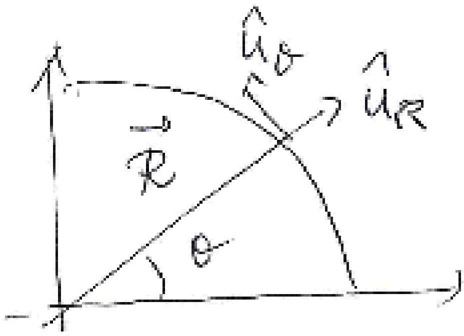
<u>Nota importante</u> : per convenzione assumo

$\Delta\theta > 0$ per rotazioni antiorarie

in conclusione

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \hat{u}_{\parallel} \frac{da}{dt} + \hat{u}_{\perp} \frac{d\theta}{dt} \qquad (*)$$

Rappresentazione in <u>coordinate polari</u>



$$\hat{u}_R = \hat{u}_{\parallel}$$
$$\hat{u}_\theta = \hat{u}_{\perp}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\,\hat{u}_R\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{dR}{dt}\,\hat{u}_R}_{\text{Velocità radiale}} + \underbrace{R\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta}_{\text{velocità tangenziale}}$$

$$= \frac{dR}{dt}\,\hat{u}_R + \omega R\,\hat{u}_\theta$$

(*) Nota : per un moto rettilineo $\frac{d\theta}{dt} = 0$

per un moto curvilineo $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ e anche ~~$\frac{da}{dt}$~~

per $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ e $\frac{dR}{dt} = 0$ $\rightarrow$ moto circolare

Non cambia il raggio

Accelerazione nel moto piano
esprime le variazioni di velocità in <u>modulo</u>
<u>e direzione</u>

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

avrà dunque, nella rappresentazione intrinseca, due componenti, parallela e ortogonale, alla velocità

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v\,\hat{u}_T\right) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} =$$

versore tangente alla traiettoria

?

$$= \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{u}_T}_{\text{VARIAZIONE DEL MODULO DELLA VELOCITÀ NELLA COMP. TANGENTE}} + \underbrace{v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N}_{\text{VARIAZIONE DELLA DIREZIONE COMP. NORMALE A }\vec{v}}$$

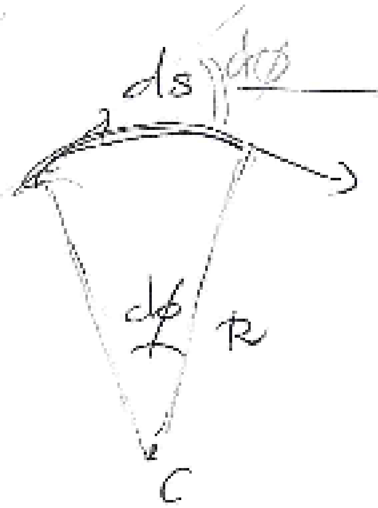
VARIAZIONE DEL
MODULO DELLA
VELOCITÀ NELLA
COMP. TANGENTE

VARIAZIONE DELLA
DIREZIONE COMP. NORMALE A $\vec{v}$
$\hat{u}_N$ è diretto verso la
concavità della traiettoria

Nota $\hat{u}_N$ è diretto all'interno della curvatura

centro di CURVATURA

raggio di curvatura ≡ raggio delle circonf. tangenti alla traiettoria p.



$\rightarrow ds = R\,d\phi$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{1}{R}\,v$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T}_{\text{Acc. tangenziale}} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\,\hat{u}_R}_{\text{Acc. centripeta}}$$

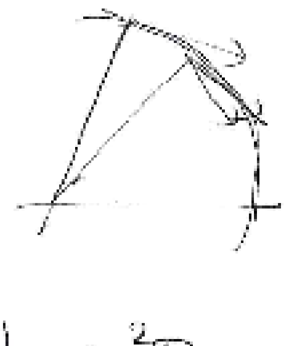
Accelerazione scomposta in comp. centrip. e tangenziale

Se $\frac{dv}{dt} = 0 \rightsquigarrow$ curvilineo uniforme

Moto circolare ~~uniforme~~ $a_c = \frac{v^2}{R}$

dove v e R sono le velocità locali.

