Es. n 1

(a) L'energia meccanica è conservata:

$$E_k(d) + E_p(d) = E_k(i) + E_p(i)$$

Nella configurazione iniziale $E_k(i) = 0$
e possiamo scegliere $E_p(i) = 0$, cioè $d = \infty$
riferimento per la misura dell'energia potenziale

Dunque $E_k(d) = -E_p(d)$

$$= G \frac{m_1 m_2}{d}$$

(b) La quantità di moto totale è conservata, $\vec{P}(i) = \vec{P}(f)$, inoltre $\vec{P}(i) = 0$. Dunque in d:

$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 0$ e poiché i corpi hanno la medesima direzione: $v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$

Mettendo a sistema con $E_k(d) = G\frac{m_1 m_2}{d}$, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = G \frac{m_1 m_2}{d} \\ v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 \end{cases}$$

Per sostituzione (e per simmetria):

$$v_2 = m_1 \left[\frac{2G}{d} \frac{1}{m_1 + m_2}\right]^{1/2}$$

$$v_1 = -m_2 \left[\frac{2G}{d} \frac{1}{m_1 + m_2}\right]^{1/2}$$

Es. n° 2 (Senza soluzione numerica)

(a) Conservazione dell'energia meccanica

$$E_k(i) + E_p(i) = E_k(f) + E_p(f)$$

Poiché l'asta è inizialmente ferma $E_k(i) = 0$, da cui:

$$E_k(f) = E_p(i) - E_p(f) = Mg\Delta h$$

ove $\Delta h = l/2$ è la variazione di quota del centro di massa. Esprimendo l'energia cinetica come energia del moto di rotazione attorno al punto A:

$$\frac{1}{2} I_A \omega^2 = Mg\frac{l}{2}$$

Cioè $\omega^2 = Mgl/I_A$ (*)

ove $I_A = I_{CM} + M l_{CM}^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2$

Sostituendo in (*): $(\omega l)^2 = 3gl$

La velocità del punto B è dunque

$$v_{B,i} = \omega l = \sqrt{3gl}$$

(b) Dopo l'urto, massa m e asta nel punto B hanno la medesima velocità

$$v_{B,f} = \omega_f l$$

→ segue

Rispetto a un polo in A, il momento della reazione vincolare è nullo e il momento angolare è conservato nell'urto:

$$I_A \omega_i = (I_A + I_m)\,\omega_f \qquad \text{con } I_m = m\ell^2$$

Dunque $\displaystyle v_{B,f} = \frac{I_A}{I_A + m\ell^2}\, v_{B,i} = \frac{M}{M+3m}\, v_{B,i}$

(c) L'impulso della forza in A è uguale alla variazione della quantità di moto nell'urto:

$$\vec{J}_n = \Delta\vec{P}$$

$$\Delta P = \underbrace{m v_{B,f} + M\omega_f \frac{\ell}{2}}_{\text{q.tà di moto dopo l'urto}} \; - \underbrace{M\omega_i \frac{\ell}{2}}_{\text{q.tà moto iniziale (= q.tà moto del CM dell'asta)}}$$

$$\Delta P = \left(m + \frac{M}{2}\right) v_{B,f} - \frac{M}{2} v_{B,i} =$$

$$= \left[\left(m + \frac{M}{2}\right)\frac{M}{M+3m} - \frac{M}{2}\right] v_{B,i} =$$

$$= -\frac{mM}{2(M+3m)}\, v_{B,i} < 0$$

ΔP è discorde da $v_{B,i}$, cioè verso destra nella figura

Es n. 3

(a) Moto di rotazione attorno all'asse con vincolo:

$$\vec{\tau}_V = I_V \vec{\alpha}$$

$$-m_T g l_{CM} \sin\vartheta = I_V \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

ove • $m_T = 3m$ massa totale del sistema

• $l_{CM} = \frac{mr + M(2r+R)}{m+M} = \frac{mr + 2m(4r)}{3m} = 3r$

posizione del centro di massa rispetto al vincolo

• $I_V = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M(2R)^2 = \frac{75}{2} m r^2$

momento di inerzia rispetto al vincolo

(b) Per piccole oscillazioni $\sin\vartheta \simeq \vartheta$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \underbrace{\frac{m_T g l_{CM}}{I_V}}_{\omega^2} \vartheta = 0$$

eq. del moto armonico

(c) Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_V}{m_T g l_{CM}}} = 2\pi \left[\frac{25}{6}\frac{r}{g}\right]^{1/2}$$

Es. n 4

Per il puro rotolamento $a_{CM} = R\,\alpha_{CM}$. Scegliendo il polo nel punto di contatto con il piano, le equazioni del moto angolare e traslazionale sono:

$$\begin{cases} (r+R)F = I_s \dfrac{a_{CM}}{R} & (1) \\ f + F = m\,a_{CM} & (2) \end{cases}$$

dove $I_s = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$ e' il momento di inerzia dello yo-yo rispetto al punto di contatto e f è la forza di attrito, assunta concorde con F

(a) Dall'eq. (1) : $a_{CM} = \dfrac{R(R+r)}{I_s}F =$

$$= \frac{5}{7}\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{F}{m}$$

(b) Sostituendo in (2) :

$$f = m a_{CM} - F = \frac{5}{7}\left(1+\frac{r}{R}\right)F - F =$$

$$= \frac{5}{7}\left(\frac{r}{R} - \frac{2}{5}\right)F$$

Dunque $f > 0$, cioè concorde con F e con il moto del CM se $\left(\frac{r}{R} - \frac{2}{5}\right) > 0$, ossia $r > \frac{2}{5}R$

Altrimenti $f < 0$ (discorde da F)