

Effetto Compton

Giorgia Albani Fabio Colombo Jacopo Dalmasson Alessandra Gaeta
Laboratorio di Misure Nucleari e Subnucleari

26 settembre 2011

Abstract

Durante questa esperienza di laboratorio è stato effettuato uno studio delle osservabili relative all'effetto Compton, verificando sperimentalmente la relazione tra l'angolo di scattering e l'energia del fotone deflesso e misurando la sezione d'urto differenziale del processo.

Nella seconda parte si è proceduto inoltre all'allestimento di un esperimento per la misura della parità del positronio.

Vengono descritte sia le procedure di ottimizzazione e calibrazione eseguite nella fase preliminare, sia l'analisi dei risultati ottenuti.

1 Introduzione

L'interazione dei fotoni con la materia avviene tramite tre modalità principali:

- assorbimento fotoelettrico;
- scattering Compton;
- produzione di coppie.

Essendo i fotoni neutri, l'interazione non avviene in modo continuo come nel caso delle particelle cariche pesanti, bensì in maniera improvvisa, con un trasferimento totale o parziale di energia. A causa di questa caratteristica, i fotoni non sono rivelabili in modo diretto ma unicamente tramite i prodotti secondari della loro interazione (nel nostro caso elettroni).

La probabilità relativa dei tre processi elencati precedentemente dipende sia dall'energia del fascio di fotoni incidenti, sia dal numero atomico Z del materiale di assorbimento. In particolare, ciascuno di essi è dominante in range energetici piuttosto differenti, che possono variare da qualche centinaio di keV nel caso dell'effetto fotoelettrico, fino ad energie superiori

a 5 MeV per la produzione di coppie. L'effetto Compton risulta essere più probabile per le energie intermedie (≈ 100 keV - 5 MeV) tipiche delle sorgenti di radioisotopi (vedi figura 1) [1].

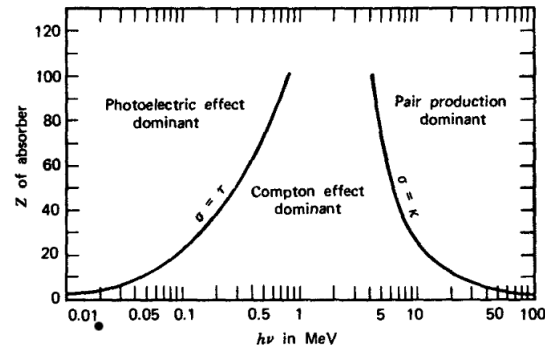


Figura 1: Dipendenza della sezione d'urto dal numero atomico Z e dall'energia del fotone incidente ($h\nu$). Le curve di livello rappresentano i valori di Z e $h\nu$ per i quali i due effetti adiacenti sono equiprobabili.

1.1 Effetto Compton

Nell'effetto Compton l'interazione avviene tra un fotone incidente e un elettrone del materiale assorbente, che si ipotizza essere inizialmente libero e a riposo. Il processo è descritto idealmente dalla relazione sintetica:

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

e dai diagrammi di Feynman seguenti:

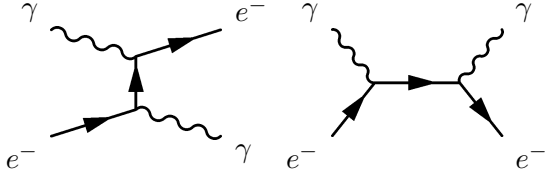


Figura 2: Diagrammi di Feynman per lo scattering Compton.

Come risultato dell'interazione il fotone trasferisce parte della sua energia all'elettrone del materiale, che rincula, e viene deflesso di un angolo θ rispetto alla direzione iniziale di incidenza (vedi figura 3).

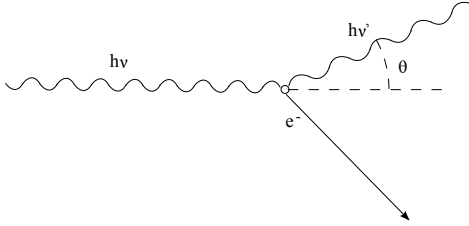


Figura 3: Rappresentazione pittorica dello scattering Compton.

Applicando al processo le leggi di conservazione di energia e momento, si ottiene che l'energia che rimane al fotone in seguito all'interazione è data da:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}. \quad (1)$$

dove $h\nu$ è l'energia iniziale del fotone incidente e m_e è la massa dell'elettrone.

Definendo per brevità $\alpha = h\nu/m_e c^2$, dall'equazione precedente risulta evidente come $h\nu'$ vari a seconda dell'angolo di deflessione, passando da un valore minimo pari a $h\nu/(1 + 2\alpha)$

(quando $\theta = \pi$) ad un valore massimo pari all'energia iniziale $h\nu$ (se $\theta = 0$).

La sezione d'urto differenziale, per fotoni non polarizzati diffusi in un elemento di angolo solido $d\Omega$, è predetta dalla *formula di Klein-Nishina* [1][2]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_0^2 \left[\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right]^2 \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \left[1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) [1 + \alpha(1 - \cos \theta)]} \right] \quad (2)$$

dove r_0 è il cosiddetto "raggio classico dell'elettrone", definito come:

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2}$$

con ϵ_0 permittività elettrica nel vuoto ed e carica dell'elettrone.

