Università degli Studi di Milano–Bicocca

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Fisica

Relazione di Laboratorio

Laboratorio di Misure Nucleari e Subnucleari
Effetto Compton

Autori:
Valentina Arosio
Giovanna Boz
Marco Cè

Anno Accademico 2011–2012

Sommario

La relazione presenta i risultati sull'effetto Compton ottenuti nell'esperienza di laboratorio. La tecnica utilizzata prevede una sorgente che decade β^+, per sfruttare la coincidenza dei fotoni di annichilazione. La fase preliminare dell'esperimento consiste nella caratterizzazione e calibrazione dei diversi componenti dell'apparato sperimentale. Particolare attenzione è stata dedicata allo studio dell'efficienza intrinseca degli scintillatori; si è inoltre effettuata un'analisi approfondita sull'errore dell'angolo di scattering Compton, anche attraverso una simulazione Monte Carlo. L'ottimizzazione degli strumenti è necessaria per migliorare le misure sperimentali che permettono di verificare la relazione energia-angolo e la formula della sezione d'urto di Klein-Nishina.

Indice

1 Introduzione **3**
- 1.1 Contesto storico . . . 3
- 1.2 Interazione fotone-materia . . . 4
- 1.3 Effetto Compton . . . 6

2 Setup sperimentale **8**
- 2.1 Tecnica e sorgente . . . 8
- 2.2 Apparato sperimentale . . . 9

3 Caratterizzazione **12**
- 3.1 Tensione di lavoro . . . 12
- 3.2 Scelta dello shaping time . . . 14
- 3.3 Regolazione della finestra di energia . . . 16

4 Calibrazione **18**
- 4.1 Calibrazione iniziale . . . 18
- 4.2 Drift e possibili cause . . . 19
- 4.3 Calibrazioni periodiche e considerazioni . . . 20

5 Analisi geometrica **22**
- 5.1 Angolo solido . . . 22
- 5.2 Dispersione angolare . . . 23

6 Efficienza **26**
- 6.1 Efficienza vs distanza per il 2" e per il 3" . . . 26
- 6.2 Efficienza vs energia per il 3" . . . 28

7 Misure **31**
- 7.1 Relazione energia-angolo . . . 32
- 7.2 Verifica della Klein-Nishina . . . 34
- 7.3 Misure in trasmissione . . . 37

8 Conclusioni **38**

A Teoria dell'effetto Compton **39**

B Approfondimento sulla dispersione angolare **42**
- B.1 Metodo analitico . . . 42
  - B.1.1 Contributo dello scatteratore, piano orizzontale descritto dalle coordinate (y, z) . . . 43
  - B.1.2 Contributo dello scatteratore, piano verticale e asse x . . . 44
  - B.1.3 Contributo del 3", piano orizzontale descritto dalle coordinate (y, z) 46
  - B.1.4 Contributo del 3", piano verticale e asse x . . . 46

B.1.5 Somma dei contributi 49
B.2 Metodo Monte Carlo 50

C Torio in equilibrio secolare **52**

Bibliografia **55**

1 Introduzione

1.1 Contesto storico

Le prime ipotesi sulla natura della luce risalgono ai tempi di Newton, il quale ritiene che la radiazione luminosa è formata da corpuscoli. Grazie al contributo di Robert Hooke e Christiaan Huygens, ma soprattutto alla teoria elettromagnetica di Maxwell, alla fine dell'800 è consueto considerare la luce una porzione dello spettro elettromagnetico, quindi un fenomeno esclusivamente ondulatorio.

Nel 1905 Einstein, con il suo articolo sull'effetto fotoelettrico, estende l'idea di Planck di quantizzazione dell'energia alla natura di tutti i fenomeni elettromagnetici: il quanto di energia del campo elettromagnetico è il *fotone*. Secondo le relazioni che lui stesso introduce, il fotone si comporta come una particella di energia $E = h\nu$ e momento $p = \frac{h}{\lambda}$, dove ν e λ sono rispettivamente la frequenza e la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica. Questa novità viene difficilmente accettata dagli scienziati di formazione classica, tra cui Arthur Compton.

Negli anni '20 Compton si trova al Cavendish Laboratory per studiare l'assorbimento e la diffusione dei raggi γ da parte della materia e osserva un aumento di lunghezza d'onda nella radiazione uscente. Sostenitore convinto della teoria di Maxwell, non accetta che il fenomeno di diffusione implichi una variazione di lunghezza d'onda e tenta di spiegare l'evidenza sperimentale con l'emissione di una nuova radiazione fluorescente.

In seguito, trasferitosi in America, decide di approfondire questi studi utilizzando un fascio monocromatico di raggi X. Osserva che il fenomeno è ancora presente anche se in maniera ridotta, ma sopratutto che la radiazione emessa, a differenza della normale fluorescenza, è polarizzata. Ciò complica ulteriormente il tentativo di spiegare classicamente il risultato, in quanto richiede l'emissione immediata della radiazione fluorescente.

Nel 1922 decide di utilizzare uno spettrometro di Bragg per studiare direttamente, e non tramite misure di assorbimento o attenuazione, la variazione della lunghezza d'onda dei raggi X in funzione dell'angolo. Sfruttando l'emissione monocromatica della riga K_α del molibdeno ($\lambda = 0.708\,\text{Å}$), misura inizialmente una lunghezza d'onda di $\lambda = 0.95\,\text{Å}$ per la radiazione diffusa a 90°, del 35 % maggiore. Per giustificare questo valore ricorre alla relazione di Einstein e al principio di conservazione dell'energia e propone un'interpretazione del processo a due stadi: il primo quantistico e il secondo ondulatorio.

La correzione di un errore sperimentale lo indirizza verso un modello puramente quantistico: infatti la variazione di lunghezza d'onda trovata sperimentalmente non è del 35 % ma di un ordine di grandezza inferiore. Per ottenere teoricamente questo risultato aggiunge il principio di conservazione della quantità di moto oltre a quello di conservazione dell'energia ricavando esplicitamente la formula della variazione di lunghezza d'onda in funzione dell'angolo di diffusione θ: $\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$.

Compton pubblica nel 1923 l'articolo intitolato *Una teoria quantistica della diffusione dei raggi X da parte di elementi leggeri* nel quale riassume così le problematiche dell'interpretazione classica:

> [...] un cambiamento di lunghezza d'onda nella diffusione è direttamente contrario alla teoria della diffusione di Thomson, perché questa richiede che gli elettroni diffusori [...] diano origine a radiazione esattamente della stessa frequenza della radiazione incidente su di loro. Né c'è modificazione della teoria [...] che suggerisca una via d'uscita da questa difficoltà. Tale fallimento fa apparire improbabile che una spiegazione soddisfacente della diffusione dei raggi X possa essere raggiunta sulla base dell'elettrodinamica classica.

La corretta spiegazione quantistica del fenomeno è sintetizzata da Compton nelle seguenti righe:

> [...] possiamo supporre che ogni particolare quanto di raggi X [...] trasferisca tutta la sua energia ad un particolare elettrone. Questo elettrone a sua volta invierà il raggio in una data direzione, ad un certo angolo col fascio incidente. La deviazione del cammino del quanto di radiazione risulta in un cambiamento della sua quantità di moto. Di conseguenza, l'elettrone diffusore rinculerà con una quantità di moto eguale al cambiamento di quantità di moto del raggio X. L'energia del raggio deviato sarà uguale a quella del raggio incidente meno l'energia cinetica del rinculo dell'elettrone diffusore; e poiché il raggio deviato deve essere un quanto completo, la frequenza sarà ridotta nello stesso rapporto dell'energia. Così secondo la teoria quantistica ci dobbiamo aspettare che la lunghezza d'onda dei raggi X diffusi sia maggiore di quella dei raggi incidenti.

Questo fenomeno, noto come effetto Compton, è considerato un'importante prova sperimentale della natura corpuscolare della luce e ha contribuito all'affermarsi della meccanica quantistica.

1.2 Interazione fotone-materia

I fotoni sono particelle neutre, quindi non sono soggette alla forza di Coulomb. Attraversando la materia, a differenza delle particelle cariche pesanti che perdono energia in modo continuo per ionizzazione, interagiscono in modo catastrofico: le proprietà del fotone incidente sono alterate radicalmente. Sperimentalmente i fotoni sono rivelabili attraverso l'energia che cedono agli elettroni o ai nuclei del bersaglio oppure ai prodotti di reazione nucleari.

Si descrive l'interazione introducendo il concetto di sezione d'urto σ, ossia l'area efficace in cui avviene lo scattering o l'assorbimento. La probabilità infinitesimale di interazione è costante in tutto il materiale e pari a

$$dP_{int} = n\sigma dx, \tag{1}$$

dove n è la densità volumetrica di centri diffusori e dx è lo spessore infinitesimo del materiale attraversato. Quindi il numero di fotoni che interagiscono in x è proporzionale alla probabilità dP_{int} e al numero di fotoni $N(x)$ che non hanno ancora interagito a profondità x:

$$dN = -N(x)dP_{int} = -N(x)n\sigma dx, \tag{2}$$

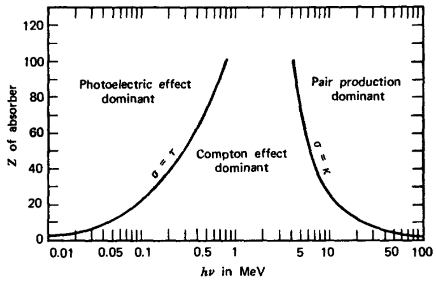


Figura 1: Importanza relativa dei tre tipi di interazione dei fotoni con la materia in funzione dell'energia e del numero atomico Z del materiale. Le linee mostrano la Z e l'energia a cui due sezioni d'urto si equivalgono.

che integrata ha come soluzione l'esponenziale

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x}, \tag{3}$$

con N_0 numero di fotoni incidenti e $\mu = n\sigma$ *coefficiente d'attenuazione*, proprietà caratteristica del materiale. È consuetudine tabulare il *coefficiente d'attenuazione massico* $\mu' = \frac{\mu}{\rho}$ per eliminare la dipendenza dalla densità ρ del determinato materiale.

I meccanismi di interazione dei fotoni sono molteplici, ma quelli dominanti sono:

- effetto fotoelettrico;
- effetto Compton;
- produzione di coppie.

Il coefficente di attenuazione risulta quindi essere la somma di tre contributi:

$$\mu = \mu_{\text{ph}} + \mu_{\text{Compton}} + \mu_{\text{pp}}. \tag{4}$$

La fisica che regola i tre processi è differente, perciò ci aspettiamo diversi andamenti di ciascuna sezione d'urto in funzione dell'energia del fotone e dalle caratteristiche del materiale (densità ρ e numero atomico Z). Per quanto riguarda l'effetto fotoelettrico si ha $\sigma_{\text{ph}} \propto \rho Z^5 E^{-3.5}$, con discontinuità in corrispondenza delle energie di legame degli elettroni nelle shell più interne. La sezione d'urto dell'effetto Compton è data da $\sigma_{\text{Compton}} \propto \rho Z E^{-1}$. La produzione di coppia, invece, è un processo a soglia: avviene con un'area efficace pari a $\sigma_{\text{pp}} \propto \rho Z^2 \ln E$ quando l'energia del fotone incidente è superiore a $2m_e = 1022\,\text{keV}$.

Nella Figura 2 è riportato il coefficiente d'attenuazione massico (proporzionale a σ) in funzione dell'energia. Come la regione di importanza di un processo rispetto ad un altro varia in funzione della Z del materiale e dell'energia del fotone è riportato in Figura 1. Dalle figure 2 e 1 si evince che l'effetto fotoelettrico è dominante fino ad energie di qualche centinaio di keV, la produzione di coppie sopra diversi MeV e l'effetto Compton nella regione intermedia.

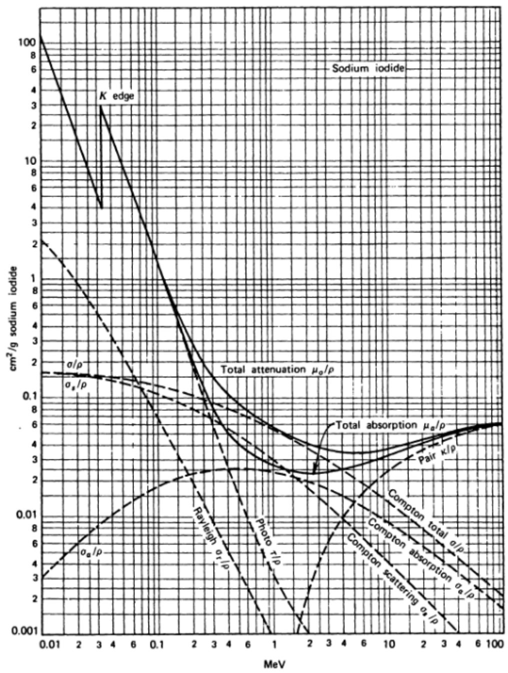


Figura 2: Coefficiente d'attenuazione massico in funzione dell'energia per lo ioduro di sodio. Si noti come cambiano i contributi dei tre diversi processi di interazione al variare dell'energia.

1.3 Effetto Compton

L'effetto Compton consiste nello scattering di un fotone incidente con un elettrone del materiale. Il fotone trasferisce momento ed energia all'elettrone, che rincula, e viene deflesso di un angolo θ rispetto alla direzione iniziale. Il processo è schematizzato in Figura 3. Assumendo l'elettrone inizialmente libero e a riposo, applicando la conservazione

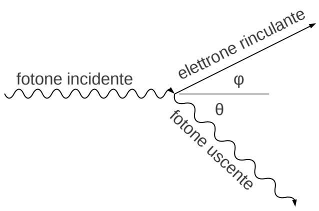


Figura 3: Rappresentazione schematica del processo di scattering Compton.

del quadrimomento si può calcolare l'energia del fotone uscente $h\nu'$ in funzione di θ e dell'energia iniziale $h\nu$ ottenendo

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}. \tag{5}$$

Da questa formula si possono trarre alcune considerazioni: l'energia minima del fotone uscente si ottiene per il valore di $\theta = \pi$; il fotone diffuso ha energia massima quando $\theta = 0$; quando $h\nu \simeq m_e c^2$ si ha lo scattering Compton sopra descritto, mentre se $h\nu \ll m_e c^2$ si ottiene la formula classica dello scattering Thomson.

La probabilità dell'effetto Compton dipende linearmente dal numero di centri di scattering all'interno del materiale diffusore (ovvero dal numero atomico Z) e dall'inverso dell'energia del fotone. Quindi risulta essere il tipo d'interazione dominante a bassi Z e per valori di energia intermedi (si veda Figura 1). La sezione d'urto differenziale $d\sigma$ di fotoni non polarizzati e diffusi all'interno di un angolo solido infinitesimo $d\Omega$ è stata calcolata per la prima volta da Oskar Klein e Yoshio Nishina[1] nel 1928 ed è quindi nota come *formula di Klein-Nishina*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_c^2}{2}\left(\frac{h\nu'}{h\nu}\right)^2\left(\frac{h\nu'}{h\nu} + \frac{h\nu}{h\nu'} - \sin^2\theta\right), \tag{6}$$

dove $r_c = \frac{\alpha\hbar c}{m_e c^2} = 2.8179\,\text{fm}$ è il raggio classico dell'elettrone. La Figura 4 mostra la dipendenza angolare della sezione d'urto per fotoni con diverse energie. È evidente come la simmetria $\theta \to \pi - \theta$ presente classicamente per fotoni a bassa energia (linea rossa) si perda ad alta energia (linea rosa) e la sezione d'urto risulti quindi piccata in avanti. Nell'Appendice A riportiamo il calcolo esplicito, ottenuto valutando i diagrammi di Feynman a livello albero per l'effetto Compton, che porta alla sezione d'urto (6).

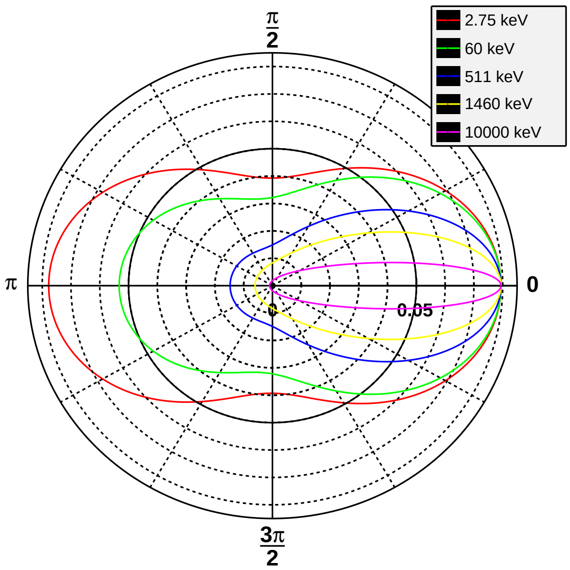


Figura 4: Grafico polare della sezione d'urto differenziale in funzione dell'angolo per fotoni incidenti a diverse energie. L'asse radiale è in barn.

[1] Klein, O; Nishina, Y (1929). *Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac.* Z. Phys. 52 (11-12): 853 and 869. doi:10.1007/BF01366453.

2 Setup sperimentale

2.1 Tecnica e sorgente

La tecnica per realizzare sperimentalmente l'effetto Compton consiste nel fare incidere un fascio di fotoni proveniente da una sorgente radioattiva su un bersaglio che funge da scatteratore. I fotoni emergenti sono rivelati tramite uno scintillatore A posto a vari angoli rispetto alla direzione dei fotoni incidenti sul bersaglio. Lo scintillatore fornisce una misura di energia che, al variare dell'angolo, permette di verificare la (5) e un rate di eventi che è correlato con la sezione d'urto (6).

I fotoni provengono da una sorgente radioattiva di ^{22}Na, che decade con due diverse modalità [1]:

$$
\begin{aligned}
{}^{22}_{11}\mathrm{Na} &\longrightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne}^* + \mathrm{e}^+ + \nu_e \qquad \mathrm{BR} = 89.90\%,\\
{}^{22}_{11}\mathrm{Na} + \mathrm{e}^- &\longrightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne}^* + \nu_e \qquad \mathrm{BR} = 10.10\%.
\end{aligned}
$$

Il Neon in uno stato eccitato decade quasi istantaneamente sullo stato fondamentale emettendo un fotone

$$
{}^{22}_{10}\mathrm{Ne}^* \longrightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + \gamma(1274\,\mathrm{keV}).
$$

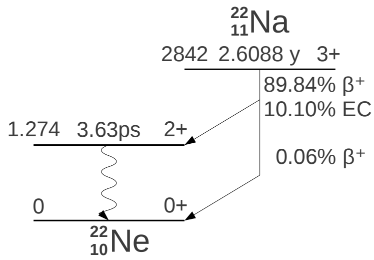


Figura 5: Schema di decadimento del $^{22}_{11}$Na.

Il positrone emesso nel decadimento β^+ forma uno stato legato, chiamato *positronio*, con un elettrone del materiale; il positronio decade in due fotoni back-to-back di energia 511 keV ciascuno con una vita media di 125 ps.[2] Il decadimento del positronio permette di utilizzare un metodo di coincidenza. Si posiziona uno scintillatore B verso la sorgente opposto al bersaglio. Per ogni fotone di annichilazione che incide sul bersaglio, B misura un segnale dovuto al fotone emesso in direzione opposta. Utilizzando questo segnale come gate, degli eventi che lo scintillatore A osserva, sono registrati solo quelli contemporanei all'annichilazione del positronio.

[2] Lo stato legato con spin antiparalleli ($^1\mathrm{S}_0$) è noto come *parapositronio* e decade prevalentemente in due γ in 125 ps. Lo stato legato con spin paralleli ($^3\mathrm{S}_1$) si chiama *ortopositronio* e decade in tre γ con una vita media di 142 ns. La probabilità di decadimento in quattro o più fotoni è trascurabile.

2.2 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale è costituito da:

- due cristalli scintillanti cilindrici di NaI(Tl) accoppiati a due fotomoltiplicatori. Uno scintillatore (B) ha diametro ed altezza di 2", modello Teledyne Brown Engineering 8S8P2, e l'altro (A) di 3", modello Teledyne Brown Engineering 12S12P3;
- due ORTEC 276 che alimentano i fotomoltiplicatori e preamplificano il segnale dell'ultimo dinodo. Forniscono in uscita anche un segnale proveniente direttamente dall'anodo;
- un alimentatore ad alta tensione ORTEC 556 a singolo canale;
- un amplificatore e formatore di segnale ORTEC 570;
- un amplificatore/TISCA Silena 7616;
- un Multichannel Analyzer (MCA) inserito come scheda di espansione del PC utilizzato per acquisire uno spettro tramite il software MAESTRO;
- uno chassis in standard NIM che alimenta i moduli.