Nel moto circolare uniforme abbiamo visto che $\vec{v} = 0\,\hat{u}_R + \omega R\,\hat{u}_\theta \Longrightarrow |v| = \omega R$



$$a_c = \omega^2 R$$

— Nelle componenti cartesiane:

$$a_x = -\omega^2 R \cos(\omega t + \varphi)$$
$$a_y = -\omega^2 R \sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow |a| = \omega^2 R$$

Esempio: caduta dei gravi $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Esercitazione}}$

$|\vec{a}| = g$ retta verticale

rivolto verso il basso

- legge oraria
- Legame posizione - velocità
- caso con $v_0 \neq 0$ - verso l'alto e basso

moto rettilineo smorzato $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Esercitazione}}$

~~Moto parabolico: composizione in più dim.~~

Dopo in coord. cartesiane

Ma Dopo l'accelerazione, potrei definire

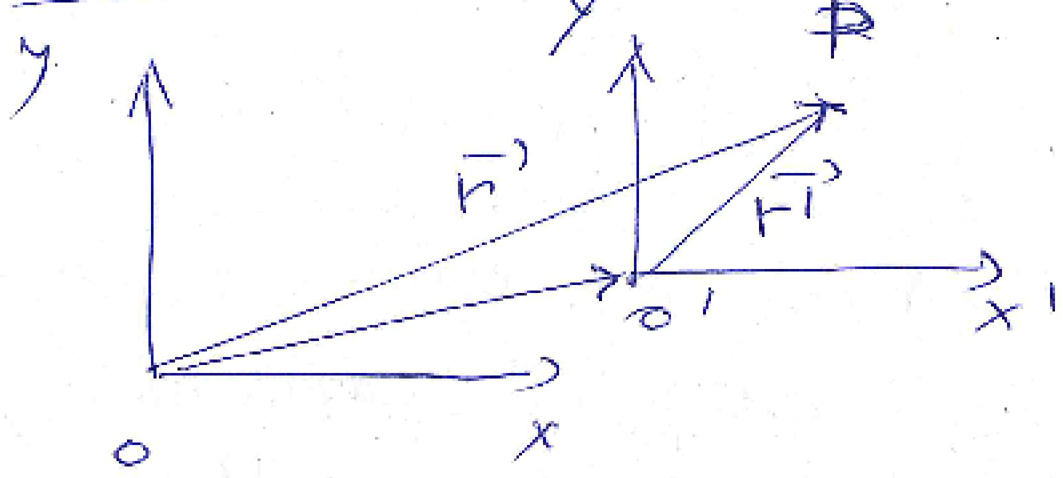
$$\vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt},$$

$$\vec{c} = \frac{d\vec{b}}{dt},$$

...

Ma non lo faccio $\Longrightarrow$ interpretazione dinamica dei moti

Coord.



$$\vec{r} = \underline{\vec{OO'}} + \vec{r'}$$

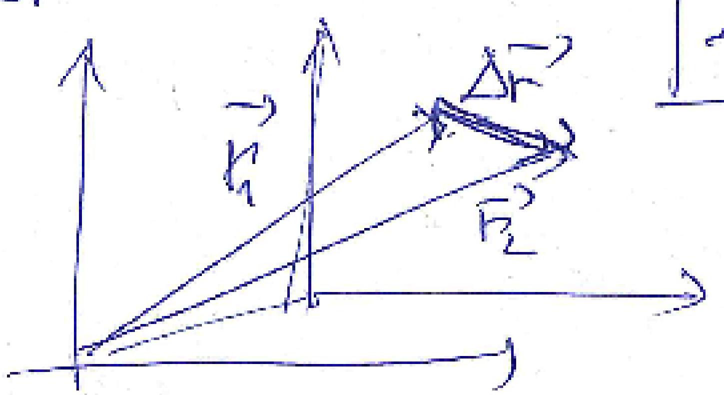
→ cambio di origine

Relazione esplicitata sulle coord.

$$\begin{cases} x = x_{O'} + x' \\ y = y_{O'} + y' \\ z = z_{O'} + z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \\ z' = z - z_{O'} \end{cases}$$

$\Delta\vec{r} = ?$

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$



LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

$$\underline{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}}$$

le velocità si sommano vett. GALILEO

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,'$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$$

le accelerazioni sono le medesime

imp. conseguenze in dinamica

Nota $dt = dt'$

$$\Delta \vec{r}\,' = \vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,' =$$

$$= (\vec{r}_2 - \vec{OO'}) - (\vec{r}_1 - \vec{OO'})$$

$$= \Delta \vec{r} \quad \text{invariante}$$

caso più complicato

Sist rif in moto relativo MOTO RETT. UNIF

$\vec{u}$ $\quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \text{cost}$ ~~moto~~

Assumiamo ~~ce~~ $\vec{i} = \vec{i}\,'$ // ~~ex~~

(non prod q. se v = cost

$$\vec{OO'} = \vec{u}\,t \qquad t = 0 \quad O' = O$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{OO'}$$

1) $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}\,t$ cambio di pos.

2) velocità:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d\vec{OO'}}{dt}$$

$$= \text{''} + \vec{u}\,t = \vec{v}\,' + \vec{u}$$