In figura 4 è riportata la distribuzione angolare, in coordinate polari, della sezione d'urto per fotoni incidenti aventi diverse energie.

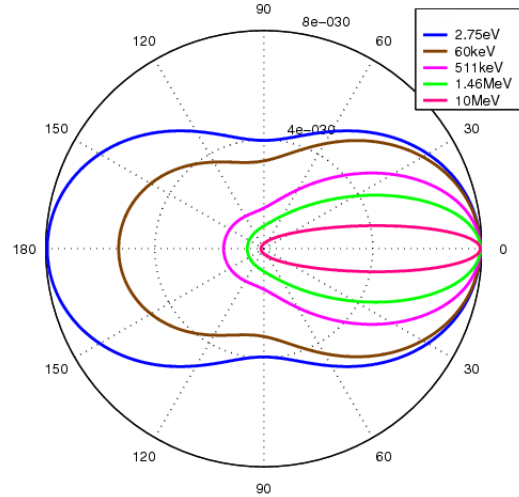


Figura 4: Plot, in coordinate polari, della sezione d'urto in funzione dell'angolo di deflessione. I diversi colori corrispondono alle diverse energie dei fotoni incidenti.

Finora è stato assunto che l'elettrone possa essere considerato libero; in realtà, essendo all'interno di un materiale, esso è sempre in qualche modo legato. Questa energia di legame

può avere effetto visibile sulla forma del continuum, specialmente a basse energie del γ incidente. L'effetto però è spesso mascherato dalla risoluzione energetica finita dei rivelatori.

2 Setup Sperimentale

2.1 Tecnica Sperimentale

La procedura sperimentale adottata per lo studio dello scattering Compton consiste nel far incidere un fascio di fotoni su un materiale che ne provochi la diffusione (scatteratore).

Un rivelatore posto a vari angoli rispetto alla direzione di volo iniziale del fotone riveste la funzione di spettrometro, permettendo di verificare la relazione energia/angolo (equazione 1) e la Klein-Nishina (equazione 2).

I fotoni provengono da una sorgente radioattiva di ^{22}Na , il quale decade β^+ (BR 90.5%, $t_{1/2} = 2,6y$, Q-value = 2842 keV) su un nucleo eccitato di $^{22}\text{Ne}^*$, emettendo un positrone. Quest'ultimo forma uno stato legato (positronio) con uno degli elettroni circostanti, a riposo nel sistema del laboratorio. Il positronio ha una vita media che varia da 10^{-10}s a 10^{-7}s , a seconda dell'orientazione relativa degli spin dell'elettrone e del positrone (para-positronio o orto-positronio). Successivamente, i due costituenti si annichilano producendo, nel caso del para-positronio, due fotoni back-to-back aventi un'energia nel centro di massa di 511 keV ciascuno¹.

La diseccitazione elettromagnetica del nucleo di $^{22}\text{Ne}^*$ sul ground-level, che può essere considerata contemporanea rispetto al processo precedente, provoca l'emissione di un ulteriore fotone avente un'energia di 1274 keV.

I due processi in cascata sono sintetizzati nelle relazioni 3 e 4 e nel diagramma dei livelli energetici riportato in figura 5. L'utilizzo dei fotoni provenienti dall'annichilazione del positronio permette di associare ai fotoni diffusi verso il rivelatore che svolge la funzione di spettrometro (indicato con (A) nello schema

di figura 6) un'informazione sia di tipo energetico che direzionale.

$$^{22}\text{Na} \rightarrow ^{22}\text{Ne}^* + e^+ + \nu_e \quad (3)$$

$$^{22}\text{Ne}^* \rightarrow ^{22}\text{Ne} + \gamma (1274 \text{ keV}) \quad (4)$$

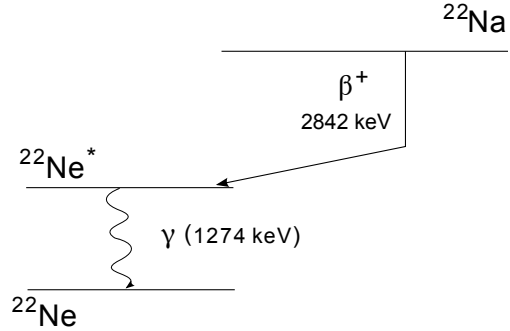


Figura 5: Schema di decadimento del ^{22}Na .

Questa fondamentale proprietà rende possibile l'esecuzione di una misura di coincidenza temporale, tramite l'utilizzo di un secondo rivelatore (B) posizionato in direzione opposta rispetto allo scatteratore. L'impostazione di una finestra di accettazione centrata attorno al valore di 511 keV² permette di selezionare esclusivamente il range energetico di interesse: quando un fotone avente un'energia contenuta in questo intervallo viene rivelato dal detector (B), l'acquisizione del segnale al primo rivelatore è permessa dall'apertura di un gate.