L'attività nominale della sorgente di ^{22}Na al momento dell'acquisto (1 luglio 2010) era di 413 kBq; una misurazione più recente (12 Gennaio 2012) fornisce il valore di 274.5 kBq. L'attività della sorgente può essere calcolata ad ogni istante di tempo t attraverso la formula

$$A(t) = A(0) \cdot exp\left(-\frac{t\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}}\right) = A(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$

dove $t_{\frac{1}{2}}$ e τ rappresentano rispettivamente il tempo di dimezzamento e la vita media della sorgente. Per la sorgente utilizzata $t_{\frac{1}{2}} = 950.5$d. L'attività è stata calcolata ogni volta in base al tempo trascorso dal 12 Gennaio 2012 al giorno della misura.

Come scatteratore sono utilizzati due mattoncini $20\,\text{cm}^3 \times 10\,\text{cm}^3 \times 5\,\text{cm}^3$ di Pb; la scelta è ricaduta su questo materiale poiché, grazie all'alta densità di centri diffusori, favorisce l'interazione dei raggi γ al suo interno.

In Figura 6 è rappresentata schematicamente la disposizione sperimentale degli strumenti, di cui ne sono riportate due fotografie in Figura 7.

Lo scintillatore da 3" è fissato alla distanza di 50 cm dallo scatteratore. Il suo preamplificatore fornisce un impulso in ingresso all'ORTEC 570, che si occupa della formatura ed amplificazione del segnale preferendo un'informazione energetica rispetto ad una temporale. Un cavo coassiale collega l'uscita dell'amplificatore all'ingresso principale dell'MCA. Al fine di ridurre il rate di eventi di fondo, il 3" è schermato con un *castello* di mattoncini di Pb. Questo implica la comparsa nello spettro di un picco a 79 keV dovuto ai raggi X caratteristici emessi dal Pb.

Lo scintillatore da 2", la sorgente e lo scatteratore sono collineari. La sorgente è posta a 25 cm dal 2" e a 20 cm dal bersaglio. Le distanze sono scelte in modo che l'angolo

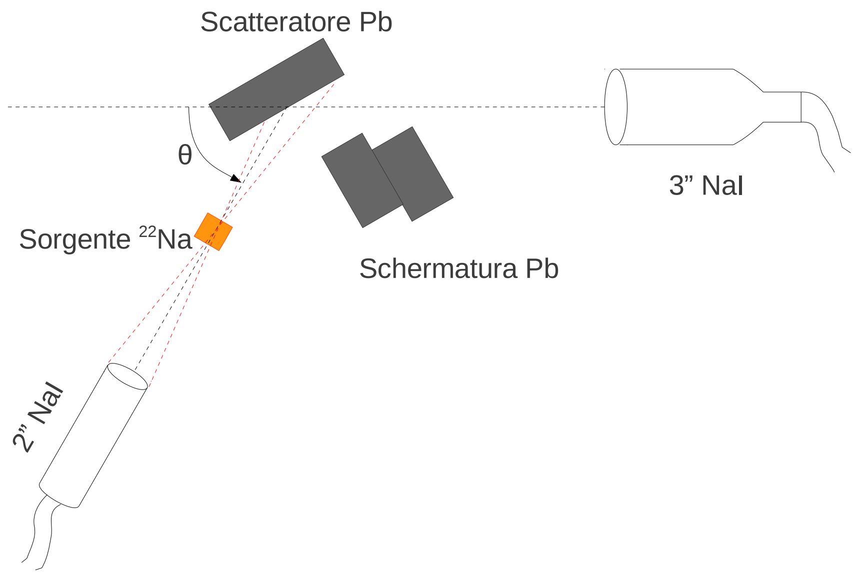


Figura 6: Apparato sperimentale.

solido sotteso allo scintillatore è minore rispetto all'angolo solido opposto che si forma con lo scatteratore. Così facendo si ha la certezza che, quando un fotone di annichilazione interagisce nel cristallo da 2", il γ emesso in direzione opposta colpisce il target. Per variare l'angolo di scattering Compton, θ_C, la sorgente e lo scintillatore da 2" vengono ruotati sul piano attorno allo scatteratore. Lo scatteratore è orientato ad un angolo di $\frac{\theta_C}{2}$, in modo da minimizzare la perdita di eventi a causa dell'assorbimento dei fotoni nel materiale.

Il segnale proveniente dall'uscita preamplificata del 2" entra nel Silena, il quale è configurato per formare un segnale veloce (0.5 µs) prediligendo l'informazione temporale rispetto a quella energetica. All'interno della stessa scheda logica è contenuto un *TIming Single Channel Analyzer* (TISCA) che produce un segnale logico se il picco del segnale formato rientra in una finestra regolabile. I due potenziometri che regolano la soglia e l'ampiezza della finestra sono impostati in modo che il segnale logico viene generato quando la tensione corrisponde a un evento intorno a 511 keV. Il segnale logico risultante entra nell'MCA con la funzione di gate. Impostando in MAESTRO il funzionamento in coincidenza, i segnali acquisiti dallo scintillatore da 3" vengono registrati solo quando il gate è aperto, il che comporta un abbattimento del rate. Infatti il rate del fondo risulta moltiplicato per il *duty cycle* del gate, mentre quello del segnale è proporzionale all'efficienza del 2". Si ottiene così un miglior rapporto $\frac{S}{N}$. Oltre agli eventi dovuti all'effetto Compton, con questa tecnica si è sensibili anche ai γ da 1274 keV emessi in maniera isotropa e contemporaneamente ai fotoni di annichilazione. Per schermare il 3" dalla radiazione diretta della sorgente si pongono dei mattoni di Pb sulla congiungente sorgente-3".

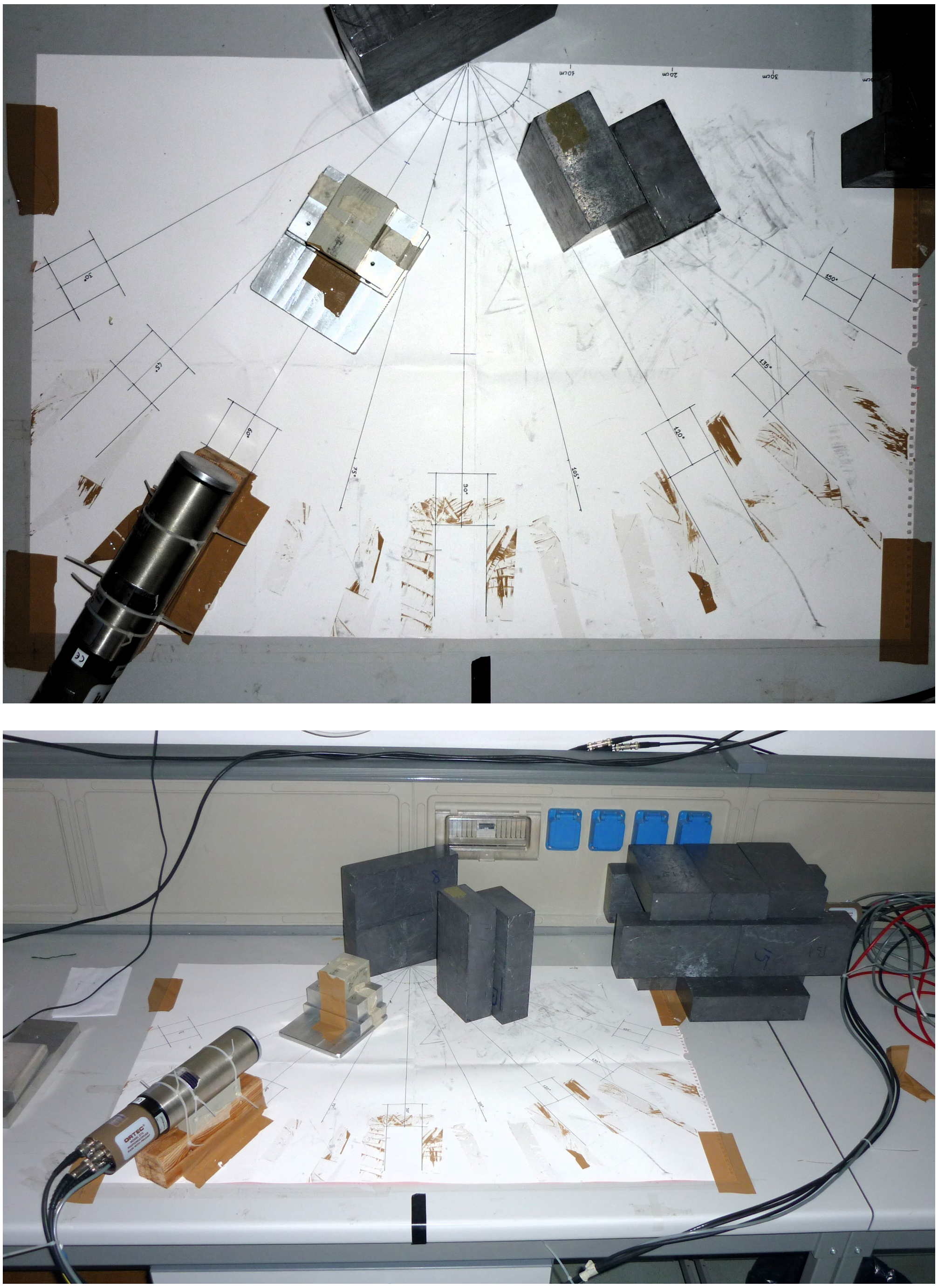


Figura 7: Fotografie dell'apparato sperimentale.

3 Caratterizzazione

I parametri su cui si può agire nella catena elettronica sono: la tensione di lavoro, unica per i due scintillatori; lo *shaping time* per la formatura dei due segnali; la soglia E_{low} e l'apertura ΔE della finestra del TISCA. Dove possibile, i valori sono scelti per ottimizzare il rapporto $\frac{S}{N}$.

3.1 Tensione di lavoro

Teoricamente la risposta dello scintillatore all'impulso dovuto al rilascio d'energia di una particella monoenergetica è una δ di Dirac. Sperimentalmente subentrano altri fattori che allargano la funzione di risposta peggiorando la risoluzione, definita come

$$R = \frac{\text{FWHM}}{E_{\text{picco}}}, \tag{8}$$

dove FWHM (*Full Width Half Maximum*) è la larghezza della distribuzione a media altezza e E_{picco} è l'energia del picco della curva.

Le tre cause principali di deterioramento della risoluzione sono:

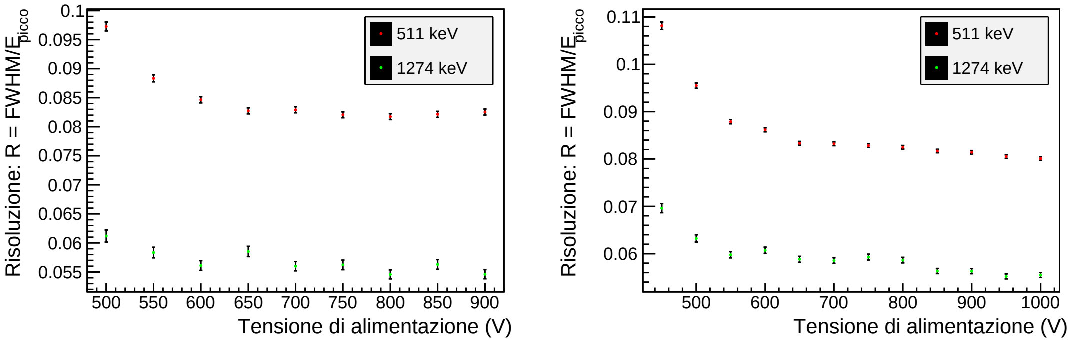
- carattere statistico, irriducibile e quindi più importante. È legato al fatto che la carica generata nel rivelatore da un quanto di radiazione non è una variabile continua, ma è rappresentata da un numero discreto di portatori di carica. A parità di energia rilasciata il numero delle cariche generate fluttua poiché il processo si può considerare poissoniano in prima approssimazione. In uno scintillatore il fenomeno che domina la componente statistica della risoluzione energetica è la produzione di fotoelettroni nel fotocatodo poiché è il punto in cui i portatori di informazione sono in numero minore.
- rumore elettronico in serie e in parallelo dovuto alle componenti passive del sistema rivelatore-catena elettronica.
- carattere sistematico, dovuto ad imperfezioni del cristallo e del fotomoltiplicatore, a risposte diverse nelle varie regioni del volume attivo, alla deriva del guadagno del fotomoltiplicatore e alla mancanza di stabilità di tutta la catena elettronica.

La risoluzione complessiva è data dalla somma in quadratura di questi tre contributi.

Il metodo utilizzato per determinare la tensione di lavoro consiste nell'acquisire uno spettro della sorgente di ^{22}Na per la durata di 300 s a diverse tensioni. Lo spettro ha due evidenti picchi nei canali corrispondenti alle energie 511 keV e 1274 keV; dal fit con una gaussiana si ottiene il valore della FWHM in canali attraverso la formula

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2.35\sigma \tag{9}$$

e si calcola la risoluzione. Assumendo che ci sia linearità tra i canali dell'MCA ed energia depositata, R si ottiene dal rapporto di due grandezze espresse in canali. In un grafico si plotta l'andamento della risoluzione in funzione della tensione; il punto ottimale è



(a) Scintillatore da 2". **(b)** Scintillatore da 3".

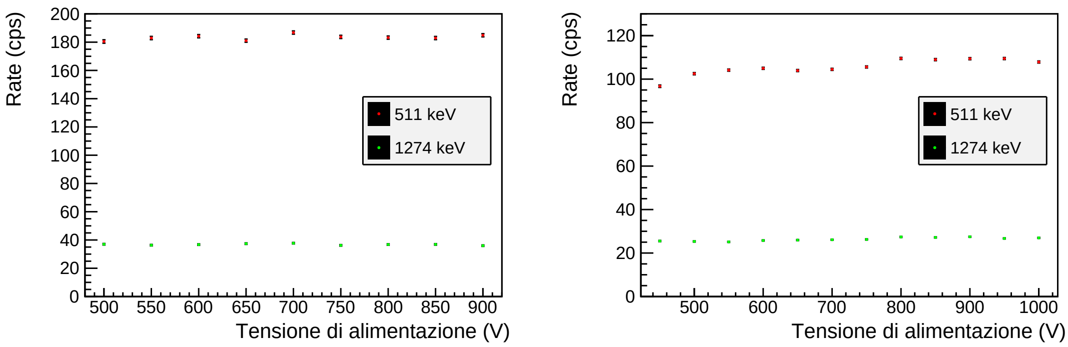
Figura 8: Risoluzione in funzione della tensione di alimentazione.

quello in corrispondenza del minimo della curva ottenuta in quanto i contributi del rumore elettronico e della sistematica sono ridotti il più possibile. Per quanto riguarda lo scintillatore da 3" si utilizza la configurazione descritta nella sezione precedente senza richiedere le coincidenze. Invece per lo scintillatore da 2" i dati sono acquisiti collegando l'uscita analogica del Silena all'MCA. I risultati sono riportati nei grafici in Figura 8a e 8b.

Avendo a disposizione un solo alimentatore con un'unica uscita, i due scintillatori devono lavorare alla stessa tensione. Nella scelta del punto di lavoro è bene dare maggior importanza al rapporto $\frac{S}{N}$ del 3" in quanto solo da esso dipende la risoluzione energetica degli spettri che si utilizzeranno nello studio dell'effetto Compton. In base a queste considerazioni la tensione scelta è 800 V, valore che minimizza R anche per lo scintillatore da 2". Inoltre alla decisione ha contribuito anche il fatto che a voltaggi superiori l'ampiezza del segnale proveniente dal preamplificatore del 3" è troppo grande. Anche impostando il gain dell'ORTEC 570 al minimo i segnali ad energia più alta escono dalla scala dell'MCA. Il problema è risolvibile con un attenuatore sull'input dell'amplificatore, ma si è preferito non aggiungere questo elemento alla catena elttronica, limitandosi ad un voltaggio di 800 V.

In Figura 9a e 9b è mostrato l'andamento del rate di conteggi nei picchi da 511 keV e 1274 keV al variare della tensione, rispettivamente per il 2" e il 3". Questo studio assicura che nel punto di lavoro la raccolta delle cariche all'interno del fotomoltiplicatore avvenga in modo efficiente.

Dalle Figura 8a e 8b si evince che la risoluzione assume valori maggiori a 511 keV che a 1274 keV. In effetti, la risoluzione ha un andamento ben preciso al variare dell'energia, approssimabile con $R(E) \propto E^{-\frac{1}{2}}$ [2, pp. 330-331]. Si è studiato questa dipendenza sul 3" alimentato a 800 V. Assumendo esatte le energie dei due picchi, si è costruito un grafico



(a) Scintillatore da 2". **(b)** Scintillatore da 3".

Figura 9: Rate in funzione della tensione di alimentazione.

di R vs energia avente solo due punti, che è stato fittato con[3]

$$R(E) = \frac{(\alpha + \beta E)^{\frac{1}{2}}}{E} = \frac{(-512.7 + 5.077E)^{\frac{1}{2}}}{E}. \tag{10}$$

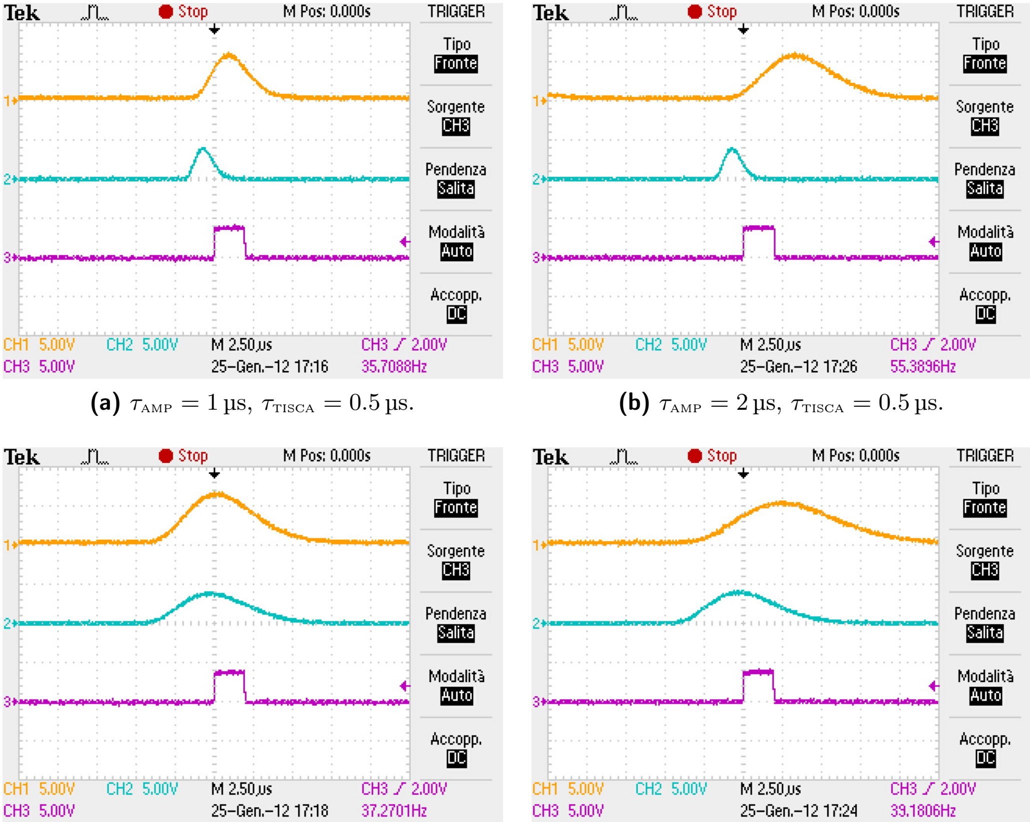
Questa relazione permette di calcolare la risoluzione a tutte le energie, il che sarà utile nell'analisi della relazione energia-angolo.