Dal momento che, in prima approssimazione, il sistema di riferimento del centro di massa del positronio coincide con quello del laboratorio, i due fotoni vengono emessi con la stessa energia e in direzioni collineari: in questo modo è possibile associare l'informazione relativa all'energia iniziale anche al fotone diffuso.

Il segnale raccolto all'uscita del primo rivelatore viene in seguito digitalizzato e inviato alla catena di elaborazione successiva.

Uno schema essenziale dell'apparato sperimentale così descritto è rappresentato in figura 6.

¹La probabilità di decadimento in un numero maggiore di fotoni (4,6..) decresce rapidamente all'aumentare del numero stesso e può dunque essere trascurata.

²Per una descrizione pratica relativa all'impostazione della finestra energetica si rimanda al paragrafo 2.2.

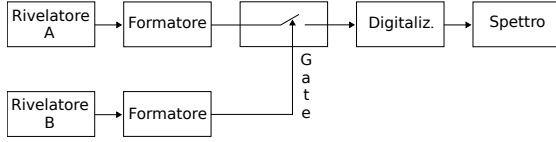


Figura 6: *Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale utilizzato per lo studio dello scattering Compton.*

2.2 Apparato Sperimentale

Il setup sperimentale è costituito da due scintillatori cilindrici TeleDyne NaI(Tl) aventi un diametro rispettivamente di 2" e 3", un amplificatore ORTEC modello 570, un amplificatore TISCA Silena modello 7616, un Multichannel Analyzer (MCA) e un high voltage supply per l'alimentazione dei fototubi collegati agli scintillatori.

La sorgente radioattiva di ^{22}Na ha un'attività nominale, misurata al momento dell'acquisto (2008), pari a 380 kBq.

Uno schema dell'apparato sperimentale è rappresentato in figura 7.

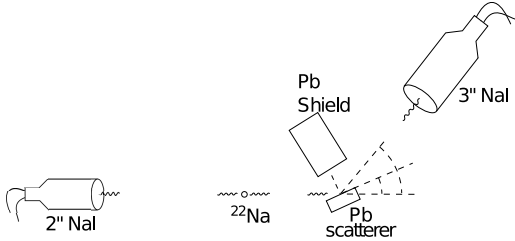


Figura 7: *Schema della disposizione dell'apparato sperimentale. I valori degli angoli tra lo scatteratore e lo scintillatore da 3" sono, rispettivamente, $\frac{\theta}{2}$ e θ .*

Lo scintillatore da 2" viene utilizzato come gate ed è posto a una distanza di 78 cm dalla sorgente. In questo modo è possibile ridurre al minimo l'angolo solido di accettazione del fotone che provoca l'apertura del gate. Così facendo si ha un miglior controllo della geometria e una migliore selezione degli eventi. Ciò tuttavia comporta un abbattimento del rate di coincidenze e quindi del campionamento dei dati: a

parità di statistica sarà quindi necessario aumentare i tempi di misura.

In prima approssimazione i tempi di misura scalano infatti come le distanze dalla sorgente al quadrato:

$$N_1 = N_2 \rightarrow R \frac{d^2}{r_1^2} \Delta t_1 = R \frac{d^2}{r_2^2} \Delta t_2$$

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

dove $N_{1,2}$ sono i conteggi alle distanze $r_{1,2}$, d è il diametro dello scintillatore e R è il rate di emissione del fotone da 511 keV su un angolo solido di 4π steradiani (vedi figura 8).

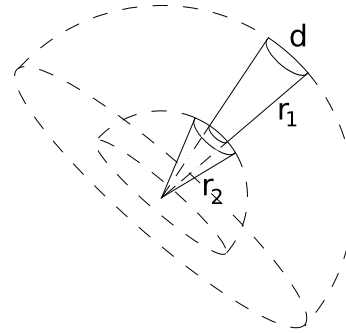


Figura 8: *Riscalamento degli angoli solidi.*

Lo scatteratore consiste in un blocchetto di piombo (materiale che, grazie all'alta densità e all'alto Z, favorisce l'effetto Compton per fotoni dell'energia di alcune centinaia di keV) avente le dimensioni di $7 \times 5 \times 4 \text{ cm}^3$. Esso è posto collinearmente con il primo scintillatore e la sorgente, ad una distanza di 21 cm da quest'ultima.

Il punto di incontro tra la retta che passa per lo scintillatore e la sorgente e la superficie del blocchetto di piombo rappresenta il vertice dell'angolo di deviazione Compton (θ).

Il secondo scintillatore da 3" è posizionato a vari angoli per poter analizzare gli spettri di diffusione.

Ad ogni campionamento lo scatteratore viene posto ad un angolo pari a $\theta/2$. In questo modo si ottimizza la diffusione all'angolo desiderato e si minimizza l'assorbimento interno dei fotoni da parte dello scatteratore stesso.

Siccome solo i fotoni scatterati sono considerati eventi di segnale, è importante fare in modo che la sorgente non irraggi direttamente sullo scintillatore dedicato alla spettroscopia. In caso contrario, infatti, si otterrebbe uno spettro dominato dai fotoni del ^{22}Na che vengono accettati casualmente all'interno della finestra del gate.