3.2 Scelta dello shaping time

Il segnale proveniente dal preamplificatore è di tipo *long tail*, ossia presenta un tempo di salita molto veloce seguito da una discesa lenta tale da poter essere approssimata da una funzione Θ *di Heaviside*. Questo segnale non è ideale poiché comporta problemi di *pile-up*. È necessario l'utilizzo di un amplificatore che, oltre ad aumentare l'ampiezza dell'impulso, effettua un'operazione di formatura. L'ORTEC 570 utilizza un circuito elettronico attivo per generare un segnale unipolare semi-gaussiano con un ottimo rapporto $\frac{S}{N}$. Lo *shaping time* è la costante di tempo τ di tale circuito ed è legata alla durata del segnale formato: l'impulso raggiunge il picco in 2.2τ e la sua ampiezza scende sotto lo 0.1% in 6.4τ [3].

La scelta dello shaping time è abbastanza vincolata: è possibile scegliere solo i valori 0.5 µs e 2 µs per il Silena [4], l'amplificatore invece ha un tempo di formatura selezionabile tra 0.5 µs, 1 µs, 2 µs, 3 µs, 6 µs o 10 µs. Tuttavia il segnale di gate prodotto dallo SCA deve arrivare al gate dell'MCA con un anticipo di 0.5 µs rispetto al massimo del segnale formato nell'amplificatore e deve estendersi per i successivi 0.5 µs. Il TISCA apre il gate 0.2 µs dopo che il segnale, che lui stesso ha formato, raggiunge il picco. Le possibilità sono ulteriormente limitate considerando che il segnale di gate può stare aperto da un minimo di 0.5 µs ad un massimo di 6 µs. Per stabilire quali configurazioni sono appropriate, i due scintillatori vengono disposti uno di fronte all'altro, collineari ed equidistanti dalla

[3] In realtà il fit non ha gradi di libertà quindi i parametri sono numeri esatti e la curva passa perfettamente per i due punti.



(a) $\tau_{\text{AMP}} = 1\,\mu\text{s}$, $\tau_{\text{TISCA}} = 0.5\,\mu\text{s}$.

(b) $\tau_{\text{AMP}} = 2\,\mu\text{s}$, $\tau_{\text{TISCA}} = 0.5\,\mu\text{s}$.

(c) $\tau_{\text{AMP}} = 2\,\mu\text{s}$, $\tau_{\text{TISCA}} = 2\,\mu\text{s}$.

(d) $\tau_{\text{AMP}} = 3\,\mu\text{s}$, $\tau_{\text{TISCA}} = 2\,\mu\text{s}$.

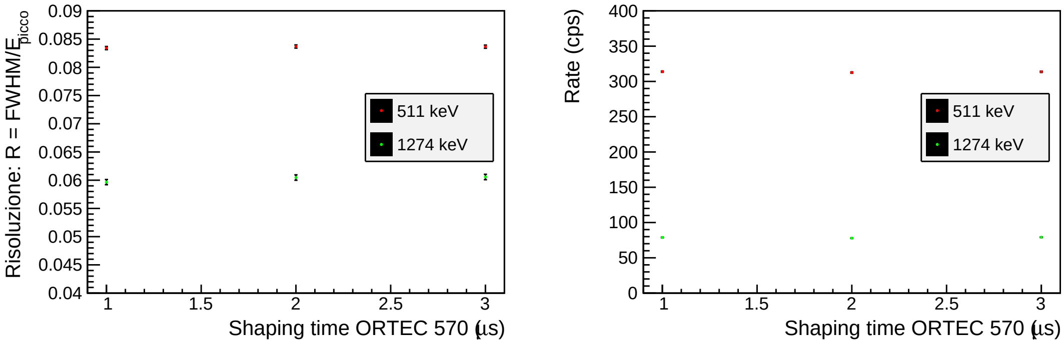
Figura 10: La linea gialla rappresenta il segnale formato nell'amplificatore, la linea azzurra indica l'impulso formato dal TISCA e la linea viola è il segnale logico generato dallo SCA. L'apertura del gate è fissata a 2 µs.

sorgente. Si imposta MAESTRO in modalità di coincidenza e si acquisisce lo spettro. Se la combinazione dei tempi di formazione è compatibile, l'MCA registra l'evento da 511 keV avvenuto nel 3" in coincidenza con l'altro fotone della coppia che ha interagito nel 2" aprendo il gate; il risultato è un picco evidente nello spettro. Variando i tempi di formatura si ottiene che le uniche possibilità sono:

- formatura veloce 0.5 µs sul TISCA e 1 µs, 2 µs o 3 µs sull'amplificatore;
- formatura lenta 2 µs sul TISCA e 3 µs, 6 µs o 10 µs sull'amplificatore.

Con l'apparato sperimentale disposto nella stessa maniera, è stato inoltre usato un oscilloscopio per visualizzare come vengono formati gli impulsi a seconda dello shaping time, impostando un trigger sulla salita del gate (Figura 10).

Si è optato per lo shaping time di 0.5 µs per il TISCA e di 1 µs per l'amplificatore, ovvero la formatura più veloce possibile. Questa scelta, oltre a limitare il problema del



(a) Risoluzione vs shaping time.

(b) Rate vs shaping time.

Figura 11

pile-up, permette di ridurre l'apertura temporale del gate a 2 µs. Infatti, più tempo il gate resta aperto, maggiore è il rischio di registrare una coincidenza casuale e di perdere eventuali segnali molto ravvicinati.

Per essere sicuri che lo shaping time scelto non comprometta la risoluzione e il rate di conteggio degli eventi, dopo aver impostato l'alimentatore alla tensione di lavoro, si sono acquisiti spettri per diversi valori di τ. I grafici mostrati nelle figure 11a e 11b presentano il risultato ottenuto per lo scintillatore da 3".

È evidente che i diversi valori di τ considerati non comportano un peggioramento della risoluzione nè del numero di eventi registrati nell'unità di tempo; questi andamenti non pongono ulteriori vincoli alla scelta del tempo di formatura.

3.3 Regolazione della finestra di energia

Per regolare la finestra di apertura dello SCA in modo che sia centrata attorno al picco da 511 keV si è modificata la catena elettronica: si sceglie di utilizzare il segnale del 2" esposto alla sorgente sia come segnale di gate sia come segnale in ingresso nell'MCA. Non si può usare il segnale analogico formato dal TISCA poiché il suo massimo è precedente, ovviamente, all'apertura del gate. Sdoppiando l'uscita del preamplificatore del 2" per fornire un segnale all'amplificatore ed uno al TISCA, si dimezza l'ampiezza del segnale originario e la regolazione dei potenziometri risulta errata. L'unica possibilità consiste nello sfruttare l'uscita anodica del 2" che, attraverso un cavo coassiale, è collegata all'ingresso dell'amplificatore. Avendo l'accortezza di configurare quest'ultimo per accettare la polarità invertita ed aumentare il guadagno per compensare la mancanza di preamplificazione, si ottiene un segnale compatibile con il gate. Il segnale così formato ha un rapporto $\frac{S}{N}$ peggiore, ma è sufficiente per visualizzare con MAESTRO il picco da 511 keV con un rate elevato. Questo permette di regolare i potenziometri e vederne l'effetto in tempo reale. Si è fatto un compromesso: la finestra non può essere troppo larga altrimenti si inquina lo spettro acquisito con coincidenze casuali, d'altra parte non la si può stringere troppo per non abbattere eccessivamente il rate e per proteggersi da eventuali drift della tensione di alimentazione. Si riportano i valori letti sulla scala della manopola del potenziometro: $\Delta E = 1.70$ e $E_{\mathrm{low}} = 2.60$.

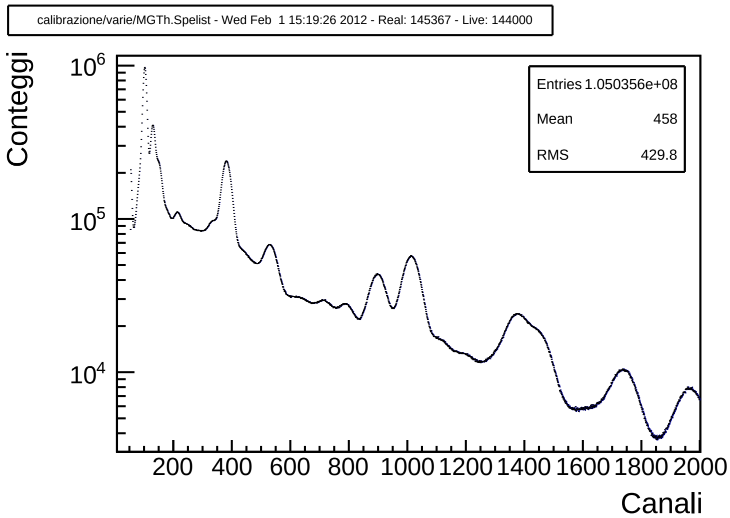


Figura 12: Spettro della prima calibrazione.

4 Calibrazione

4.1 Calibrazione iniziale

Lo spettro visualizzato con MAESTRO riporta in ascissa il numero del canali da 0 a 2047. Per poter interpretare lo spettro di energia, fondamentale per l'effetto Compton, è necessario fare uno studio per trovare la conversione canale-energia. A questo scopo si sono utilizzate le sorgenti multi-γ e ^{232}Th in equilibrio secolare, contenenti diversi isotopi che decadono emettendo fotoni con energie note, ben spaziate nel range di interesse.

I picchi identificabili negli spettri acquisiti, di cui ne è riportato uno in Figura 12, sono:

- 59.54 keV dal decadimento del ^{241}Am contenuto nella multi-γ;
- 238.63 keV dal decadimento del ^{212}Pb, figlio del ^{232}Th;
- 661.66 keV dal decadimento del ^{137}Cs contenuto nella multi-γ;
- 1173.24 keV dal decadimento del ^{60}Co contenuto nella multi-γ.

Fittando con ROOT i picchi utilizzando una funzione gaussiana, si estrae il canale del picco e lo si plotta in funzione dell'energia nota, come in Figura 13. La curva di calibrazione si ottiene facendo un fit dei punti con una funzione quadratica

$$f(x) = A + Bx + Cx^2. \tag{11}$$

Invece di inserire i parametri nella funzione di calibrazione nel software MAESTRO e ottenere direttamente spettri in energia, si è preferito continuare ad esportare i dati in un formato `SPE`. Su un altro PC si utilizza un codice appositamente scritto per caricare

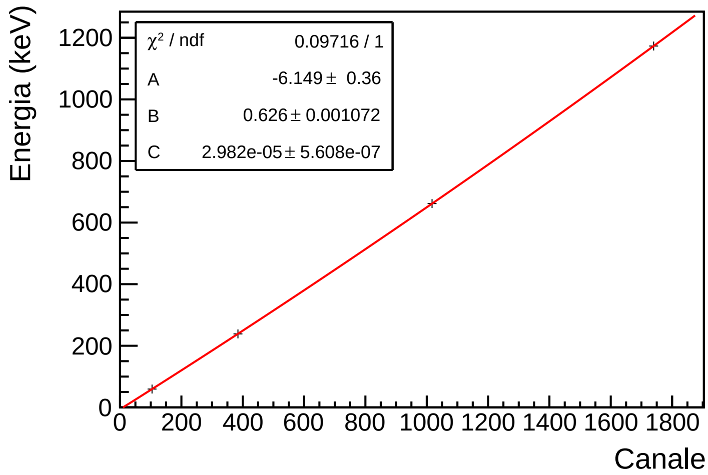


Figura 13: Funzione di calibrazione iniziale.

i dati in un istogramma di ROOT, gestire la conversione in energia ed eventualmente fittare i picchi per ottenere centro, σ e numero di conteggi. I parametri ottenuti in questo modo per la prima calibrazione sono

parametro	valore
A	-6.15 ± 0.36
B	0.6260 ± 0.0011
C	$2.982 \pm 0.056 \times 10^{-5}$

4.2 Drift e possibili cause

In un primo momento si è fatto affidamento sulla calibrazione iniziale e si è proceduto alla presa dati vera e propria. Tuttavia in seguito si è notato che i picchi del sodio si scostavano dalla posizione attesa fino al 20%. Provando a rifare delle calibrazioni con multi-γ e Th si è osservato che effettivamente i picchi di energia nota capitavano in canali diversi, con l'andamento mostrato in Figura 14. Evidentementemente la funzione di conversione canale-energia non era più valida e ci si è interrogati sulle possibili cause.

Prima di tutto si è attribuita la colpa ad una variazione della tensione di alimentazione rispetto al valore fissato. Inizialmente si utilizzava un alimentatore CANBERRA 3002 che non possedeva un display per visualizzare la tensione erogata istantaneamente; si è quindi deciso di sostituirlo con un CAEN 1470: alimentatore più moderno dotato di un sistema di monitoraggio dei parametri di funzionamento. In questo modo si teneva controllata la tensione effettiva fornita ai fotomoltiplicatori. Si è osservato che, nonostante un'ottima stabilità del valore della tensione, il problema di drift persisteva e che quindi non era attribuibile ad un cattivo funzionamento del CANBERRA. Siccome il CAEN era

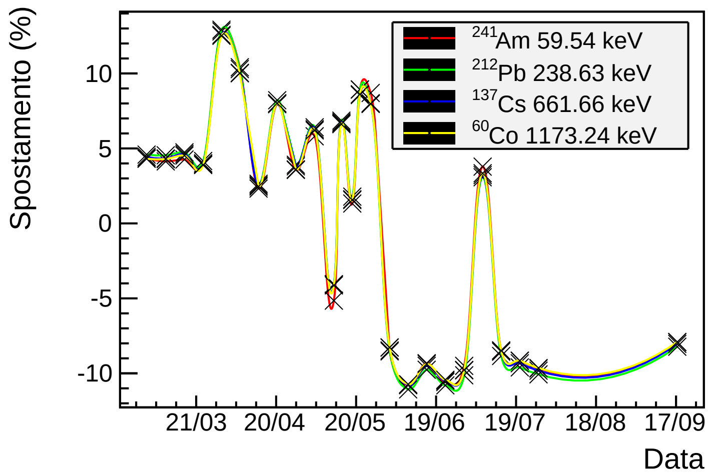


Figura 14: Andamento temporale della posizione dei picchi. In ordinata è posto lo spostamento in percentuale di ciascun picco rispetto al canale medio su tutto il tempo di presa dati. In ascissa è riportata la data in cui si è effettuata la singola misura.

a disposizione solo per una settimana, lo si è sostituito con un ORTEC 570. Anche con questo alimentatore la situazione non è cambiata.

Nelle relazioni degli anni precedenti [5] e [6] compariva uno studio sul *thermal drift*, ovvero si supponeva che lo spostamento dei picchi fosse dovuto ad un'instabilità della catena elettronica (probabilmente a livello scintillatore-fotomoltiplicatore) al variare della temperatura del laboratorio. Grazie ad una termocoppia attaccata ad un voltmetro a nastro, si è monitorata la variazione di temperatura; questo tentativo non ha avuto successo poiché la scala del registatore a nastro non era sufficientemente sensibile ai cambiamenti di tensione ai capi della termocoppia. Purtroppo non erano disponibili altri metodi per registrare la variazione di temperatura. Tuttavia l'ipotesi di thermal drift è stata parzialmente esclusa in quanto si osservava uno spostamento casuale: gli sbalzi termici non sembravano influire direttamente sullo shift dei picchi.

4.3 Calibrazioni periodiche e considerazioni

Non avendo identificato l'origine del problema, si è cercato di porre rimedio allo spostamento con delle calibrazioni periodiche dalla durata di due ore utilizzando le sorgenti multi-γ e Th. Infatti, poiché le misure di effetto Compton richiedono una presa dati di una settimana, si effettuava settimanalmente una calibrazione per trovare una opportuna funzione di conversione. L'affidabilità della calibrazione è fondamentale per avere una corretta informazione sulla energia del picco Compton, che non è nota a priori. La differenza tra le calibrazioni precedente e successiva una determinata presa dati ci fornisce di quanto è variata la relazione energia-angolo durante la misura e permette di valutare una parte dell'errore sistematico associato al valore dell'energia del picco

Compton. Inoltre una variazione significativa deforma sensibilmente il profilo dello spettro falsando il numero di eventi di ciascun picco.

Si è valutata la possibilità di controllare lo spostamento dei picchi durante la misurazione stessa, come descritto in [6]. In mancanza dei picchi delle sorgenti di calibrazione, come riferimento sono state utilizzate le energie dei raggi X caratteristici della shell K del Pb: 72.80 keV, 74.97 keV e 84.94 keV. In realtà la risoluzione dell'apparato utilizzato non è sufficiente per distinguere i tre picchi, quindi nello spettro si vede un unico picco che è stato associato all'energia media di 77.1 keV, pesata sulle intensità relative. La presa dati è stata suddivisa in intervalli di quattro ore e, per ognuno, il picco è stato fittato con una gaussiana. Si è pensato di utilizzare questa informazione per correggere la calibrazione di ogni singolo intervallo [6, pp. 28-30]. Tuttavia, il numero di eventi accumulati nel picco in sole quattro ore è ridotto, anche a causa del metodo in coincidenza attivo, e l'errore statistico sulla posizione del picco è molto più elevato dell'eventuale drift. Perciò si è rinunciato al tentativo di estrarre informazioni sul drift dal picco di raggi X.

In una fase avanzata della presa dati, si è osservato un'andamento della posizione dei picchi che ha suggerito una possibile spiegazione dell'instabilità della calibrazione. In Figura 14 si può osservare che a partire dal 1/06 i picchi hanno mantenuto una posizione pressoché stabile, relativamente spostata verso canali più bassi. Questa data coincide con l'inizio di una seconda fase di misurazioni in cui il 3" è schermato più pesantemente, portando ovviamente a un minore rate complessivo. La stabilità in questo periodo è bruscamente interrotta dalla calibrazione del 6/07, che riporta la posizione dei picchi verso canali più alti. Si tratta della calibrazione successiva a un'intera settimana in cui il 3" è stato esposto per errore alla radiazione diretta delle sorgenti multi-γ e Th, ricevendo un rate di eventi pari ai livelli precedenti la schermatura. L'anomalo comportamento della calibrazione è riconducibile a una correlazione positiva tra il rate di eventi e la posizione dei picchi.

Questo è ciò che si osserva, non supportato da alcuna spiegazione di carattere teorico. Avendo scoperto il fenomeno solamente in una fase finale dell'esperimento, non si è riusciti ad effettuare ulteriori verifiche e non si inventano ipotesi.

5 Analisi geometrica

5.1 Angolo solido

Le distanze fra i vari elementi dell'apparato sperimentale influiscono sull'angolo solido sotteso ai rivelatori e allo scatteratore da parte della sorgente, pertanto la scelta deve essere accurata.

L'angolo solido con cui un rivelatore di raggio a vede una sorgente puntiforme a distanza d è pari a

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}}\right), \tag{12}$$

perciò aumenta al diminuire di d fino al valore limite di 2π; invece per $d \gg a$ si approssima con

$$\Omega = \pi \frac{a^2}{d^2}. \tag{13}$$

Se la sorgente è isotropa, il rate di conteggi è proporzionale all'angolo solido sotteso dal rivelatore:

$$\frac{dN}{dt} = A(t)\varepsilon_{\text{int}} \frac{\Omega}{4\pi}, \tag{14}$$

dove $A(t)$ è l'attività della sorgente ed ε_{int} è l'efficienza intrinseca (si veda sezione successiva). In prima approssimazione il rate va come l'inverso del quadrato della distanza. Assumendo l'attività della sorgente costante durante il tempo di misura Δt, l'errore statistico σ_{stat} risulta

$$\frac{\sigma_{\text{stat}}}{N} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} = \left(A\varepsilon_{\text{int}} \frac{\Omega}{4\pi} \Delta t\right)^{-\frac{1}{2}} \propto \frac{d}{\sqrt{\Delta t}}. \tag{15}$$

Quindi, se l'obiettivo è contenere l'errore statistico relativo, un aumento della distanza d deve essere compensato con un tempo di misura Δt maggiore.

Questa descrizione ideale è applicabile all'angolo solido sotteso al 2" da parte della sorgente, tenendo però conto del fatto che l'attività di emissione di fotoni da 511 keV è pari a $2A \cdot \text{BR}$ [4]. Il rate di eventi da 511 keV sul 2" influisce direttamente sulla frequenza di apertura del gate e quindi anche sul numero di eventi registrati dall'MCA, senza distinguere tra fondo e segnale.

Lo stesso discorso si adatta anche all'angolo solido sotteso allo scatteratore; in questo caso la geometria del bersaglio è diversa, ma il conto esatto non è necessario e si richiede solamente che l'angolo solido dello scatteratore copra completamente quello del 2". Il bersaglio ha una superficie di $20\,\text{cm}^2 \times 20\,\text{cm}^2$; considerando che viene ruotato di $\frac{\theta_\text{C}}{2}$, la larghezza effettiva con un angolo $\theta_\text{C} = 30°$ (l'angolo più piccolo preso in considerazione) diviene circa $l \sin\frac{\theta_\text{C}}{2} = 5.18\,\text{cm}$. Dato che 2" di diametro si traduce in 5.08 cm, è sufficiente che la distanza sorgente-bersaglio sia minore di quella sorgente-2".

Lo scintillatore da 3" è esposto alla radiazione proveniente dal bersaglio, che è una sorgente estesa. Inoltre l'ipotesi di isotropia non è più valida: i fotoni vengono diffusi per

[4] Il ^{22}Na emette due fotoni per ogni decadimento β^+, il quale ha un branching ratio di circa 89.9%.

effetto Compton e la Klein-Nishina favorisce angoli piccoli. Tuttavia, anche in questa situazione l'angolo solido decresce all'aumentare della distanza, il che porta ad una diminuzione del rate di fotoni provenienti dallo scatteratore, ovvero degli eventi di segnale. Gli eventi di fondo, d'altra parte, non dipendono dalla distanza, quindi allontanando il 3" dal bersaglio si peggiora il rapporto $\frac{S}{N}$.

5.2 Dispersione angolare

Le distanze relative fra gli elementi della configurazione determinano l'errore commesso nel valutare l'angolo di scattering Compton θ_C. Dare una buona stima di questo errore è molto complicato perché sono molti i parametri in gioco. In prima approssimazione si possono analizzare separatamente diversi contributi alla dispersione: uno dovuto alla superficie estesa dello scatteratore e uno associato all'angolo solido sotteso al 3".

Per quanto riguarda il primo contributo, l'errore è attribuibile al fatto che l'interazione Compton può avvenire sulla superficie dello scatteratore e non solo nel punto centrale. In particolare, la superficie attiva è l'area dell'ellisse che si forma intersecando il piano del bersaglio con l'angolo solido opposto al 2". Si suppone che i fotoni vengano emessi all'interno di questo angolo solido con una distribuzione uniforme, normalizzata a 1:

$$\frac{2}{\delta^2}\Theta(\delta-\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \tag{16}$$

dove θ e φ sono rispettivamente l'angolo polare e azimutale rispetto all'asse del cono che sottende l'angolo solido e $\delta = \arctan\frac{1"}{25\,\mathrm{cm}} = 0.101\,\mathrm{rad} = 5.8°$ è la semiapertura del cono.

D'ora in avanti si indica con $\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}$ l'angolo reale a cui mediamente i fotoni vengono diffusi, e semplicemente con θ_C l'angolo a cui si posiziona la strumentazione. Il conto esatto di come l'angolo (θ,φ) contribuisca all'angolo di scattering $\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}$ è complesso. In questa sede, si considera un'approssimazione molto grezza per cui l'errore associato a $\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}$ è la radice della varianza di θ. Integrando sulla variabile azimutale e approssimando $\sin\theta\sim\theta$ poichè $\delta\ll 1$, si ottiene

$$\sigma_\theta^2 = \int_0^\delta \theta^2\frac{2}{\delta^2}\theta\, d\theta = \frac{2}{\delta^2}\frac{\theta^4}{4}\bigg|_0^\delta = \frac{1}{2}\delta^2. \tag{17}$$

Quindi un contributo all'errore vale

$$\sigma_{\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta = 0.072\,\mathrm{rad} = 4.1°. \tag{18}$$

Anche per il secondo contributo si può applicare lo stesso conto molto approssimativo. In questo caso la fonte di errore è la superficie estesa dello scintillatore da 3" a distanza l_2 dal centro dello scatteratore, che forma un cono di semiapertura $\delta' = \arctan\frac{1.5"}{50\,\mathrm{cm}} = 0.076\,\mathrm{rad} = 4.4°$. Si ha

$$\sigma_{\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta' = 0.054\,\mathrm{rad} = 3.1°. \tag{19}$$

Tabella 1: Contributi a θ_C^{eff}, da aggiungere a θ_C. $\Delta_{\theta_C}^{\mathrm{AN}}$ e $\Delta_{\theta_C}^{\mathrm{MC}}$ sono di origine geometrica, calcolati con due metodi alternativi. $\Delta_{\theta_C}^{\mathrm{KN}}$ tiene conto della dinamica dell'effetto Compton.

Angolo (°)	$\Delta_{\theta_C}^{\mathrm{AN}}$ (°)	$\Delta_{\theta_C}^{\mathrm{MC}}$ (°)	$\Delta_{\theta_C}^{\mathrm{KN}}$ (°)
45	1.298 ± 6.403	1.234 ± 6.293	-0.355
60	0.837 ± 6.385	0.732 ± 5.719	-0.271
75	0.560 ± 6.377	0.442 ± 5.168	-0.156
90	0.369 ± 6.372	0.263 ± 4.618	-0.062
105	0.204 ± 6.370	0.144 ± 4.092	-0.013
120	0.016 ± 6.369	0.062 ± 3.629	0.004
135	-0.254 ± 6.370	-0.002 ± 3.256	0.006

Senza tenere conto della probabile correlazione fra le due fonti di errore considerate, è possibile stimare l'errore complessivo sull'angolo Compton sommando in quadratura i due contributi:

$$\sigma_{\theta_C^{\mathrm{eff}}} = \sqrt{\sigma^2_{\theta_C^{\mathrm{eff}}}(\delta) + \sigma^2_{\theta_C^{\mathrm{eff}}}(\delta')} = 0.090\,\mathrm{rad} = 5.2°. \tag{20}$$

Questo conto molto approssimativo restituisce un errore indipendente dall'angolo θ_C. In realta, in entrambi i casi, l'angolo (θ, φ) contribuisce a modificare l'angolo di scattering Compton effettivo in maniera differente a seconda dell'azimut φ. Infatti, se il punto di ingresso del fotone sulla faccia dello scintillatore si sposta sul piano orizzontale rispetto al centro, aumenta o diminiusce direttamente l'angolo di scattering, apportando un contributo a media nulla; invece, variando la posizione del punto sulla verticale, l'apporto all'angolo effettivo è molto minore perché contribuisce quadraticamente, ma introduce un bias del valore medio perché è di segno definito. La trattazione estesa che ha permesso di trarre queste conclusioni è riportata in Appendice B.1. Inoltre, in Appendice B.2 viene illustrato un metodo numerico di tipo *Monte Carlo* che, simulando la geometria dell'apparato sperimentale, fornisce un'ulteriore conferma dei risultati ottenuti analiticamente. In Tabella 1 sono riportati i valori medi con i relativi errori della differenza $\Delta\theta_C = \theta_C^{\mathrm{eff}} - \theta_C$ per entrambi i metodi.

A queste considerazioni puramente geometriche si aggiungono un paio di osservazioni che coinvolgono la dinamica dell'interazione fotone-materia. Innanzitutto, non tutta la superficie frontale dello scintillatore è sensibile allo stesso modo ai raggi γ incidenti. Infatti, prima di raggiungere il cristallo scintillante i fotoni devono attraversare lo strato morto del rivelatore; un fotone che entra vicino al bordo potrebbe uscire dal cristallo prima di interagire o non entrare affatto. Tutti questi effetti riducono il valore di δ e δ' rispetto a quelli definiti geometricamente; questo porta a concludere che gli errori calcolati sono sovrastimati, ma, non conoscendo la struttura interna dello scintillatore, non è possibile valutare di quanto.

La seconda osservazione riguarda strettamente il processo di scattering Compton. Un fotone non viene diffuso a $\theta_C - \sigma_{\theta_C}$ con la stessa probabilità con cui viene scatterato a $\theta_C + \sigma_{\theta_C}$: la probabilità di scattering è proporzionale alla Klein-Nishina, che dipende da θ_C. In particolare, per piccoli θ_C la sezione d'urto cambia sensibilmente per piccole

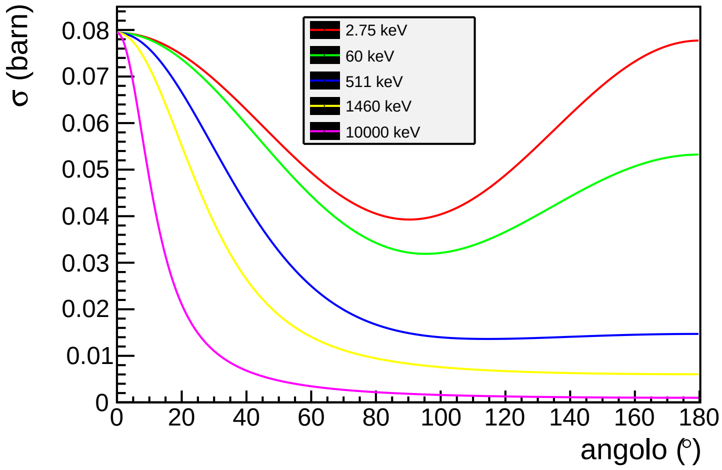


Figura 15: Grafico della sezione d'urto differenziale in funzione dell'angolo per fotoni incidenti a diverse energie.

variazioni dell'angolo: l'interazione è più probabile ad angoli minori che ad angoli maggiori. Invece per θ_C grandi si ha una dipendenza più contenuta, con una leggera preferenza per angoli maggiori.

La fisica dello scattering Compton introduce un ulteriore contributo che deve essere aggiunto a $\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}$ per trovarne il giusto valore di aspettazione. Si stima l'apporto di questo termine attraverso la formula

$$\Delta\theta_\mathrm{C}^{(\mathrm{KN})} = \frac{\int_{-\Delta}^{+\Delta} \theta_\mathrm{C} \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\theta_\mathrm{C}}{\int_{-\Delta}^{+\Delta} \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\theta_\mathrm{C}} - \theta_\mathrm{C} \tag{21}$$

dove come estremi di integrazione Δ si è utilizzato l'errore $\sigma_{\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}}$ valutato con il metodo MC. I risultati ottenuti risolvendo numericamente gli integrali per ogni valore di θ_C sono riportati nell'ultima colonna della Tabella 1.

6 Efficienza

Nel corso di ogni esperimento è importante effettuare degli studi preliminari per conoscere l'efficienza dei rivelatori. Il numero di impulsi registrati non coincide mai con la radiazione emessa dalla sorgente, ovvero l'*efficienza assoluta* ε_{abs} definita da

$$\varepsilon_{\text{abs}} = \frac{N_{\text{reg}}}{N_{\text{emessi}}} \tag{22}$$

è sempre minore di 1. Questo è una conseguenza del fatto che l'efficienza è influenzata da diversi fattori. Tra questi, quello che può essere maggiormente controllato è legato alla geometria del sistema e alla distanza sorgente-rivelatore. Infatti questa dipendenza può essere eliminata se si definisce l'*efficienza intrinseca* ε_{int}

$$\varepsilon_{\text{int}} = \frac{4\pi}{\Omega}\varepsilon_{\text{abs}}, \tag{23}$$

dove Ω è l'angolo solido sotteso al rivelatore. Questa definizione contiene comunque la dipendenza dal fattore di attenuazione del materiale, dall'efficienza di interazione e dall'efficienza di registrazione. Siccome non è possibile svincolarsi da questi contributi e non si riesce a dare una stima di quanto è grande il loro apporto, si studia l'andamento dell'efficienza intrinseca.

6.1 Efficienza vs distanza per il 2" e per il 3"

Per confermare l'indipendenza di ε_{int} dalla geometria, sia per il 2" sia per il 3" sono stati acquisiti diversi spettri della sorgente di sodio al variare della distanza. Infatti, il numero di eventi registrati è dato da

$$N_{\text{reg}} = N_{\text{emessi}}\varepsilon_{\text{int}}\frac{\Omega}{4\pi}; \tag{24}$$

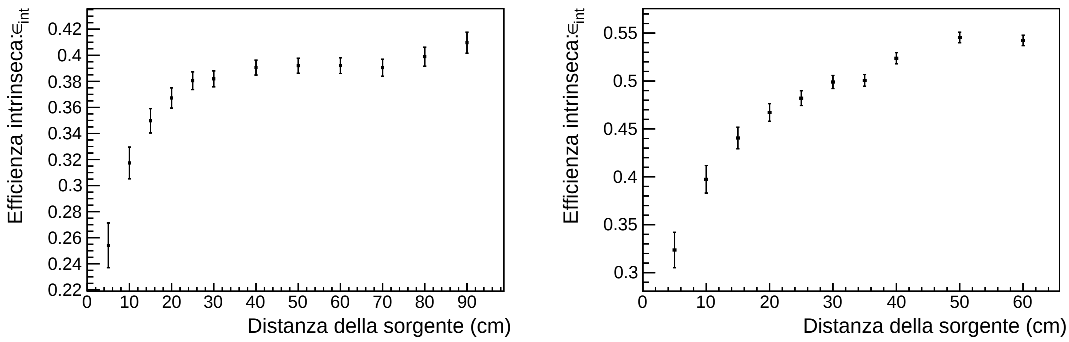
inoltre, visto che il rate di fotoni registrati è dato dalla (14) con attività pari a $2A \cdot \text{BR}$, si ricava l'efficienza

$$\varepsilon_{\text{int}} = \frac{N_{\text{reg}}}{2A \cdot \text{BR}\Delta t}\frac{4\pi}{\Omega}. \tag{25}$$

La sorgente è posta lungo l'asse dello scintillatore a distanza variabile d, perciò l'angolo solido è dato dalla (12), che sostituita nella formula precedente dà

$$\varepsilon_{\text{int}}(d) = \frac{N_{\text{reg}}}{\Delta t}\frac{1}{A \cdot \text{BR}}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}}\right)^{-1}. \tag{26}$$

La configurazione utilizzata in questo tipo di misura prevede che uno scintillatore sia collegato all'amplificatore (ORTEC per il 3" e TISCA nel caso del 2") in modo da acquisire spettri per un tempo di misura che va da 200 s per distanze più piccole a 900 s per distanze maggiori. Per ogni distanza campionata, dallo spettro si è estrapolato con un fit gaussiano il numero di conteggi contenuti nel picco da 511 keV. Si è quindi posto



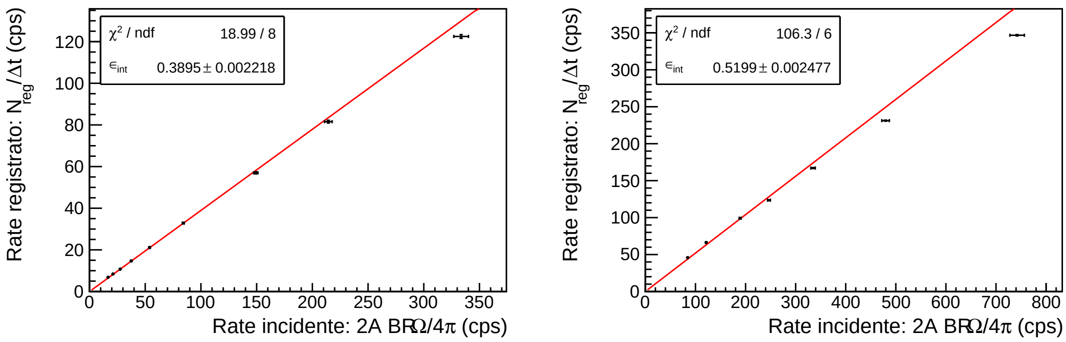
(a) 2". **(b)** 3".

Figura 16: Efficienza intrinseca in funzione della distanza della sorgente dal rivelatore.

in un grafico il valore dell'efficienza così ottenuto in funzione della distanza, ottenendo le Figura 16a e Figura 16b. L'errore sulla misura della distanza è assunto pari a 0.2 cm, mentre all'errore sull'efficienza contribuiscono principalmente l'errore poissoniano sul numero di eventi, maggiore a grandi distanze, e l'errore sull'angolo solido, che domina a piccole distanze.

Si osserva che l'efficienza risulta costante solo quando la sorgente è abbastanza lontana; a piccole distanze l'efficienza cala bruscamente. È evidente che nell'efficienza intrinseca permane una dipendenza dalla geometria. Anche se la formula per calcolare l'angolo solido sotteso alla faccia anteriore dello scintillatore è esatta, in realtà l'angolo solido che il volume attivo del rivelatore copre è minore, e questo si evidenzia a distanze piccole. Per esempio, nel caso limite di sorgente puntiforme appoggiata alla faccia del rivelatore ($d = 0$), dalla (12) risulta $\Omega = 2\pi$, ma è difficile credere che metà dei fotoni emessi dalla sorgente interagisca nel cristallo.

Durante la presa dati vera e propria le distanze dei rivelatori dalla sorgente risultano fissate, quindi si potrebbe estrarre l'efficienza di un unico punto nei grafici in Figura 16a e Figura 16b. In questo modo si ottiene per il 2" il valore di 0.3807 ± 0.0069 per una distanza di 25 cm e per il 3" posto a distanza di 50 cm il valore 0.5436 ± 0.0057. Poichè non si può fare affidamento su una singola misura, si è preferito ricavare un valore medio dal fit lineare del rate di eventi registrati in funzione del numero di fotoni incidenti sul rivelatore durante il tempo di misura, come mostrato nelle Figura 17a e Figura 17b. Nei grafici non sono stati inclusi i due punti a distanza 5 cm e 10 cm, ovvero quelli in cui il rate di eventi è più elevato. Infatti, anche il primo punto considerato, 15 cm, non si trova sulla retta del fit evidenziando il fatto che l'efficienza non è costante per piccole distanze. L'errore sull'ordinata è l'errore poissoniano sul rate di eventi. Invece l'errore sull'ascissa dipende dall'incertezza sull'angolo solido effettivamente sotteso dal rivelatore. Questo errore diventa dominante a piccole distanze, perciò la presenza o meno dei punti a distanze minori nel grafico influenza minimamente il fit. L'efficienza intrinseca, che coincide con il coefficiente angolare della retta ottenuta, è



(a) 2". **(b)** 3".

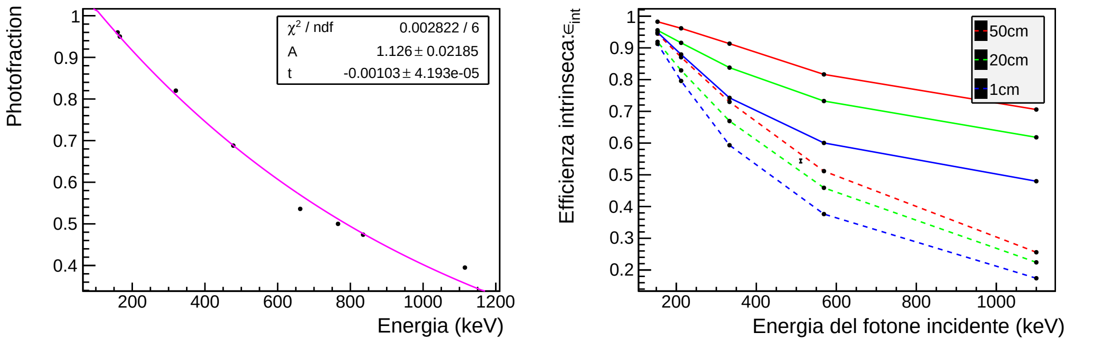
Figura 17: Rate di eventi registrati in funzione del rate di fotoni incidenti sullo scintillatore.

scintillatore	ε_{int}
2"	0.3895 ± 0.0022
3"	0.5199 ± 0.0025

6.2 Efficienza vs energia per il 3"

Una parte sostanziale dell'esperimento sull'effetto Compton consiste nel verificare la relazione di Klein-Nishina, ovvero nello studiare la sezione d'urto Compton al variare dell'angolo di diffusione. Il 2" è sottoposto alla radiazione proveniente direttamente dalla sorgente, quindi viene raggiunto solo da fotoni di energia 511 keV che aprono il gate. Per tale motivo, nel caso del 2" ci si limita a studiare l'efficienza a quella sola energia. Il discorso è diverso per lo scintillatore da 3": esso viene raggiunto dai raggi γ dopo che questi hanno interagito con gli elettroni dello scatteratore e sono stati riemessi con energia minore e dipendente dall'angolo di scattering. In questo caso risulta quindi fondamentale sapere come varia l'efficienza in funzione dell'energia, dato che è un parametro necessario per calcolare la sezione d'urto a partire dal numero di eventi registrati.