Per evitare ciò, di volta in volta, è stato posto un blocco di piombo spesso una decina di centimetri (buon attenuatore gamma) sulla linea sorgente/scintillatore da 3". Quest'elemento è sempre stato collocato alla stessa distanza dello scatteratore, in modo tale da abbattere la doppia diffusione Compton verso lo scintillatore³.

Infine, per ridurre il fondo dovuto alla radioattività naturale (rappresentato essenzialmente da muoni cosmici), è stata costruita attorno allo scintillatore da 3" una schermatura formata da mattonelle di piombo. La presenza di questa comporta la comparsa sullo spettro del picco di fluorescenza X del Pb, ad un'energia pari a 79 keV.

Ai due scintillatori viene poi collegata la catena di formatura ed elaborazione del segnale. Entrambi presentano due stadi successivi identici: uno di moltiplicazione, costituito dai due fotomoltiplicatori, e l'altro di preamplificazione, allo scopo di convertire la carica liberata all'interno dello scintillatore in un segnale di tensione. All'uscita del preamplificatore il segnale generato viene inviato al sistema di amplificazione vero e proprio che, in questo caso, risulta differenziato per i due segnali.

Il ramo uscente dallo scintillatore A, adibito a spettroscopia, viene formato dall'amplificatore ORTEC 570, il quale garantisce che il segnale stesso sia quanto più possibile pulito, ottimizzandone dunque il rapporto segnale/rumore.

Il segnale uscente dal preamplificatore dello scintillatore B, dovendo comandare l'apertura del gate, viene inviato ad un TISCA Silena. In questo caso infatti il segnale deve essere formato in modo veloce e sincronizzato al ra-

mo A, privilegiando quindi l'informazione di tipo temporale rispetto a quella energetica, in quanto quest'ultima è necessaria solo per la selezione dell'evento. A tale scopo sul TISCA sono state impostate una soglia minima (LE) e una finestra energetica (ΔE). In realtà ciò che viene selezionato è un range di ampiezza dell'impulso in Volt; il dato può essere considerato del tutto equivalente ad un'energia in quanto, una volta digitalizzato, il segnale mantiene una proporzionalità tra ampiezza dell'impulso e energia dell'evento.

Per impostare i valori di LE e di ΔE è stato acquisito uno spettro tramite lo scintillatore da 2", ponendo quest'ultimo in coincidenza con se stesso. I livelli sono poi stati regolati in maniera tale che solo il picco da 511 keV sia contenuto all'interno della finestra di accettazione. Ogni volta che un impulso appartiene al range selezionato, il TISCA genera un'onda quadra che, insieme al segnale in uscita dal ramo A, entra nella scheda MCA ORTEC. L'onda quadra consente l'apertura del gate che permette l'elaborazione del segnale proveniente dal rivelatore A all'interno del Multichannel Analyzer. Infine, lo spettro viene visualizzato sul terminale tramite il software di acquisizione *Maestro*.

3 Caratterizzazione della catena elettronica

Per effettuare le misure nelle migliori condizioni possibili, la prima parte dell'esperimento è stata dedicata all'ottimizzazione della catena elettronica.

3.1 Tensione di lavoro

Nel caso ideale in cui l'apparato sperimentale misurasse con infinita precisione l'energia rilasciata da particelle monoenergetiche, lo spettro differenziale assumerebbe la forma matematica di una "delta di Dirac".

In realtà il picco ha una larghezza finita, il cui

³Il processo risulta essere di per sé fortemente abbattuto, in quanto la sezione d'urto per un doppio Compton a grande angolo è molto bassa.

valore è più o meno grande a seconda della peggiore o migliore risoluzione del rivelatore. La risoluzione è definita, nel nostro caso, come il rapporto tra la larghezza a metà altezza del picco (FWHM) e l'energia del picco stesso:

$$R = \frac{\text{FWHM}}{E_{\text{peak}}}$$

Il peggioramento della risoluzione in energia del sistema è imputabile principalmente a tre tipi di cause:

- *Contributo statistico* associato al fatto che la carica Q liberata nel rivelatore in seguito all'interazione del fotone con il fotocatodo è una quantità discreta costituita da portatori di carica elementari (fotoelettroni) il cui numero n è soggetto a variazioni casuali, secondo una distribuzione poissoniana.
- *Rumore elettronico* in serie o parallelo provocato dalle componenti passive e dalla capacità del rivelatore.
- Variazioni nell'*efficienza di raccolta* dei fotoelettroni all'anodo del fototubo.

In linea generale, la larghezza a metà altezza complessiva del picco sarà quindi data dalla somma in quadratura dei diversi contributi alla risoluzione limitata del detector:

$$\text{FWHM}_{\text{tot}}^2 = \text{FWHM}_{\text{st}}^2 + \text{FWHM}_{\text{noise}}^2 + \dots$$

Dato che le fluttuazioni statistiche non possono essere completamente eliminate, ciò che si deve fare è aumentare l'efficienza di raccolta delle cariche e minimizzare il rumore dei componenti elettronici.

L'obiettivo è quello di determinare la tensione di lavoro alla quale la larghezza a metà altezza dei picchi a 511 keV e 1274 keV del ^{22}Na risulta essere minima. Il punto di lavoro scelto deve inoltre far sì che gli inevitabili *drifts* della tensione non causino variazioni significative nella risposta dei rivelatori.

Effettuando misure a differenti voltaggi si può costruire una curva della risoluzione degli scintillatori in funzione della tensione di alimentazione del fototubo.

Per ogni voltaggio si è acquisito uno spettro (live time = 100 s) ricavando, tramite il software di acquisizione, la larghezza a metà altezza e il massimo dei due picchi in unità di canali del MCA. L'errore sul valor medio è ricavato dalla FWHM nell'ipotesi che la distribuzione dei conteggi sia gaussiana, secondo la relazione:

$$\text{FWHM} = 2.35 \sigma$$

L'errore sulla larghezza a metà altezza viene invece calcolato attraverso la propagazione degli errori a partire dalle incertezze sulle σ , secondo la relazione:

$$\sigma_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2(\eta - 1)}} \quad (5)$$

dove η è il numero dei conteggi contenuti nel picco.

I risultati per il rivelatore $\text{NaI}_{3''}$ sono mostrati nel plot di figura 9 per entrambi i picchi del Sodio-22.

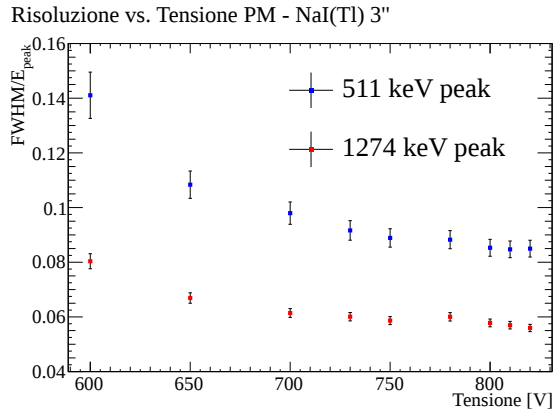


Figura 9: *Risoluzione in funzione della tensione di alimentazione del fototubo, per lo scintillatore da 3''.*

Per il rivelatore da 3'' è stata scelta una tensione di alimentazione pari a 820 V.

Non avendo la possibilità di regolare in maniera indipendente le due uscite dell'high voltage supply che alimentano i due fototubi, si è vincolati a scegliere un'unica tensione di lavoro per entrambi gli scintillatori. In realtà il calcolo della tensione di lavoro ottimale si rende strettamente necessario solo per lo scintillatore utilizzato per l'acquisizione degli spettri di

energia (NaI_3''): agendo lo NaI_2'' solo da gate, infatti, non è indispensabile che esso lavori al voltaggio ideale. Tuttavia, per verificare che il punto di lavoro scelto non si discosti eccessivamente da quello ottimale per lo NaI_2'' , la medesima procedura è stata ripetuta anche per quest'ultimo. I risultati sperimentali sono riportati nel plot di figura 10.

Risoluzione vs. Tensione PM - $\text{NaI}(\text{Tl})$ 2''

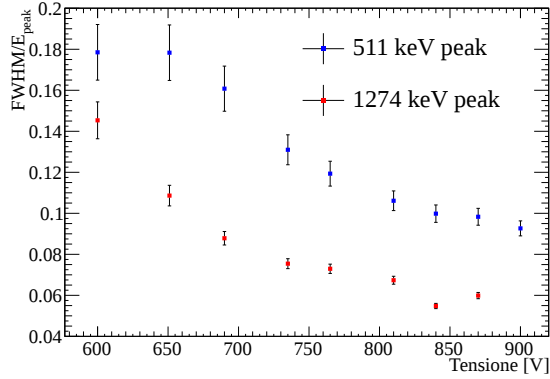


Figura 10: Risoluzione in funzione della tensione di alimentazione del fototubo, per lo scintillatore da 2''.

Per assicurarsi che entrambi i fotomoltiplicatori lavorino ad una tensione sufficiente a garantire la raccolta di tutte le cariche prodotte, sono state inoltre effettuate misure di conteggio al variare dell'alimentazione dei fototubi. Con la medesima configurazione descritta precedentemente si ricava, tramite il programma di acquisizione, il numero di eventi sottesi ai picchi corrispondenti rispettivamente a 511 keV e 1274 keV. Nota la durata dell'acquisizione, se ne calcola il rate in conteggi al secondo (cps). I risultati sono riportati in figura 11 e 12 per entrambi i rivelatori.

Net Rate picco vs. Tensione PM - $\text{NaI}(\text{Tl})$ 2''

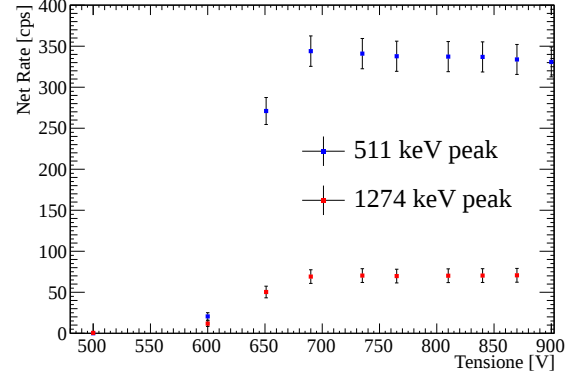


Figura 11: Rate di eventi alle energie di 511 e 1274 keV in funzione della tensione di alimentazione del fototubo, per lo scintillatore da 2''.