Per compiere questo studio è necessaria una sorgente che emette raggi γ nel range di energia compresa tra circa 100 keV e 600 keV, suddivisi in picchi ben spaziati e di intensità relative note. Inoltre la sorgente deve essere molto intensa in quanto deve essere posta alla distanza di 50 cm dallo scintillatore, ovvero dove viene collocato lo scatteratore durante la presa dati. Una sorgente che soddisfa le richieste precedenti è il ^{232}Th di cui sono note le energie e le intensità dei picchi di radiazione emessa, essendo in equilibrio secolare (per ulteriori approfondimenti si veda Appendice C). Purtroppo tutte le sorgenti di torio presenti nel laboratorio hanno le stesse caratteristiche di quella utilizzata nella calibrazione standard, cioè un'attività di circa 1.1 kBq, insufficiente per lo scopo sopra descritto. Si è quindi dovuto rinunciare a questa idea.



(a) Photofraction in funzione dell'energia.

(b) Andamento dell'efficienza intrinseca con l'energia per tre distanze. Si noti il punto con la barra d'errore in corrispondenza di 511 keV.

Figura 18

Un modo alternativo per conoscere l'efficienza è ricorrere alla letteratura di settore: lo scintillatore di NaI(Tl) è un rivelatore standard molto utilizzato. In *Applied gamma-ray spectrometry* [7] sono stati trovati i valori misurati dell'efficienza assoluta a varie distanze e a diverse energie per scintillatori di diametro 3". L'efficienza riportata è valida per una sorgente puntiforme, ma sono fornite le correzioni da apportare nel caso in cui la sorgente sia un disco o un rettangolo.

Un'altra informazione importante riportata sul manuale è la *photofraction*, cioè il rapporto fra gli eventi contenuti nel picco e il rate totale di eventi. Infatti all'efficienza assoluta tabulata contribuiscono tutti gli eventi registrati, anche quelli che non cadono nel picco di energia piena. Siccome sperimentalmente si misura l'efficienza intrinseca nel picco, oltre a dividere per la frazione di angolo solido, è necessario moltiplicare il valore indicato per la photofraction. Questa grandezza varia con l'energia; nel grafico in Figura 18a sono riportati i valori tabulati sul manuale e con il fit esponenziale

$$\text{photofraction} = A \cdot \exp(t \cdot E) \tag{27}$$

si è ricavata una funzione che permette di ottenere la photofraction a tutte le energie. Il fit restituisce

parametro	valore
A	1.126 ± 0.022
t	0.001 03 ± 0.000 04

Gli andamenti dell'efficienza intrinseca in funzione dell'energia per tre distanze sono indicati dalle linee continue in Figura 18b; le linee tratteggiate, invece, tengono conto della correzione dovuta alla photofraction. Nel grafico si è inserito inoltre il valore dell'efficienza del 3" misurato per il picco da 511 keV alla distanza di 50 cm per confrontarlo con i dati tabulati. Si osserva che il valore sperimentale è compatibile con la curva teorica. Si procede con un fit dei dati ipotizzando che la funzione in grado di descriverli sia di tipo esponenziale

$$\varepsilon_{\text{int}} = C \cdot \exp(t \cdot E). \tag{28}$$

I parametri ottenuti con il fit sono

parametro	valore
C	1.172 ± 0.012
t	$-0.001\,42 \pm 0.000\,03$

La relazione così ottenuta consente di calcolare l'efficienza intrinseca per il 3" a tutte le energie. Quest'informazione risulterà fondamentale nello studio della Klein-Nishina, quando occorrerà trasformare il numero di fotoni contenuti nel picco Compton ad una energia ben definita in una sezione d'urto.

7 Misure

Le fasi preliminari descritte nei paragrafi precedenti sono servite ad ottimizzare la configurazione utilizzata nello studio dell'effetto Compton. Nella presa dati l'apparato sperimentale è disposto come in Figura 3. Lo scintillatore da 3" è tenuto fermo per evitare di spostare ogni volta il castello di piombo, quello da 2" e la sorgente sono posizionati a 7 diversi angoli con vertice nel centro dello scatteratore. Per ogni angolo scelto sono stati acquisiti spettri in coincidenza, salvandoli ogni quattro ore, per la durata totale di circa una settimana. Gli istogrammi di ogni singolo spettro vengono sommati e l'analisi è effettuata solo sull'istogramma somma. Un esempio di spettro acquisito all'angolo di 75° è mostrato in Figura 19. Tra una misura ad un angolo e quella seguente si effettua una calibrazione di controllo. L'istogramma somma viene trasformato, prestando attenzione a conservare le aree, da conteggi vs canale in conteggi per unità di energia vs energia utilizzando le calibrazioni precedente e successiva alla presa dati. Inoltre dividendo per il tempo di misura si ottiene il rate. Il fondo viene sottratto dal picco Compton attraverso il metodo `ShowBackground()` della classe `TH1` del software ROOT, come rappresentato in Figura 20a. Nell'istogramma risultante viene cercato un picco nella regione energetica attesa che viene poi fittato con una curva gaussiana

$$f(E) = \frac{dN}{dt}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(E-\overline{E})^2}{2\sigma^2}\right). \tag{29}$$

Il fit è effettuato in un range limitato del picco, scelto in modo da non essere influenzato da eventuali artefatti non rimossi con il fondo. A titolo d'esempio si veda Figura 20b. Nella Tabella 2 si riportano per tutti gli angoli considerati i valori dell'energia $\overline{E}$, della σ e del rate $\frac{dN}{dt}$ con i rispettivi errori ottenuti dal fit. Per ogni angolo vengono considerate due stime calcolate con la calibrazione precedente e successiva alla misura.

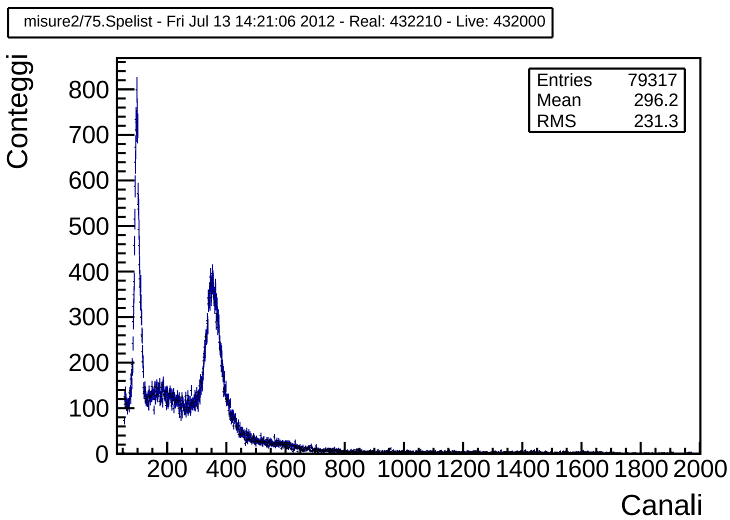
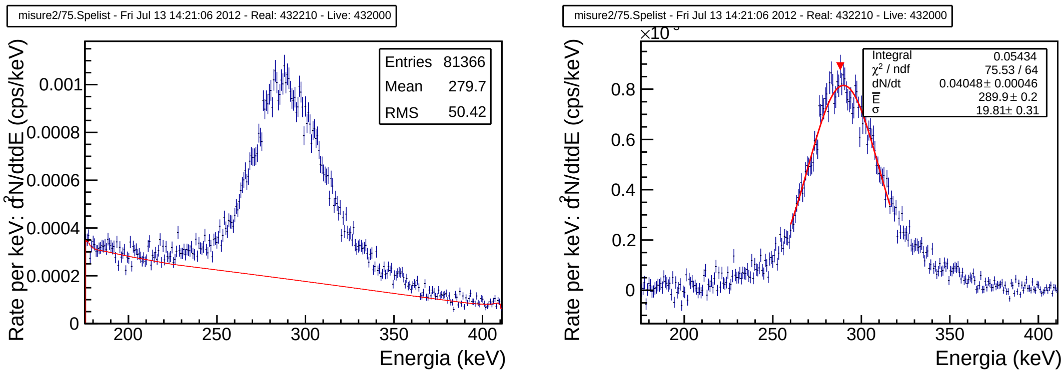


Figura 19: Esempio di uno spettro acquisito a 75°.



(a) Stima del fondo.

(b) Fit del picco.

Figura 20: Esempio della procedura di fit del picco Compton a 75° per estrarre i parametri della gaussiana.

Tabella 2: $\overline{E}$, σ, $\frac{dN}{dt}$ e relativi errori estratti dal fit gaussiano per tutti gli angoli presi in considerazione.

Angolo (°)	$\overline{E}$ (keV)	σ (keV)	$\frac{dN}{dt}$ (csp)
45	384.15 ± 0.13	22.28 ± 0.17	$0.101\,79 \pm 0.000\,56$
	381.03 ± 0.13	22.11 ± 0.16	$0.101\,79 \pm 0.000\,55$
60	322.42 ± 0.16	20.92 ± 0.21	$0.060\,41 \pm 0.000\,45$
	332.00 ± 0.17	21.49 ± 0.24	$0.060\,41 \pm 0.000\,48$
75	287.21 ± 0.23	19.63 ± 0.30	$0.040\,46 \pm 0.000\,45$
	289.91 ± 0.23	19.81 ± 0.31	$0.040\,48 \pm 0.000\,46$
90	253.35 ± 0.21	17.45 ± 0.27	$0.028\,99 \pm 0.000\,33$
	249.65 ± 0.20	17.14 ± 0.26	$0.028\,78 \pm 0.000\,32$
105	222.32 ± 0.20	15.50 ± 0.25	$0.022\,63 \pm 0.000\,27$
	217.71 ± 0.19	15.19 ± 0.24	$0.022\,63 \pm 0.000\,27$
120	202.91 ± 0.20	14.47 ± 0.25	$0.020\,84 \pm 0.000\,27$
	204.01 ± 0.21	14.49 ± 0.25	$0.020\,74 \pm 0.000\,28$
135	168.09 ± 0.15	13.49 ± 0.19	$0.026\,55 \pm 0.000\,27$
	190.66 ± 0.19	14.78 ± 0.25	$0.025\,75 \pm 0.000\,32$

7.1 Relazione energia-angolo

Un tipo di analisi ricavata utilizzando la procedura descritta in precedenza è la verifica della relazione energia-angolo (5). A questo scopo si realizza il grafico mostrato nella Figura 21. Le posizioni del picco associato a ciascun angolo, ottenute con le due calibrazioni, vengono mediate per trovare un unico valore da inserire nel grafico in funzione dell'angolo θ_C^{eff}.

L'errore sull'ascissa è dovuto esclusivamente alla dispersione dell'angolo di scattering

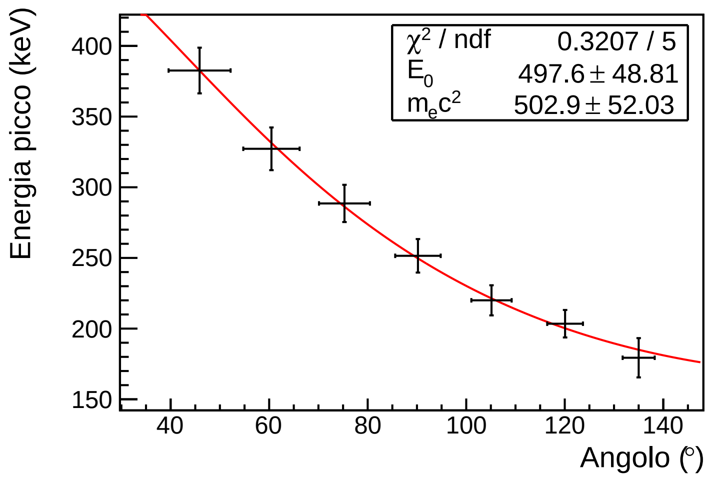


Figura 21: Energia del picco Compton in funzione dell'angolo di scattering.

effettivo $\theta_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}}$. La stima di questa incertezza è calcolata con il metodo Monte Carlo descritto in Appendice B.2. Invece l'errore sull'ordinata è dato da diversi contributi che vengono sommati in quadratura:

- la risoluzione dello scintillatore $R(E)$, che varia con l'energia secondo la (10). L'incertezza irriducibile associata a questo contributo è $\sigma_{\mathrm{ris}} = \frac{E \cdot R(E)}{2\sqrt{2 \ln 2}}$, quindi dipende dall'energia in modo ben definito.
- l'errore sistematico dovuto alla variazione della funzione di calibrazione durante la misura. Questo effetto è valutato come la semidispersione del valor medio dell'energia tra le due calibrazioni: $\sigma_{\mathrm{cal}} = \frac{|\overline{E}_{\mathrm{succ}} - \overline{E}_{\mathrm{prec}}|}{2}$. Per alcune misure, in cui il drift è consistente, l'apporto di σ_{cal} è comparabile a quello di σ_{ris}, in molti casi è trascurabile.

Il fit del grafico con la formula

$$E = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)} \tag{30}$$

restituisce

parametro	valore
E_0	498 ± 49
$m_e c^2$	503 ± 52

Dal grafico si nota che c'è un accordo fin troppo buono tra i punti sperimentali e la funzione di fit, come evidenziato dal piccolo valore del χ^2. Molto probabilmente questo è attribuibile ad una sovrastima degli errori sugli angoli, come suggerito alla fine della sezione 5.2. I parametri del fit sono ampiamenti compatibili con il loro valore teorico 511 keV anche a causa di un errore del 10%.

7.2 Verifica della Klein-Nishina

L'altra parte dell'esperimento è dedicata allo studio della sezione d'urto dei fotoni non polarizzati al variare dell'angolo di scattering per verificare la relazione di Klein-Nishina (6). Sperimentalmente questa analisi viene effettuata a partire dal numero di eventi contenuti nell'area del picco Compton. Questo numero diviso per il tempo di misura dà il rate di conteggi che è legato alla sezione d'urto dalla formula

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\Phi\mathcal{N}} \frac{d^2N}{dtd\Omega}, \tag{31}$$

dove Φ è il flusso di fotoni incidenti sulla faccia dello scatteratore e $\mathcal{N}$ rappresenta il numero di centri diffusori del target. Il flusso si calcola moltiplicando l'attività della sorgente per l'efficienza intrinseca $\varepsilon_{2''}$, il prodotto scalare tra la direzione del fotone e la normale alla superficie del target, la frazione di angolo solido $\Omega_{2''}$, data dalla (12), e dividendo per l'area della superficie del bersaglio S. Il prodotto scalare tra i versori è il coseno dell'angolo complementare a $\frac{\theta_C}{2}$, ovvero $\sin\frac{\theta_C}{2}$:

$$\Phi = [2A \cdot \mathrm{BR}]\varepsilon_{2''} \frac{\Omega_{2''}}{4\pi} \frac{\sin\frac{\theta_C}{2}}{S}. \tag{32}$$

Il numero di centri diffusori si ottiene moltiplicando la densità elettronica n_e per il volume efficace di interazione $S \cdot l$. A sua volta, n_e si esprime in funzione del numero atomico Z, del numero di Avogadro N_A, della densità ρ e della massa molare M

$$\mathcal{N} = n_e S l = \frac{Z N_A \rho}{M} S l. \tag{33}$$

Lo scatteratore è fatto di piombo, che ha $Z = 82$, $M = 207\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ e $\rho = 11.35\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, quindi

$$n_e = 2.708 \times 10^{24}\,\mathrm{cm^{-3}}. \tag{34}$$

Lo strumento che rivela i fotoni è uno scintillatore con copertura angolare finita ed efficienza non ideale, quindi

$$\frac{d^2N}{dtd\Omega} = \frac{N}{\Delta t \varepsilon_{3''} \Omega_{3''}}. \tag{35}$$

Sostituendo nella (31) si ha

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin\frac{\theta_C}{2}}{[2A \cdot \mathrm{BR}]\varepsilon_{2''}\frac{\Omega_{2''}}{4\pi}} \frac{1}{n_e l} \frac{N}{\Delta t \varepsilon_{3''}(E)\Omega_{3''}}. \tag{36}$$

Rimane da valutare lo spessore l di volume efficace dello scatteratore in cui i fotoni interagiscono. Il numero di interazioni diminuisce all'aumentare della profondità del materiale secondo la (3). Una buona stima della profondità media a cui arrivano i fotoni è la lunghezza di attenuazione $\lambda = \frac{1}{\mu' \rho}$, che per fotoni di 511 keV nel piombo vale 0.564 cm [8]. Tuttavia i fotoni incidono sul target con un angolo di $\frac{\theta_C}{2}$ rispetto alla superficie, per cui

$$l = \lambda \sin \frac{\theta_C}{2}. \tag{37}$$

Inserendo questa valutazione nella formula della sezione d'urto differenziale si elide la dipendenza dal $\sin \frac{\theta_C}{2}$ ottenendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{[2A \cdot \mathrm{BR}]\varepsilon_{2"} \frac{\Omega_{2"}}{4\pi}} \frac{1}{n_e \lambda} \frac{N}{\Delta t \varepsilon_{3"}(E) \Omega_{3"}}. \tag{38}$$

Per ogni angolo preso in considerazione si è calcolata la sezione d'urto partendo dal rate; i punti ottenuti sono riportati in funzione dell'angolo θ_C^{eff} nel grafico in Figura 22b. Gli errori sull'ascissa, come per la relazione energia-angolo, sono ottenuti con il metodo MC. Le incertezze sull'ordinata sono dovute a diversi termini:

- l'errore sistematico sul rate introdotto dal drift. Come per la relazione energia-angolo è stato valutato con la semidispersione tra il rate ottenuto con la calibrazione precedente e con quella successiva alla misura;
- l'errore sul rate associato al carattere statistico del numero di conteggi. Prima di sottrarre il fondo l'errore sui conteggi nel singolo canale è puramente poissoniano; sottraendo il fondo l'errore assoluto aumenta. Questo errore si propaga al parametro $\frac{dN}{dt}$ della gaussiana di fit;
- l'errore dell'efficienza del 2", riportato nella tabella nella sezione 6.1;
- l'errore dell'efficienza del 3", valutato con la propagazione degli errori a partire dalla formula (28);
- gli errori legati agli angoli solidi del 2" e del 3", ottenuti considerando un errore sulla distanza pari a 0.2 cm.

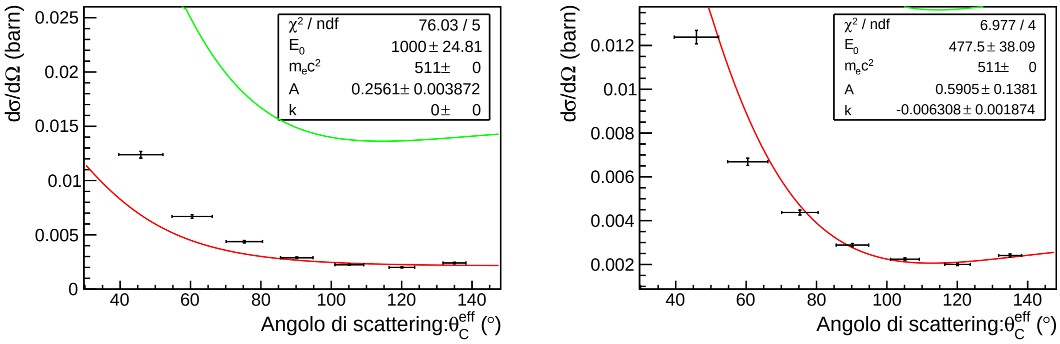
I primi due contributi vengono sommati in quadratura per trovare l'errore assoluto associato al rate. Osservando la (38), l'incertezza relativa sulla sezione d'urto si calcola dalla somma in quadratura degli errori relativi di tutti i contributi.

I punti sperimentali nel grafico vengono fittati con la Klein-Nishina; dalla formula (6) si evince che tale funzione dipende esclusivamente dal rapporto tra $E_0 = h\nu$ e $m_e c^2$, perciò questi due parametri non possono essere fittati indipendentemente. Si è scelto di fissare $m_e c^2$ a 511 keV. In un primo momento i punti sono stati fittati tramite la funzione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A \frac{r_c^2}{2} P^2 \left(P + \frac{1}{P} - \sin^2 \theta_C \right) \tag{39}$$

dove

$$P = \frac{h\nu'}{h\nu} = \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - cos\theta_C)}, \tag{40}$$



(a) Funzione di fit (39).

(b) Funzione di fit (41).