Le incertezze sono state stimate nell'ipotesi che i conteggi contenuti in ciascun picco seguano una distribuzione poissoniana, avente valor medio η e deviazione standard $\sqrt{\eta}$.

Il risultato ottenuto per lo scintillatore da 2'' presenta il tipico andamento a sigmoide caratteristico delle efficienze: al crescere della tensione di alimentazione, il rate di eventi aumenta per entrambe le energie fino a stabilizzarsi sul plateau attorno ai 700 V.

Lo scintillatore da 3'' invece lavora in condizioni stabili a tutte le tensioni testate.

Net Rate picco vs. Tensione PM - $\text{NaI}(\text{Tl})$ 3''

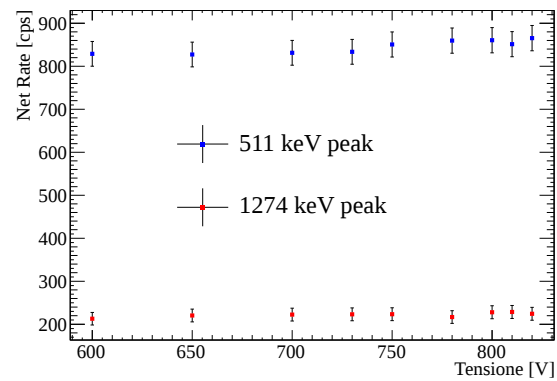


Figura 12: Rate di eventi alle energie di 511 e 1274 keV in funzione della tensione di alimentazione del fototubo, per lo scintillatore da 3''.

3.2 Calibrazione

Il segnale di tensione analogico viene convertito, tramite un Analog to Digital Converter (ADC), in un segnale digitale, il quale viene conteggiato in uno dei canali del MCA e visualizzato in un istogramma. E' necessario correlare la posizione nell'istogramma con il valore di energia rilasciata nel rivelatore, ovvero effettuare una calibrazione energetica.

Ciò può essere fatto utilizzando una sorgente multigamma avente picchi caratteristici dal valore noto e registrando la loro posizione nello spettro in canali. La sorgente multigamma utilizzata contiene i seguenti isotopi:

- ^{241}Am (59.9 keV);
- ^{137}Cs (661.6 keV);
- ^{60}Co (1173.2 keV e 1330 keV);

La procedura di calibrazione dell'apparato sperimentale è stata ripetuta periodicamente nel corso dell'intera attività di laboratorio.

In figura 13 viene riportato lo spettro di conteggi, ottenuto dal MCA, per una campagna di misura con la sorgente multigamma avente la durata di 864 s.

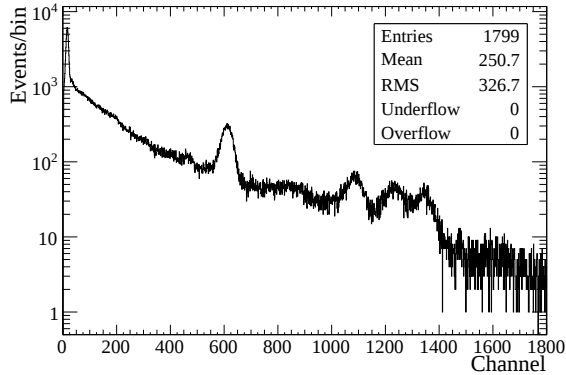


Figura 13: Spettro dei conteggi ottenuto con il rivelatore da 3'' e la sorgente multigamma; ogni bin corrisponde ad un canale del MCA. Il picco ad energia maggiore (attorno al canale 1350) è causato dal ^{40}K del fondo ambientale.

Purtroppo gli spettri grezzi in formato ASCII, esportati dal software di acquisizione *Maestro* e utilizzati per l'analisi dati, riportano semplicemente il numero di conteggi per singolo ca-

nale, indipendentemente dall'informazione di tipo energetico che è stata associata al canale stesso durante la calibrazione. Si pone quindi il problema di come estrarre dai risultati (in canali) che verranno successivamente ottenuti dall'analisi-dati sugli spettri (posizione del picco di scattering e sigma della gaussiana) un corrispondente valore di energia.

La soluzione scelta è stata quella di ricavare in maniera esplicita la curva di calibrazione (polinomiale di secondo grado) i cui parametri sono stati calcolati implicitamente da *Maestro* durante la calibrazione con la sorgente multigamma e di servirsi poi di tale curva per eseguire la conversione desiderata.

In primo luogo, dagli spettri di calibrazione si sono estratti, per un certo numero di canali, i valori di energia ad essi associati. Con tali valori si è poi costruito un grafico energia vs. canale i cui punti sono stati fittati servendosi di una funzione del tipo:

$$f(x) = p_2 \cdot x^2 + p_1 \cdot x + p_0 \quad (6)$$

La conoscenza dei parametri p_0 , p_1 e p_2 , ricavabili dai risultati del fit, permette di ricostruire in maniera univoca la curva di calibrazione. Si tratta sostanzialmente di una procedura del tutto equivalente a quella seguita da *Maestro* nell'elaborazione dei valori (noti) di energia che vengono inseriti manualmente dall'utente durante la calibrazione ordinaria con una sorgente radioattiva [3].

Calibrazione 6 Maggio 2011

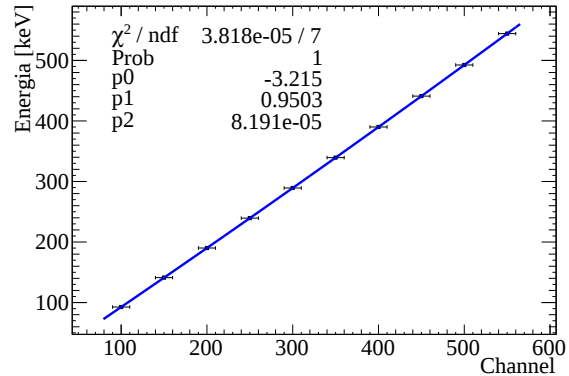


Figura 14: Relazione canale-energia per la calibrazione effettuata il 6 Maggio.

A titolo esemplificativo, in figura 14 sono riportati i punti ottenuti e la polinomiale ricavata dal fit, per una generica calibrazione effettuata durante l'attività sperimentale. Gli errori sull'asse delle ascisse sono stati posti pari a 10 canali.

3.3 Shaping time e guadagno

Lo *shaping time* è il tempo impiegato dagli amplificatori per formare il segnale *long tail* proveniente dai preamplificatori dei due rivelatori. Una corretta scelta dei tempi di formatura è indispensabile ai fini dell'esperimento. Avendo i due rivelatori le stesse caratteristiche (stesso cristallo, stesso fotocatodo, e stesso PM), i due impulsi all'uscita del preamplificatore sono in prima approssimazione contemporanei.

Ai due amplificatori vengono tuttavia assegnati tempi di formatura differenti, a seconda della natura dei due segnali che devono essere formati e del loro scopo finale.

Per il segnale che regola l'apertura del gate si è scelta una formatura a $0.5\mu s$, che, nonostante sia caratterizzata da un rapporto segnale/rumore svantaggioso, privilegia una rapida informazione di tipo temporale. Il TISCA genera infatti un impulso di gate che parte $0.2\mu s$ dopo il raggiungimento del massimo del segnale.

Per il segnale proveniente dal rivelatore $NaI_{3''}$ sono state testate sia la formatura a $2\mu s$ che quella a $1\mu s$. Il Multichannel Analyzer in dotazione necessita che il gate rimanga aperto almeno $0.5\mu s$ dopo il raggiungimento del massimo, per la corretta digitalizzazione del segnale proveniente dal $3''$ [4]. Tenendo in considerazione questa caratteristica della strumentazione, si è quindi scelto di utilizzare una formatura a $1\mu s$.

In figura 15 sono rappresentate le formature dei segnali provenienti da entrambi gli scintillatori, gli istanti di inizio e di fine dell'impulso in uscita dal gate e il tempo minimo (t_{min}) di apertura della finestra necessario per una corretta digitalizzazione del segnale prodotto

dal rivelatore utilizzato per la spettroscopia.

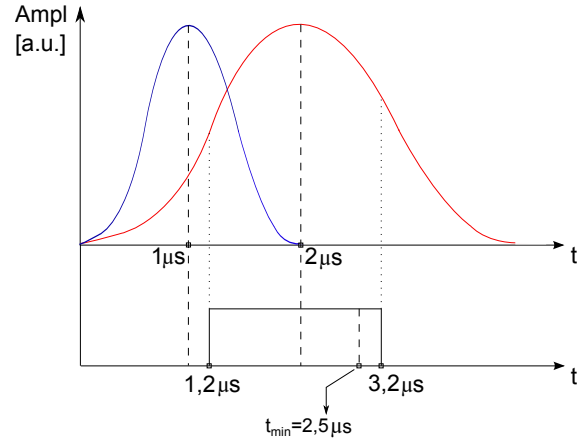


Figura 15: In blu, il segnale in uscita dallo scintillatore da $2''$ utilizzato per regolare l'apertura del gate; in rosso il segnale prodotto dal rivelatore da $3''$. L'onda quadra più in basso rappresenta l'impulso in uscita dal TISCA.

Per il valore di apertura della finestra si è scelto quindi un valore pari a $2\mu s$.

Il guadagno (gain) di entrambi gli amplificatori è stato fissato al valore minimo, in modo che la parte dello spettro di interesse sia contenuta nella regione centrale del MCA.

4 Effetto termico

Durante la fase preliminare dell'esperimento si è inoltre proceduto a caratterizzare la variazione della risposta del rivelatore causata da un'eventuale modifica della temperatura esterna di utilizzo. In questo modo è stato possibile fornire una stima grezza del comportamento dello scintillatore in funzione dell'andamento della temperatura del laboratorio.