Figura 22: Sezione d'urto differenziale vs angolo effettivo di scattering. La linea verde rappresenta l'andamento teorico della Klein-Nishina, mentre quella rossa è la curva di fit.

ottenendo il grafico in Figura 22a. È evidente che la funzione di fit passa solo parzialmente per i punti sperimentali, suggerendo la presenza di errori sistematici intrinseci nelle misure, e restituisce un valore di E_0 non compatibile con quello atteso. Pertanto è stato introdotto un ulteriore parametro libero nella funzione di fit per tenere conto della sistematica:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A\frac{r_c^2}{2}P^2\left(P + \frac{1}{P} - \sin^2\theta_C\right) + k. \tag{41}$$

In Figura 22b è riportato il grafico così ottenuto. I valori dei parametri restituiti dal fit con i relativi errori sono:

parametro	valore
E_0	478 ± 38
A	0.59 ± 0.14
k	-0.0063 ± 0.0019

Il valore dell'energia del fotone incidente è compatibile con quello atteso $E_0 = 511\,\text{keV}$, ma il suo errore è abbastanza grande; probabilmente ciò accade perchè l'uso di tre parametri lascia molto spazio alla variazione degli stessi. Dal grafico si nota che, al variare dell'angolo θ_C^{eff}, il valore assoluto della sezione d'urto trovata sperimentalmente è minore di quello atteso: c'è un fenomeno di carattere sistematico che non è stato considerato.

Sicuramente un importante contributo a questa discrepanza deriva dal fatto che l'interazione Compton può avvenire ad una certa profondità del materiale dello scatteratore, quindi non è detto che il fotone scatterato esca dal bersaglio senza reinteragire. Infatti, trattandosi di fotoni ad energia minore di 511 keV nel Pb, la loro probabilità di essere assorbiti per effetto fotoelettrico non è trascurabile. Questo effetto comporta un rate di conteggi minore di quello previsto, spiegando così il fatto che la sezione d'urto sperimentale risulti sottostimata. Si potrebbe correggere questo errore dividendo la (38) per la probabilità di uscita, avvicinando la sezione d'urto sperimentale alla Klein-Nishina teorica. Tuttavia valutare la probabilità di uscita è complicato e il tentativo di correzione è fallito.

7.3 Misure in trasmissione

Il valore assoluto della sezione d'urto calcolata nella sezione 7.2 non è in buon accordo con quello atteso. Si sapeva che la configurazione utilizzata avrebbe permesso solamente di verificare l'andamento della Klein-Nishina in funzione dell'angolo, ma non in termini assoluti. Si è valutata la possibilità di migliorare la stima usando un metodo alternativo. Invece di usare un grosso blocco di Pb come scatteratore e rilevare i fotoni riemessi dalla faccia colpita, si pone come bersaglio un dischetto di Pb di spessore opportuno e si osservano i fotoni scatterati dalla parte opposta a quella di incidenza. Il metodo risulta quindi essere in trasmissione. In questa situazione l'angolo solido coperto dal 2" è maggiore di quello sotteso al bersaglio, perciò tutto il volume del dischetto può essere considerato attivo, ma il rapporto $\frac{S}{N}$ peggiora. Inoltre, ponendosi ad un angolo di scattering nullo, si può studiare il numero di fotoni trasmesso attraverso il disco senza interagire (o che fa scattering Compton ad angolo molto piccolo). In questa configurazione si ricava sperimentalmente il coefficiente d'attenuazione μ del Pb dal rapporto del numero di fotoni rivelati dal 3" a due spessori del dischetto diversi.

$$\frac{N(x')}{N(x)} = e^{-\mu(x'-x)}, \quad \text{quindi} \quad \mu = -\frac{1}{x'-x} \ln \frac{N(x')}{N(x)}. \tag{42}$$

Questi accorgimenti permettono di misurare in modo più affidabile il valore del numero di centri di scattering del bersaglio, migliorando così la stima della sezione d'urto sperimentale (38).

Lo scelta dello spessore del disco è un compromesso tra la necessità di far interagire un numero sufficiente di fotoni e quella di evitare un assorbimento eccessivo da parte del piombo (che può essere calcolato e utilizzato come correzione). Inoltre ad angoli di scattering grandi i fotoni attraversano il bersaglio in diagonale percorrendo una distanza maggiore e risultando più attenuati. Lo spessore del disco deve essere quindi dell'ordine della lunghezza di interazione λ. Purtroppo il numero di eventi previsti per un bersaglio di questo spessore non è compatibile con la prima richiesta, come si è anche verificato con una misura di prova.

8 Conclusioni

Questa esperienza di laboratorio ha permesso di verificare la relazione tra l'energia del fotone diffuso per effetto Compton e l'angolo di scattering, avvalorando la natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica. L'andamento ottenuto dai dati è compatibile con la formula dedotta da Compton; si ottiene un'energia iniziale del fotone pari a $(498 \pm 49)\,\mathrm{keV}$, incidente su un elettrone di massa $(503 \pm 52)\,\mathrm{keV}$. Entrambi i valori sono compatibili con il valore teorico di $511\,\mathrm{keV}$.

Lo studio della sezione d'urto ha permesso di confermare la formula di Klein-Nishina. A causa di diversi errori sistematici non è stato possibile ottenere un valore assoluto per la sezione d'urto compatibile con quello teorico. Si ritiene che il metodo utilizzato sia intrinsecamente sensibile a una sistematica irriducibile. Con l'analisi effettuata si è comunque giunti a un valore per l'energia della radiazione incidente pari a $(478 \pm 38)\,\mathrm{keV}$, in accordo con il valore ottenuto dalla relazione energia-angolo e con quello atteso.

L'esperimento ha richiesto la valutazione di alcune fonti di errore. Maggior attenzione è stata dedicata al problema della dispersione angolare, dovuto alla superficie finita di bersaglio e scintillatori. Il problema è stato affrontato con due approcci diversi: si sono sviluppati un modello analitico e una simulazione Monte Carlo. Nell'analisi dati è stata utilizzata la stima dell'angolo di scattering effettivo restituita dal Monte Carlo.

A Teoria dell'effetto Compton

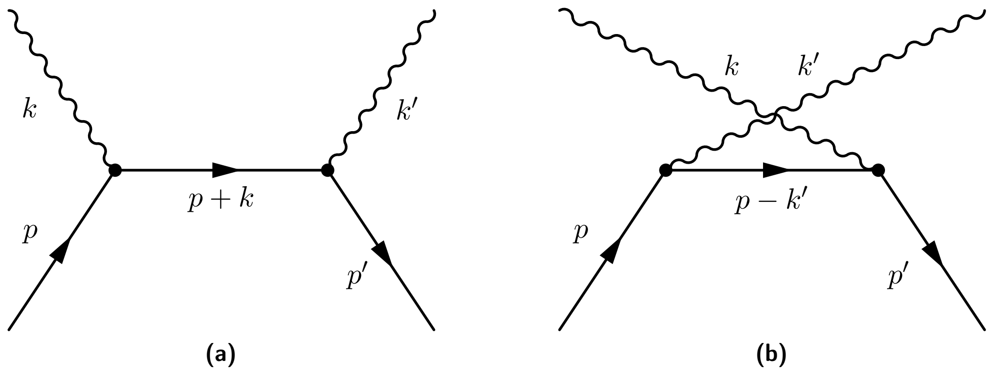


Figura 23: I diagrammi che contribuiscono allo scattering Compton al LO.

Di seguito si calcola la relazione energia-angolo e la formula di Klein-Nishina valutando diagrammi di Feynman di QED, come illustrato in qualsiasi testo di teoria dei campi [9, pp. 158-163].

All'ordine più basso nella costante elettromagnetica α, il conto coinvolge i due diagrammi in Figura 23. L'elemento di matrice $\mathcal{M}$ si ottiene applicando le regole di Feynman alla somma di 23a e 23b:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \bar{u}(p')\left\{(-ie\gamma^\nu)\frac{i}{\not p + \not k - m}(-ie\gamma^\mu)\right.\\ &\quad\left. + (-ie\gamma^\mu)\frac{i}{\not p - \not k' - m}(-ie\gamma^\nu)\right\}u(p)\epsilon_\nu(k')\epsilon_\mu(k)\\ &= -ie^2\bar{u}(p')\left\{\frac{\gamma^\nu(\not p + \not k + m)\gamma^\mu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\mu(\not p - \not k' + m)\gamma^\nu}{(p-k')^2 - m^2}\right\}u(p)\epsilon_\nu(k')\epsilon_\mu(k). \end{aligned} \tag{43}$$

Dato che $p^2 = m^2$ e $k^2 = 0$, $(p+k)^2 - m^2 = 2p\cdot k$ e $(p-k')^2 - m^2 = -2p\cdot k'$. Inoltre, applicando l'equazione di Dirac, $(\not p + m)\gamma^\mu u(p) = 2p^\mu u(p)$. Quindi si ottiene

$$\mathcal{M} = -ie^2\bar{u}(p')\left\{\frac{\gamma^\nu \not k\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\mu \not k'\gamma^\nu - 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k'}\right\}u(p)\epsilon_\nu(k')\epsilon_\mu(k). \tag{44}$$

Il passo successivo consiste nel calcolare $|\mathcal{M}|^2$. Considerando il caso non polarizzato, si media sugli spin e sulle polarizzazioni iniziali e si somma su quelli finali. Sfruttando le identità $\sum_{\text{spin}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m$ e $\sum_{\text{pol.}} \epsilon^*_\mu \epsilon_\nu = -g_{\mu\nu}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{\text{spin,pol}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \cdot \operatorname{tr}\Bigg\{ & (\not{p}' + m)\left[\frac{\gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu - 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k'}\right] \\
& \cdot (\not{p} + m)\left[\frac{\gamma^\rho \not{k} \gamma^\sigma + 2\gamma^\sigma p^\rho}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\sigma \not{k}' \gamma^\rho - 2\gamma^\rho p^\sigma}{2p\cdot k'}\right]\Bigg\} \\
= \frac{e^4}{4}\Bigg[& \frac{\mathbf{I}}{(2p\cdot k)^2} + \frac{\mathbf{II}}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')} + \frac{\mathbf{III}}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)} + \frac{\mathbf{IV}}{(2p\cdot k')^2}\Bigg] \qquad (45)
\end{aligned}$$

dove si sono definite le tracce **I**, **II**, **III** e **IV**. La prima traccia vale

$$\mathbf{I} = \operatorname{tr}[(\not{p}' + m)(\gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu)(\not{p} + m)(\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu)]. \qquad (46)$$

Sviluppando i prodotti si ottengono 16 termini, di cui tutti quelli con un numero dispari di matrici γ sono nulli. Gli 8 rimanenti si possono calcolare utilizzando alcune proprietà dell'algebra delle matrici γ: $\gamma^\alpha \not{p} \gamma_\alpha = -2\not{p}$, $\operatorname{tr}[\not{p}\not{k}] = 4p\cdot k$, $\not{p}\not{p} = p^2 = m^2$. Alla fine si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= 16(4m^4 - 2m^2 p\cdot p' + 4m^2 p\cdot k - 2m^2 p'\cdot k + 2(p\cdot k)(p'\cdot k)) \\
&= 16\left(2m^4 + m^2(s-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\right).
\end{aligned} \qquad (47)$$

dove si sono introdotte le variabili di Mandelstam

$$s = (p+k)^2, \qquad (48a)$$
$$t = (p'-p)^2, \qquad (48b)$$
$$u = (k'-p)^2. \qquad (48c)$$

La traccia **IV** si ottiene facilmente scambiando $k \leftrightarrow -k'$, ossia $s \leftrightarrow u$:

$$\mathbf{IV} = 16\left(2m^4 + m^2(u-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\right). \qquad (49)$$

Il conto per **II**, che risulta uguale a **III**, è molto simile:

$$\mathbf{II} = \mathbf{III} = -8\left(m^4 + m^2(s-m^2) + m^2(u-m^2)\right). \qquad (50)$$

Unendo i vari termini il risultato è

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spin,pol}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2\right]. \qquad (51)$$

Per calcolare la sezione d'urto è necessario scegliere un sistema di riferimento. Per lo scattering Compton una scelta naturale è il sistema del laboratorio in cui l'elettrone è inzialmente a riposo: $p = (m, \mathbf{0})$. Si assume il momento $\mathbf{k}$ iniziale del fotone lungo l'asse z: $k = (k_0, 0, 0, k_0)$. Il quadrimomento finale del fotone è $k' = (k'_0, \mathbf{k}')$, con $k'_0 = |\mathbf{k}'|$, e quello dell'elettrone $p' = (E_{p'}, \mathbf{p}')$, con $E_{p'} = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m^2}$.

Si consideri ora la seguente catena di uguaglianze:

$$m^2 = p'^2 = (p+k-k')^2 = p^2+2p\cdot(k-k')-2k\cdot k' = m^2+2m(k_0-k'_0)-2k_0k'_0(1-\cos\theta), \tag{52}$$

dove θ è l'angolo formato da $\mathbf{k}'$ con l'asse z. Si ricava

$$\frac{1}{k'_0} - \frac{1}{k_0} = \frac{1}{m}(1-\cos\theta), \tag{53}$$

che equivale a

$$k'_0 = \frac{k_0}{1 + \frac{k_0}{m}(1-\cos\theta)}, \tag{54}$$

cioè la formula che lega l'energia del fotone scatterato k'_0 all'energia del fotone incidente k_0 e all'angolo di scattering θ.

La sezione d'urto vera e propria è

$$d\sigma = \frac{1}{2k_0}\frac{1}{2m}\frac{d^3k'}{2k'_0(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{2E_{\mathbf{p}'}(2\pi)^3}\frac{1}{4}\sum_{\text{spin,pol}}|\mathcal{M}|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'+p'-k-p). \tag{55}$$

La $\delta^{(4)}$ può essere utilizzata per integrare sullo spazio delle fasi:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3k'}{2k'_0(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{2E_{\mathbf{p}'}(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'+p'-k-p) \\
=&\int \frac{(k'_0)^2dk'_0d\Omega}{4k'_0E_{\mathbf{p}'}(2\pi)^3}2\pi\delta\left(k'_0+\sqrt{m^2+k_0^2+(k'_0)^2-2k_0k'_0\cos\theta}-k_0-m\right) \\
=&\frac{1}{16\pi^2}\int\frac{k'_0d\Omega}{E_{\mathbf{p}'}}\frac{1}{\left|1+\frac{k'_0-k_0\cos\theta}{E_{\mathbf{p}'}}\right|} \\
=&\frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\frac{k'_0}{m+k_0(1-\cos\theta)} \\
=&\frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\frac{(k'_0)^2}{k_0m}
\end{aligned} \tag{56}$$

dove si è espresso $E_{\mathbf{p}'}$ come

$$E_{\mathbf{p}'} = \sqrt{m^2+|\mathbf{p}'|^2} = \sqrt{m^2+|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2} = \sqrt{m^2+k_0^2+(k'_0)^2-2k_0k'_0\cos\theta} \tag{57}$$

e sfruttato la proprietà $\delta(f(x)) = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^{-1}_{x=0}\delta(x)$ con

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial k'_0}\left(k'_0+\sqrt{m^2+k_0^2+(k'_0)^2-2k_0k'_0\cos\theta}-k_0-m\right) \\
&\qquad = 1+\frac{1}{2\sqrt{\cdots}}(2k'_0-2k_0\cos\theta) = 1+\frac{k'_0-k_0\cos\theta}{E_{\mathbf{p}'}}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Quindi, esprimendo $|\mathcal{M}|^2$ nel sistema di riferimento del laboratorio, si ottiene la sezione d'urto differenziale

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2k_0}\frac{1}{2m}\frac{1}{16\pi^2}\frac{(k_0')^2}{k_0 m}\frac{1}{4}\sum_{\text{spin,pol}}|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{2k_0}\frac{1}{2m}\frac{1}{16\pi^2}\frac{(k_0')^2}{k_0 m}2e^4\left[\frac{k_0'}{k_0}+\frac{k_0}{k_0'}+2m\left(\frac{1}{k_0}-\frac{1}{k_0'}\right)+m^2\left(\frac{1}{k_0}-\frac{1}{k_0'}\right)^2\right] \\ &= \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k_0'}{k_0}\right)^2\left[\frac{k_0'}{k_0}+\frac{k_0}{k_0'}-1+\left(1+m\left(\frac{1}{k_0}-\frac{1}{k_0'}\right)\right)^2\right] \\ &= \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k_0'}{k_0}\right)^2\left[\frac{k_0'}{k_0}+\frac{k_0}{k_0'}-1+\cos^2\theta\right].\end{aligned} \tag{59}$$

B Approfondimento sulla dispersione angolare

B.1 Metodo analitico

Per calcolare analiticamente la dispersione angolare si sono considerati separatamente quattro diversi contributi:

- il contributo dovuto all'estensione sul piano orizzontale dello scatteratore, che risulta limitato dalla larghezza dello scintillatore da 2";
- il contributo dovuto all'estensione verticale dello scatteratore, anch'esso limitato dall'altezza della faccia del 2";
- il contributo dovuto alla superficie finita dello scintillatore da 3", per quanto riguarda il piano orizzontale;
- il contributo dovuto alla superficie finita del 3", componente verticale.

Per ogni contributo (i), modellizzato in Figura 24, viene ricavato un $\Delta\theta_{\text{C}}{}^{(i)}$ che quantifica la differenza fra l'angolo a cui sono posti gli strumenti di misura θ_{C} e l'angolo effettivo di deviazione di un fotone che subisce scattering Compton $\theta_{\text{C}}^{\text{eff}}$. Trattando tutti i contributi come indipendenti tra loro, l'angolo Compton effettivo si ottiene sommando all'angolo di riferimento i quattro $\Delta\theta_{\text{C}}^{(i)}$:

$$\theta_{\text{C}}^{\text{eff}} = \theta_{\text{C}} + \sum_{i=1}^{4}\Delta\theta_{\text{C}}^{(i)}. \tag{60}$$

I $\Delta\theta_{\text{C}}{}^{(i)}$ per il singolo fotone sono funzione dell'angolo nello spazio (θ,φ) con cui esso esce dalla sorgente o viene scatterato. Prendendo in esame un campione statistico di molti fotoni, essi saranno distibuiti secondo la (16), con l'opportuno cut-off δ determinato dai rivelatori. Considerando una distribuzione uniforme, questa trattazione non tiene conto dell'andamento della Klein-Nishina, che favorisce θ_{C} minori. Di conseguenza, sono calcolabili medie e varianze dei contributi; essendo grandezze additive, la somma dà valore medio e varianza di $\theta_{\text{C}}^{\text{eff}}$.

B.1.1 Contributo dello scatteratore, piano orizzontale descritto dalle coordinate (y,z)

Secondo le convenzioni della Figura 24a, la sorgente si trova nel punto $S(0,-l_1)$, il centro dello scatteratore è nell'origine O, il centro della faccia del tre pollici è in $T(l_2\sin\theta_\mathrm{C}, l_2\cos\theta_\mathrm{C})$. La faccia dei mattoni del bersaglio è descritta dall'equazione

$$z=\frac{y}{\tan\frac{\theta_\mathrm{C}}{2}}. \tag{61}$$

Il segmento AB è l'intersezione della faccia dello scatteratore con la proiezione sul piano del cono con vertice nella sorgente, asse lungo z e semiapertura δ. La semiapertura è definita dal cono opposto al vertice che sottende lo scintillatore da 2", e perciò risulta $\delta=\arctan\frac{1"}{l_3}$.

Considerando i triangoli AOS e BOS, si ha rispettivamente

$$\widehat{SAO}=\pi-\frac{\theta_\mathrm{C}}{2}-\delta, \tag{62}$$

$$\widehat{SBO}=\pi-\left(\pi-\frac{\theta_\mathrm{C}}{2}\right)-\delta; \tag{63}$$

e applicando il teorema dei seni si ottiene

$$\overline{AO}=\frac{l_1\sin\delta}{\sin(\frac{\theta_\mathrm{C}}{2}+\delta)}, \tag{64}$$

$$\overline{BO}=\frac{l_1\sin\delta}{\sin(\frac{\theta_\mathrm{C}}{2}-\delta)}. \tag{65}$$

Si consideri un fotone emesso dalla sorgente con un angolo θ rispetto all'asse z e coordinata azimutale φ, se il fotone è dentro il cono avrà $\theta<\delta$. La componente dell'angolo sul piano orizzontale è

$$\theta_o=\theta\cos\varphi. \tag{66}$$

Il raggio interseca il piano dello scintillatore in un punto $P\left(y_P, z_P=\frac{y_P}{\tan\frac{\theta_\mathrm{C}}{2}}\right)$ tale che $y_A<y_P<y_B$, formando un angolo $\widehat{OSP}=\theta_o$. Similmente, l'angolo $\widehat{OTP}$ che il segmento PT forma con OT viene indicato con θ'_o.

Considerando il triangolo SPT, è facile ottenere due dei tre angoli

$$\widehat{PST}=\widehat{OST}-\widehat{OSP}=\widehat{OST}-\theta_o, \tag{67}$$

$$\widehat{PTS}=\widehat{OTS}+\widehat{OTP}=\widehat{OST}+\theta'_o. \tag{68}$$

L'angolo Compton effettivo $\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}$ risulta essere l'angolo esterno corrispondente a $\widehat{SPT}$, perciò è dato dalla somma di (67) e (68)

$$\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}=\pi-\widehat{SPT}=\widehat{PST}+\widehat{PTS}=\theta_\mathrm{C}-\theta_o+\theta'_o; \tag{69}$$

Dato che si assume $\delta \ll 1$, si ottengono le relazioni approssimate

$$\theta_o = \arctan \frac{y_P}{l_1 + z_P} \simeq \frac{y_P}{l_1 + \frac{y_P}{\tan \frac{\theta_C}{2}}}, \tag{70}$$

$$\theta'_o = \arctan \frac{y_P}{l_2 - z_P} \simeq \frac{y_P}{l_2 - \frac{y_P}{\tan \frac{\theta_C}{2}}}; \tag{71}$$

si può ricavare y_P dalla prima

$$y_P \simeq \frac{\theta_o l_1 \tan \frac{\theta_C}{2}}{\tan \frac{\theta_C}{2} - \theta_o} \tag{72}$$

ed inserirlo nella seconda, così da esprimere θ'_o in funzione di θ_o

$$\theta'_o \simeq \frac{l_1 \tan \frac{\theta_C}{2}}{l_2 \tan \frac{\theta_C}{2} - l_2\theta_o - l_1\theta_o}\theta_o. \tag{73}$$

Indicando con $\Delta\theta_C$ la differenza tra l'angolo Compton effettivo e l'angolo ideale, si ottiene infine

$$\Delta\theta_C = \theta_C^{\text{eff}} - \theta_C = -\theta_o + \theta'_o \simeq -\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right)\theta \cos\varphi. \tag{74}$$

Ricordando che l'integrale del coseno sul suo periodo è nullo, il valore medio e la varianza di $\Delta\theta_C$ sono

$$E(\Delta\theta_C) = \frac{2}{\delta^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta} \theta d\theta \left[\left(\frac{l_1}{l_2} - 1\right)\theta\cos\varphi\right] = 0, \tag{75}$$

$$\begin{aligned} V(\Delta\theta_C) &= \frac{2}{\delta^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta} \theta d\theta \left[\left(\frac{l_1}{l_2} - 1\right)\theta\cos\varphi\right]^2 \\ &= \left(\frac{l_1}{l_2} - 1\right)^2 \frac{2\pi}{\delta^2}\int_0^{\delta} \theta^3 d\theta = \left(\frac{l_1}{l_2} - 1\right)^2 \frac{\pi\delta^2}{2}. \end{aligned} \tag{76}$$

B.1.2 Contributo dello scatteratore, piano verticale e asse x

Ora il punto P, invece di trovarsi lungo AB, si trova sul segmento CD in Figura 24d a un'altezza indicata con la coordinata verticale x_P. Anche in questo caso l'angolo Compton effettivo $\theta_C^{\text{eff}} = \pi - \widehat{SPT}$ risulta diverso dall'angolo $\theta_C = \pi - \widehat{SOT}$. Applicando il teorema di Carnot, vale

$$\overline{ST}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{TP}^2 - 2\overline{SP}\,\overline{TP}\cos(\pi - \theta_C^{\text{eff}}), \tag{77}$$

e contemporaneamente

$$\overline{ST}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{TO}^2 - 2\overline{SO}\,\overline{TO}\cos(\pi - \theta_C) = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos\theta_C. \tag{78}$$

Inoltre SOP e TOP sono triangoli rettangoli nel vertice O, perciò

$$\overline{SP}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{PO}^2 = l_1^2 + x_P^2, \tag{79}$$

$$\overline{TP}^2 = \overline{TO}^2 + \overline{PO}^2 = l_2^2 + x_P^2. \tag{80}$$

Uguagliando la (77) e (78), sfruttando (79) e (80), si ottiene

$$\begin{aligned}\cos\theta_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}} &= \frac{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos\theta_{\mathrm{C}} - l_1^2 - x_P^2 - l_2^2 - x_P^2}{2\sqrt{l_1^2 + x_P^2}\sqrt{l_2^2 + x_P^2}} \\ &= \frac{l_1 l_2 \cos\theta_{\mathrm{C}} - x_P^2}{\sqrt{l_1^2 + x_P^2}\sqrt{l_2^2 + x_P^2}} = \frac{\cos\theta_{\mathrm{C}} - \frac{x_P^2}{l_1 l_2}}{\sqrt{1 + \frac{x_P^2}{l_1^2}}\sqrt{1 + \frac{x_P^2}{l_2^2}}}.\end{aligned} \tag{81}$$

Come nel caso precedente, si può sviluppare nell'intorno di $x = 0$,

$$\begin{aligned}\cos\theta_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}} &\simeq \left(\cos\theta_{\mathrm{C}} - \frac{x_P^2}{l_1 l_2}\right)\left(1 - \frac{x_P^2}{2l_1^2}\right)\left(1 - \frac{x_P^2}{2l_2^2}\right) \\ &\simeq \cos\theta_{\mathrm{C}} - x_P^2\left(\frac{1}{l_1 l_2} + \frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{2}\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right)\right),\end{aligned} \tag{82}$$

e, invertendo la funzione coseno,

$$\theta_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}} \simeq \arccos\left\{\cos\theta_{\mathrm{C}} - x_P^2\left(\frac{1}{l_1 l_2} + \frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{2}\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right)\right)\right\}. \tag{83}$$

L'espressione $\arccos\{\cos\alpha + \epsilon\}$ è sviluppabile nell'intorno di $\epsilon \to 0$ e nell'intervallo $0 < \alpha < \pi$ risulta

$$\arccos\{\cos\alpha + \epsilon\} = \alpha - \frac{\epsilon}{\sin\alpha} - \frac{\epsilon^2 \cos\alpha}{2\sin^3\alpha} + O(\epsilon^3). \tag{84}$$

Applicando la (84) alla (83) si ottiene

$$\Delta\theta_{\mathrm{C}} = \theta_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}} - \theta_{\mathrm{C}} \simeq \frac{x_P^2}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\left(\frac{1}{l_1 l_2} + \frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{2}\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right)\right); \tag{85}$$

riutilizzando le coordinate (θ, φ) per descrivere la traiettoria del fotone, in modo simile alla (66), la componente verticale x_P risulterà

$$x_P = l_1 \tan\theta \sin\varphi, \tag{86}$$

perciò, approssimando $\tan\theta$ con θ, si arriva a

$$\Delta\theta_{\mathrm{C}} \simeq \left(\frac{l_1}{l_2 \sin\theta_{\mathrm{C}}} + \frac{1}{2\tan\theta_{\mathrm{C}}}\left(1 + \frac{l_1^2}{l_2^2}\right)\right)\theta^2 \sin^2\varphi = N\theta^2 \sin^2\varphi. \tag{87}$$

Il valore medio di $\Delta\theta_\mathrm{C}$ si ottiene dalla

$$\begin{aligned} E(\Delta\theta_\mathrm{C}) &= \frac{2}{\delta^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta} \theta d\theta \left[N\theta^2 \sin^2\varphi\right] \\ &= N\frac{2\pi}{\delta^2}\int_0^{\delta}\theta^3 d\theta = N\frac{\pi\delta^2}{2}, \end{aligned} \tag{88}$$

invece la varianza risulta

$$\begin{aligned} V(\Delta\theta_\mathrm{C}) &= \frac{2}{\delta^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta} \theta d\theta \left[N\theta^2 \sin^2\varphi\right]^2 \\ &= N^2\frac{3\pi}{2\delta^2}\int_0^{\delta}\theta^5 d\theta = N^2\frac{\pi\delta^4}{4}. \end{aligned} \tag{89}$$

B.1.3 Contributo del 3", piano orizzontale descritto dalle coordinate (y, z)

Nel conto per il 3" si assume che i fotoni provengono dal centro dello scatteratore posto nell'origine, come in Figura 24c. I fotoni diffusi formano con il 3" un cono di semiapertura $\delta' = \arctan \frac{1.5"}{l_2}$. Il centro geometrico della faccia dello scintillatore è T, mentre il fotone incide in Q. Per quanto riguarda la componente sul piano (y, z), indicando con θ_o l'angolo $\widehat{TOQ}$, esso si somma direttamente all'angolo Compton θ_C. Notando che $\theta_o = \theta\cos\varphi$, dove (θ, φ) sono gli angoli nello spazio tridimensionale del raggio OQ rispetto a OT, si ottiene

$$\Delta\theta_\mathrm{C} = \theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff} - \theta_\mathrm{C} = \theta_o = \theta\cos\varphi. \tag{90}$$

Il valor medio di $\Delta\theta_\mathrm{C}$ risulta

$$E(\Delta\theta_\mathrm{C}) = \frac{2}{\delta'^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta'} \theta d\theta[\theta\cos\varphi] = 0, \tag{91}$$

poichè l'integrale di $\cos\varphi$ sul suo periodo è nullo. La varianza invece vale

$$V(\Delta\theta_\mathrm{C}) = \frac{2}{\delta'^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta'} \theta d\theta[\theta\cos\varphi]^2 = \frac{2\pi}{\delta'^2}\int_0^{\delta'}\theta^3 d\theta = \frac{\pi\delta'^2}{2}. \tag{92}$$

B.1.4 Contributo del 3", piano verticale e asse x

Si analizza ora il contributo dovuto ad un punto di intersezione Q (in Figura 24b) sulla verticale passante per il punto T, denominando l'angolo $\widehat{TOQ}$ con θ_v. Il punto R è la proiezione di T sull'asse z, perciò $\overline{RT} = \overline{OT}\sin\theta_\mathrm{C} = l_2\sin\theta_\mathrm{C}$. Anche Q proiettato sull'asse z cade in R e vale che $\overline{RQ} = \overline{OQ}\sin\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff} = \frac{l_2}{\cos\theta_v}\sin\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}$. Infine $\overline{TQ} = \overline{OT}\tan\theta_v \simeq l_2\theta_v$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo TRQ si ha

$$\frac{\sin^2\theta_\mathrm{C}^\mathrm{eff}}{\cos^2\theta_v} \simeq \sin^2\theta_\mathrm{C} + \theta_v^2, \tag{93}$$

dunque

$$\sin\theta_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}} \simeq \cos\theta_v\sqrt{\sin^2\theta_{\mathrm{C}}+\theta_v^2} \simeq \sin\theta_{\mathrm{C}}\left(1+\theta_v^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta_{\mathrm{C}}}-1\right)\right). \tag{94}$$

Invertendo la funzione tangente risulta

$$\theta_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}} \simeq \arcsin\left\{\sin\theta_{\mathrm{C}}+\frac{\theta_v^2\cos^2\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\right\}. \tag{95}$$

Lo sviluppo di $\arcsin\{\sin\alpha+\epsilon\}$ nell'intorno di $\epsilon\to 0$, considerato l'intervallo di validità $0<\alpha<\pi$, è

$$\arcsin\{\sin\alpha+\epsilon\} = \alpha+\epsilon\frac{1}{\cos\alpha}+\epsilon^2\frac{\sin\alpha}{2\cos^3\alpha}+O(\epsilon^3). \tag{96}$$

Sostituendo la (96) nella (95) e osservando che $\theta_v=\theta\sin\varphi$ si ottiene

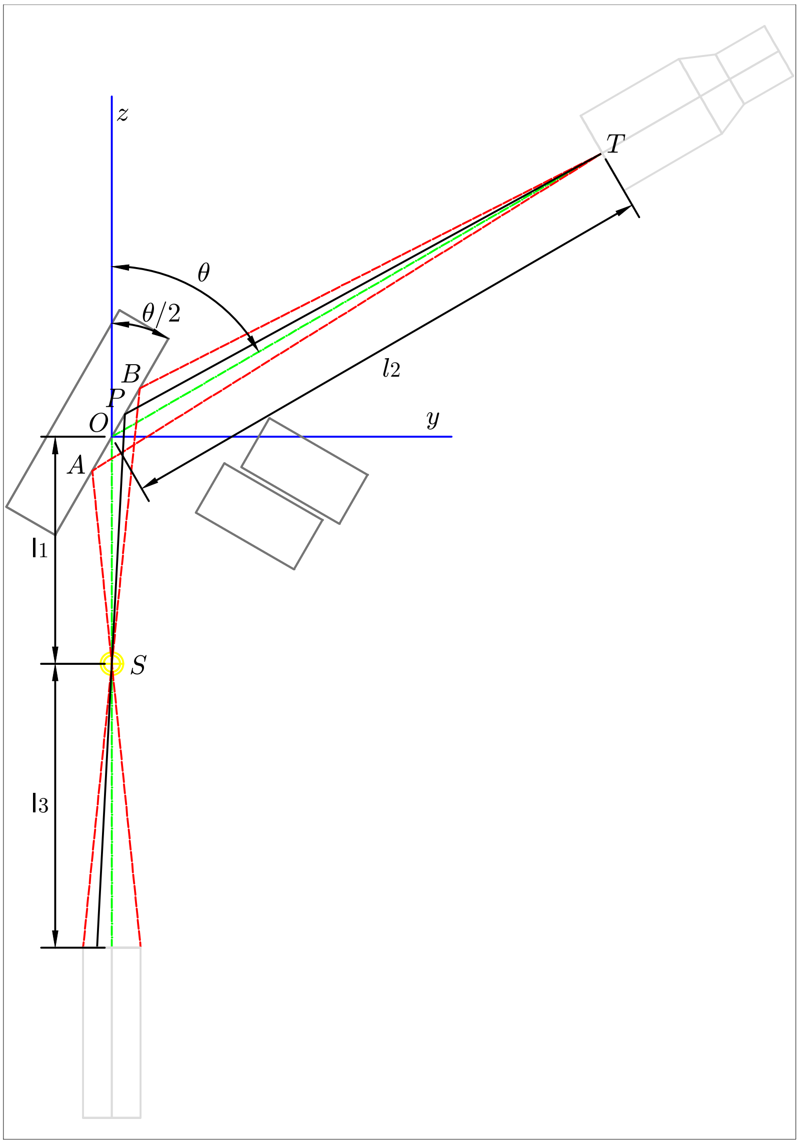
$$\Delta\theta_{\mathrm{C}} = \theta_{\mathrm{C}}^{\mathrm{eff}}-\theta_{\mathrm{C}} \simeq \frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\theta_v^2 \simeq \frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\theta^2\sin^2\varphi. \tag{97}$$

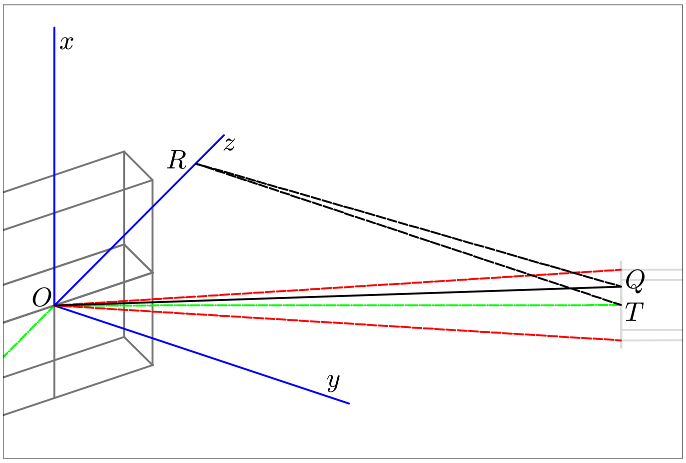
Il valore medio è

$$\begin{aligned} E(\Delta\theta_{\mathrm{C}}) &= \frac{2}{\delta'^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\delta'}\theta d\theta\left[\frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\theta^2\sin^2\varphi\right] \\ &= \frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\frac{2\pi}{\delta'^2}\int_0^{\delta'}\theta^3 d\theta = \frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\frac{\pi\delta'^2}{2}, \end{aligned} \tag{98}$$

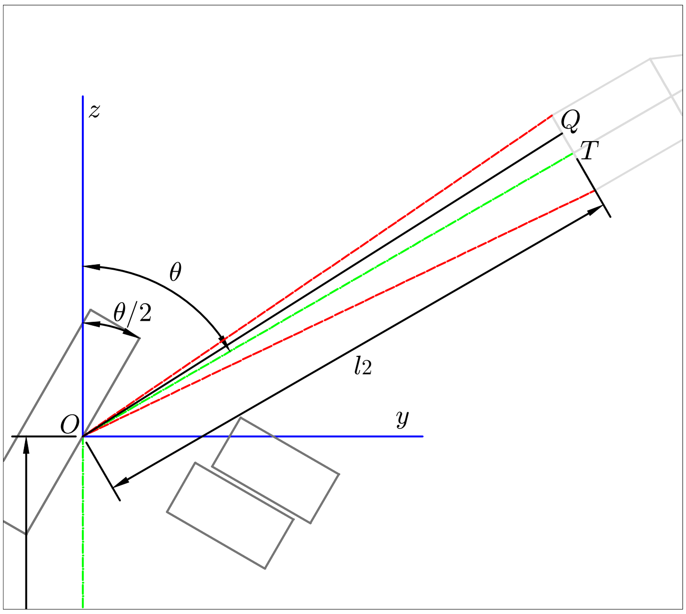
mentre la varianza è data da

$$\begin{aligned} V(\Delta\theta_{\mathrm{C}}) &= \frac{2}{\delta'^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\delta'}\theta d\theta\left[\frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\theta^2\sin^2\varphi\right]^2 \\ &= \left(\frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\right)^2\frac{3\pi}{2\delta'^2}\int_0^{\delta'}\theta^5 d\theta = \left(\frac{\cos\theta_{\mathrm{C}}}{\sin\theta_{\mathrm{C}}}\right)^2\frac{\pi\delta'^4}{4}. \end{aligned} \tag{99}$$



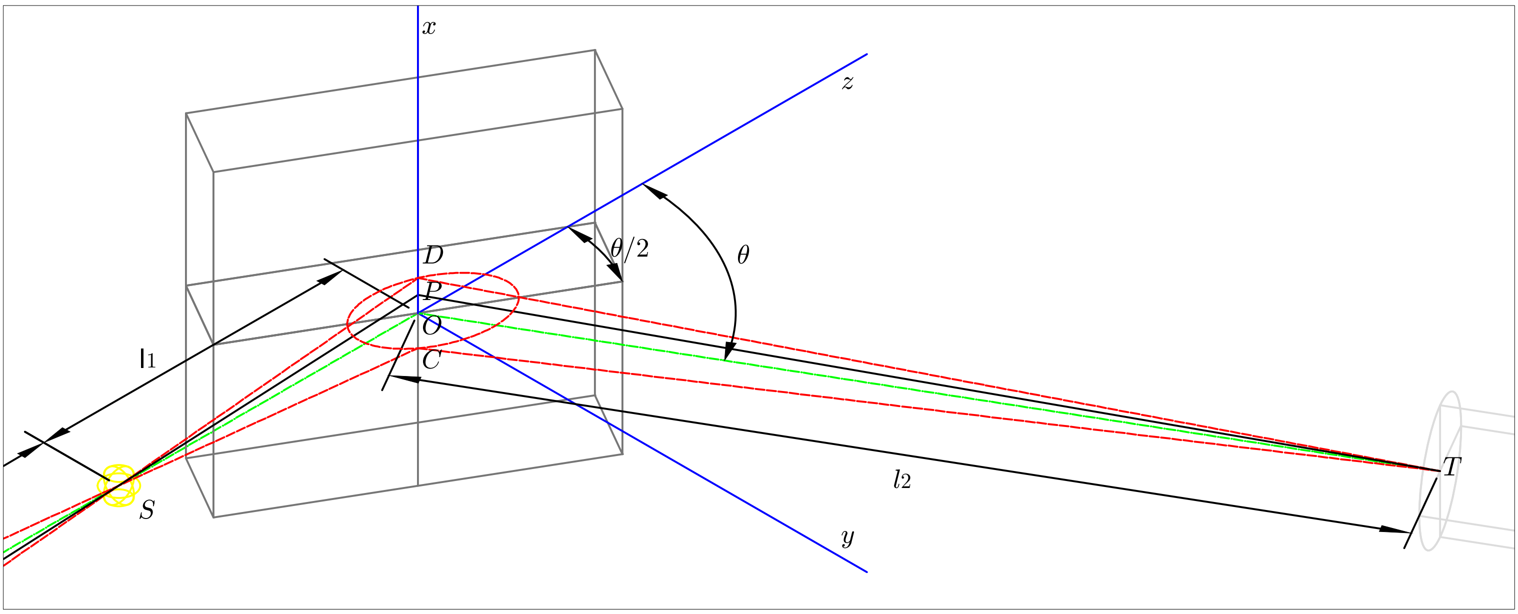


(b) 3", verticale.



(a) Scatteratore, orizzontale.

(c) 3", orizzontale.



(d) Scatteratore, verticale.

Figura 24: Disegni della geometria per il calcolo della dispersione angolare.

B.1.5 Somma dei contributi

Il valore di aspettazione di θ_C^{eff} è dato dalla

$$E(\theta_C^{\text{eff}}) = E(\theta_C) + \sum_{i=1}^{4} E(\Delta\theta_C^{(i)}), \tag{100}$$

perciò risulta diverso da $E(\theta_C) = \theta_C$ per i contributi di (88) e (98) il cui valore numerico è espresso in radianti:

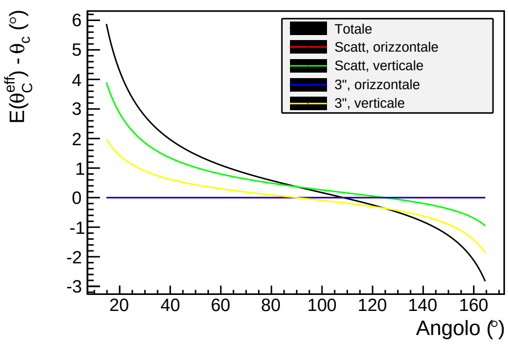
$$\begin{aligned} E(\theta_C^{\text{eff}}) &= \theta_C + \left(\frac{l_1}{l_2 \sin\theta_C} + \frac{1}{2\tan\theta_C} \left(1 + \frac{l_1^2}{l_2^2} \right) \right) \frac{\pi\delta^2}{2} + \frac{\cos\theta_C}{\sin\theta_C} \frac{\pi\delta'^2}{2} \\ &= \theta_C + \frac{0.00644}{\sin\theta_C} + \frac{0.00934}{\tan\theta_C} + 0.00909 \frac{\cos\theta_C}{\sin\theta_C}. \end{aligned} \tag{101}$$

Alla varianza di θ_C^{eff} contribuiscono invece

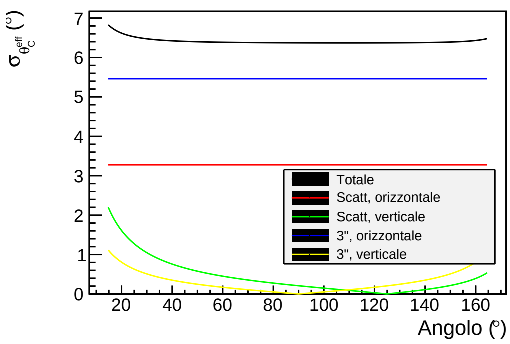
$$V(\theta_C^{\text{eff}}) = V(\theta_C) + \sum_{i=1}^{4} V(\Delta\theta_C^{(i)}), \tag{102}$$

quindi sommando a $V(\theta_C) = 0$ la (76), la (89), la (92) e la (99):

$$\begin{aligned} V(\theta_C^{\text{eff}}) &= \left(\frac{l_1}{l_2} - 1 \right)^2 \frac{\pi\delta'^2}{2} + \left(\frac{l_1}{l_2 \sin\theta_C} + \frac{1}{2\tan\theta_C} \left(1 + \frac{l_1^2}{l_2^2} \right) \right)^2 \frac{\pi\delta^4}{4} \\ &+ \frac{\pi\delta'^2}{2} + \left(\frac{\cos\theta_C}{\sin\theta_C} \right)^2 \frac{\pi\delta'^4}{4} \\ &= 0.003271 + 0.000082 \left(\frac{0.4}{\sin\theta_C} + \frac{0.58}{\tan\theta_C} \right)^2 + 0.009086 + 0.000026 \frac{\cos^2\theta_C}{\sin^2\theta_C}. \end{aligned} \tag{103}$$



(a) Valore medio.



(b) Deviazione standard.

Figura 25: Valore medio e deviazione standard dell'angolo Compton effettivo θ_C^{eff} al variare dell'angolo di riferimento θ_C. I singoli contributi sono in diversi colori, la somma è in nero.

Estraendo la radice della varianza si ottiene la deviazione standard $\sigma_{\theta_C^{\text{eff}}}$.

In Figura 25 si visualizza il risultato di questo conto. I valori precisi per gli angoli utilizzati durante la presa dati sono riportati in Tabella 1.

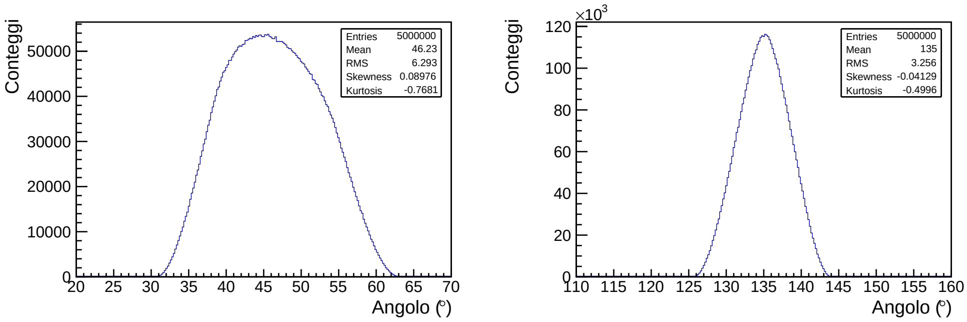
B.2 Metodo Monte Carlo

La dispersione angolare è stata valutata anche con un codice Monte Carlo che simula la geometria dell'apparato sperimentale.

Si definisce un sistema di coordinate cartesiane nella cui origine si pone la sorgente S. Per simulare l'emissione isotropa di fotoni da parte di essa, si utilizza il metodo `Rndm()` della classe `TRandom2` di ROOT, che genera numeri casuali distribuiti uniformemente tra 0 e 1. Con questi numeri, si genera una distribuzione di raggi (θ^*, ϕ^*) uniforme nello spazio e si selezionano le direzioni con $0 \leq \theta \leq \delta$, ovvero quelli all'interno del cono definito dall'angolo solido sotteso al 2" di semiapertura δ. Si fa propagare il fotone dalla sorgente ad un punto P dello scatteratore individuato intersecando la direzione stabilita da (θ^*, ϕ^*) con il piano definito dalla superficie dello scatteratore. In questo modo si trova la distanza r_P del punto P dalla sorgente. Con un'opportuna funzione si passa dalle coordinate polari a quelle cartesiane e si sposta il punto P nell'origine delle coordinate.

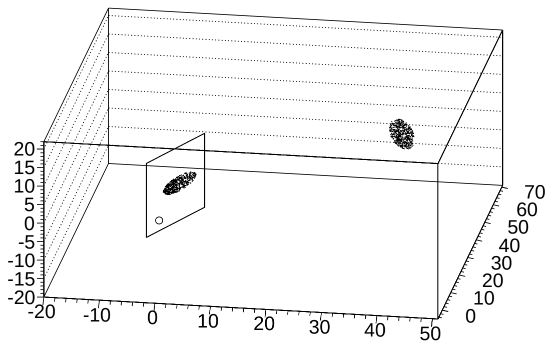
Una volta interagito con il target, i fotoni vengono diffusi verso il 3". Non viene considerata la dinamica dello scattering Compton, ovvero la Klein-Nishina non viene implementata. Per questo motivo sono semplicemente generati altri due angoli distribuiti in maniera uniforme sulla sfera unitaria centrata in P. La coppia di angoli (θ_2^*, ϕ_2^*) definisce la direzione del fotone scatterato; l'intersezione di questa con il piano contenente la faccia del 3" determina la posizione del punto Q. Si selezionano esclusivamente i punti Q interni allo scintillatore, ovvero quelli la cui distanza d_Q dal centro del 3" è minore di $r = 1.5$". I punti Q che non soddisfano questa condizione vengono scartati. Il codice è contenuto in un loop programmato per arrestarsi al raggiungimento di un numero definito di punti Q tali che $d_Q < r$.

Attraverso opportuni cambi di coordinate, si ottiene la misura dell'angolo complementare a $\widehat{SPQ}$, che è l'angolo effettivo di deviazione del fotone rispetto alla direzione iniziale. Questi angoli di deviazione corrispondenti sono raccolti in un grafico come quelli in Figura 26. Dall'istogramma sono estratte la media e la deviazione standard dei dati contenuti, che si interpretano come una stima del valore medio dell'angolo di scattering Compton effettivo θ_C^{eff} e dell'errore ad esso associato. La procedura è ripetuta per ogni angolo θ_C a cui si è effettuata una presa dati. Il calcolo definitivo è ottenuto richiedendo un campione statistico di 5×10^6 elementi, i risultati sono in Tabella 1. Dai grafici è evidente che ad angoli di scattering minori è associata una dispersione maggiore, oltre ad una deviazione positiva del valore medio rispetto a θ_C. Una rappresentazione grafica 3D della simulazione, effettuata a scopo dimostrativo con sole 600 coppie di punti P e Q, è mostrata in Figura 27.

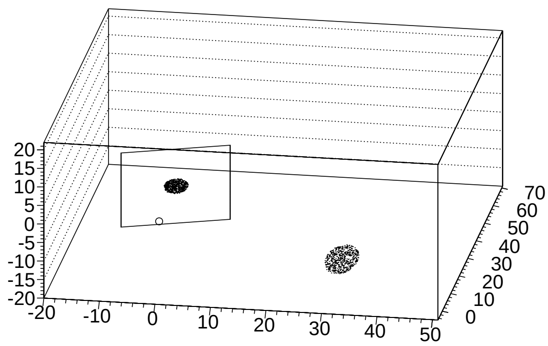


(a) Angolo di 45°. **(b)** Angolo di 135°.

Figura 26: Risultato della simulazione Monte Carlo per due diversi angoli.



(a) Angolo di 45°.



(b) Angolo di 135°.

Figura 27: Simulazione Monte Carlo in tre dimensioni per due diversi angoli.

C Torio in equilibrio secolare

Si considera il decadimento radioattivo di un nuclide $\mathrm{X_1}$ in un nucleo figlio $\mathrm{X_2}$ che decade a sua volta

$$\mathrm{X_1} \xrightarrow{\tau_1} \mathrm{X_2} \xrightarrow{\tau_2} \mathrm{X_3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \xrightarrow{\tau_n} \mathrm{X_n}. \tag{104}$$

Indicando con τ la vita media di un nuclide, il numero dei nuclei padre varia nel tempo secondo la legge

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{1}{\tau_1} N_1, \tag{105}$$

mentre il numero di nuclei di $\mathrm{X_2}$ diminuisce secondo il decadimento di quest'ultimo e aumenta in funzione del decadimento di $\mathrm{X_1}$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{1}{\tau_1} N_1 - \frac{1}{\tau_2} N_2. \tag{106}$$

Integrando le equazioni differenziali (105) e (106), ponendo $N_1(0) = N_0$ e $N_2(0) = N_3(0) = ... = N_n(0) = 0$, si ottengono il numero di $\mathrm{X_1}$ e di $\mathrm{X_2}$ presenti al tempo t

$$N_1(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \tag{107a}$$

$$N_2(t) = N_0 \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}). \tag{107b}$$

Nel caso particolare in cui la vita media del padre sia molto maggiore della vita media del nuclide figlio, $\tau_1 \gg \tau_2$, le equazioni (107) si semplificano in

$$N_1(t) \approx N_0 \tag{108a}$$

$$N_2(t) \approx N_0 \frac{\tau_2}{\tau_1} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}). \tag{108b}$$

Definendo l'attività con $A(t) = \frac{1}{\tau} N(t)$, per il padre si ha $A_1 \approx \frac{1}{\tau_1} N_0$ mentre per il figlio si ricava

$$A_2(t) \approx \frac{1}{\tau_1} N_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}). \tag{109}$$

Dall'equazione (109) si evince che quando $\tau_1 \gg t \gg \tau_2$ l'attività del figlio diventa uguale a quella del padre, ovvero $A_1 = A_2$. Se il nucleo $\mathrm{X_1}$ è il capostipite di una catena di decadimento e vale $\tau_1 \gg \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n$, si stabilisce l'*equilibrio secolare*: l'attività di ciascun radionuclide figlio si mantiene costante nel tempo ed uguale a quella del padre.

In natura esistono radionuclidi che hanno un tempo di dimezzamento $t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$ confrontabile con l'età della Terra. Se questi decadono originando dei nuclei instabili che decadono a loro volta con tempi di dimezzamento molto più brevi, si crea una catena radioattiva in cui si instaura l'equilibrio secolare. Ad esempio il ^{232}Th, che ha $t_{\frac{1}{2}}$ $=14.05 \times 10^9$y, genera la serie del torio. Nella Tabella 3 sono riportati modo di decadimento con relativo BR, tempo di dimezzamento, prodotti di decadimento, energia ed intensità dei raggi γ di diseccitazione per ciascun nucleo presente nella catena del ^{232}Th. La Figura 28 rappresenta schematicamente la catena di decadimento del ^{232}Th.

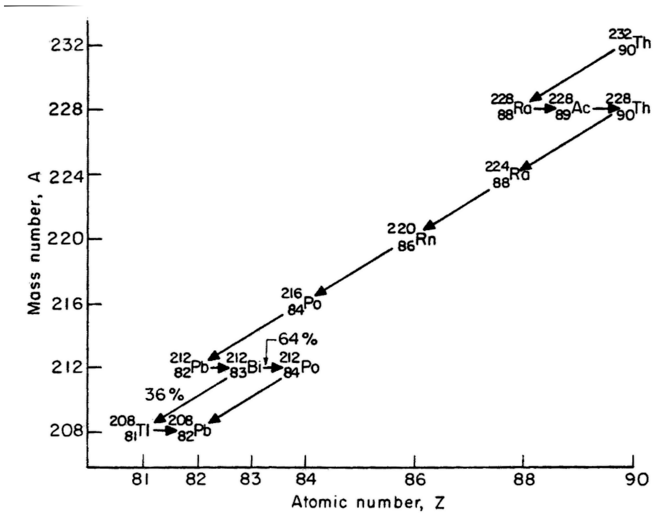


Figura 28: Catena di decadimento della serie del ^{232}Th.

Tabella 3: Nuclidi della catena del ^{232}Th con rispettivi modi di decadimento e BR, tempi di dimezzamento, prodotti di decadimento. L'energia e l'intensità dei fotoni emessi dai nuclei figli sono relative solo ai picchi che sono ben risolti.

Nuclide	Modo	BR (%)	$t_{\frac{1}{2}}$	Prodotti	E_γ (keV)	I_γ (%)
^{232}Th	α	100	14.05×10^9y	^{228}Ra	-	-
^{228}Ra	β^-	100	5.75 y	^{228}Ac	-	-
^{228}Ac	β^-	100	6.15 y	^{228}Th	338.32	11.27
^{228}Th	α	100	1.91 y	^{224}Ra	-	-
^{224}Ra	α	100	3.66 d	^{220}Rn	-	-
^{220}Rn	α	100	55.6 s	^{216}Po	-	-
^{216}Po	α	100	0.14 s	^{212}Pb	-	-
^{212}Pb	β^-	100	10.64 h	^{212}Bi	238.63	43.30
^{212}Pb	β^-	64.06	60.55 min	^{212}Po	727.33	10.27
	α	35.94		^{208}Tl	-	-
^{212}Po	α	100	299 ns	^{208}Pb	-	-
^{208}Tl	β^-	100	3.053 min	^{208}Pb	583.19	84.50

Essendo in equilibrio secolare, la sorgente di torio è utile per studiare l'andamento dell'efficienza del 3" al variare dell'energia dei fotoni rivelati. A partire dai dati riportati in Tabella 3 e dall'attività della sorgente utilizzata, si possono calcolare le intensità assolute dei picchi. Moltiplicando tale valore per l'angolo solido sotteso al 3" si trova il numero di fotoni incidenti. Acquisendo uno spettro ed estrapolando con un fit l'area sottesa ai picchi, si ricava il numero di eventi registrati dallo scintillatore. Il rapporto tra il numero di eventi osservati e il numero di quelli attesi per ciascun picco restituisce l'efficienza del 3" per le energie considerate. Idealmente si dovrebbe porre la sorgente di torio a

50 cm dallo scintillatore per ottenere direttamente l'efficienza che compare nelle misure di effetto Compton. Tuttavia la scarsa attività della sorgente disponibile (circa 1.1 kBq) non ha permesso questa configurazione: i picchi sono poco evidenti sul fondo. Si è quindi sperimentato un approccio indiretto. È stato acquisito uno spettro con la sorgente posta a 1 cm dal 3", come riportato in Figura 29. Si è calcolata l'efficienza alle energie dei quattro picchi ben distinguibili, quelli indicati in Tabella 3. Utilizzando l'andamento di ε_{int} in funzione della distanza, calcolato a 511 keV nella sezione 6.1, si è poi cercato di estrapolare l'efficienza al variare dell'energia alla distanza di 50 cm. Purtroppo questo tentativo non ha prodotto risultati interessanti: l'efficienza così ottenuta risulta troppo bassa rispetto ai valori riportati in *Applied gamma-ray spectrometry* [7].

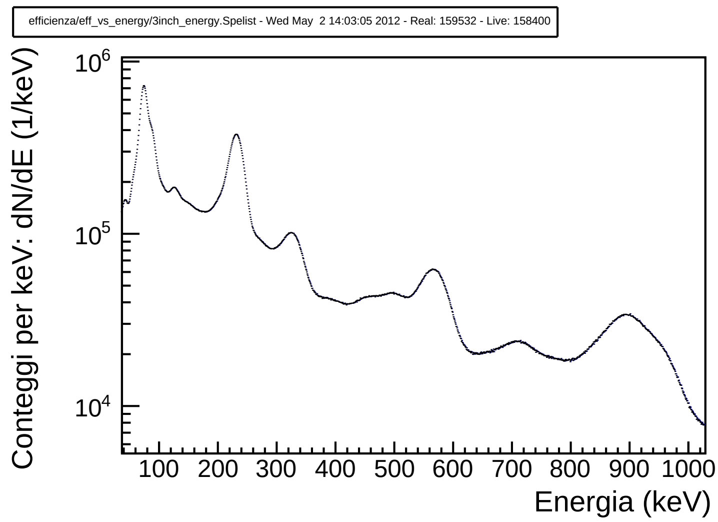


Figura 29: Spettro della sorgente di ^{232}Th acquisito a 1 cm dallo scintillatore.

Riferimenti bibliografici

[1] Korea Atomic Energy Research Institute. *Nuclear Data Center*. 2000. URL: http://atom.kaeri.re.kr/.

[2] G.F. Knoll. *Radiation detection and measurement*. 3^{a} ed. Wiley, 2002.

[3] ORTEC. *570 Amplifier*. URL: http://www.ortec-online.com/download/570.pdf.

[4] SILENA. *Amplifier/TISCA mod.7616 users' guide*.

[5] G. Albani et al. *Effetto Compton*. Università degli Studi di Milano–Bicocca, 2010–2011.

[6] F. Cottini, C. Raimondi e E. Rapisarda. *Compton Effect Measurements*. Università degli Studi di Milano–Bicocca, 2006–2007. URL: http://virgilio.mib.infn.it/~labdida/lib/exe/fetch.php?media=compton_effect.pdf.

[7] C.E. Crouthamel, F. Adams e R. Dams. *Applied gamma-ray spectrometry*. Pergamon Press Oxford, 1970.

[8] M.J. Berger et al. *XCOM: Photon Cross Section Database*. URL: http://www.nist.gov/pml/data/xcom/index.cfm.

[9] M.E. Peskin e D.V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.