A tale scopo, si è scelto di eseguire una serie di acquisizioni sequenziali, tutte della medesima durata e separate da un intervallo di tempo fissato, da effettuarsi durante la pausa accademica invernale (un periodo di circa 15 giorni durante il quale il riscaldamento dell'aula adibita all'attività sperimentale è rimasto spento). Ciò ha permesso di monitorare la variazione della risposta dello scintillatore, mentre la temperatura del laboratorio scende-

va progressivamente, passando da 25°C circa fino ad arrivare all'equilibrio termico con l'ambiente esterno.

Dopo aver alimentato lo scintillatore da 3" alla tensione ottimale (si veda la sezione 3.1) e aver posizionato di fronte ad esso la sorgente radioattiva di ^{22}Na , sono state programmate e lanciate, tramite il software di interfaccia *Mae-stro*, 60 acquisizioni della durata di un'ora ciascuna, intervallate da 5 ore di pausa tra ogni misura e la successiva. A run concluso, si è proceduto all'analisi degli spettri ottenuti, valutando per ciascuno di essi sia la posizione dei due picchi del ^{22}Na che la rispettiva larghezza a metà altezza (FWHM).

4.1 Risultati sperimentali

In figura 16 è riportata, per alcuni dei 60 spettri raccolti, la differenza in canali (Δ_{peaks}) tra la posizione del picco a 1274 keV e quella del picco a 511 keV del ^{22}Na .

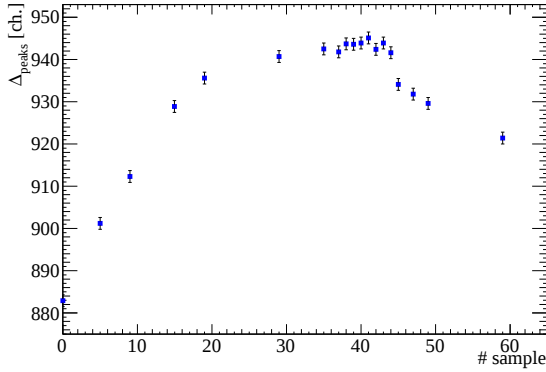


Figura 16: Separazione relativa, in canali, tra la posizione dei due picchi principali del ^{22}Na .

Si osserva chiaramente come, con il diminuire della temperatura, venga introdotto un leggero guadagno nella risposta dello scintillatore, che si manifesta in un aumento progressivo della distanza relativa tra i due picchi.

L'errore statistico sulla misura della posizione di ciascun picco è valutato come errore sul valor medio

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\eta}}$$

dove la σ è ricavata dalla larghezza a metà altezza della gaussiana ed η è il numero di conteggi del picco stesso.

Dal momento che il rate di misura è considerevole (circa 1500 cps per il picco a 511 keV), la durata relativamente elevata di ogni singola acquisizione permette di ottenere una precisione statistica notevole sulla posizione del picco. L'errore sulla stima della posizione assoluta è quindi posto pari ad 1 canale.

Per facilitare una stima quantitativa dello spostamento, i risultati sperimentali sono stati riportati in figura 17 come variazione percentuale tra la posizione occupata dai due picchi del ^{22}Na nello spettro i -esimo e la posizione dei medesimi nel primo spettro della serie di acquisizioni (spettro 0-esimo), preso come riferimento per i successivi.

Dal grafico si può notare come l'effetto sulla posizione si manifesti in uno spostamento verso energie più elevate, che cresce progressivamente seguendo un andamento a sigmoide fino a raggiungere un massimo (circa il 7% del valore iniziale di riferimento) attorno al 37-esimo spettro raccolto (ovvero dopo poco più di 9 giorni dall'inizio della presa dati). Successivamente viene raggiunta una condizione di stazionarietà (spettri 37-43) a cui segue una decrescita graduale, con andamento speculare rispetto a quello di crescita, dovuta alla riaccensione dei riscaldamenti e al conseguente aumento della temperatura del laboratorio.

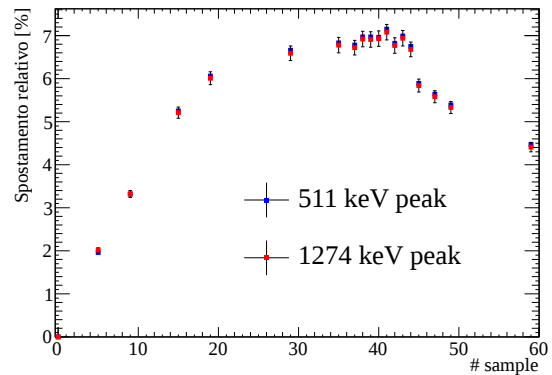


Figura 17: Spostamento relativo della posizione dei due picchi principali rispetto al riferimento del primo spettro acquisito.

Allo stesso modo, è possibile rendersi conto del guadagno introdotto se si osserva l'aumento della FWHM dei due picchi (figura 18). Anche in questo caso i dati raccolti sono espressi come variazione percentuale rispetto alle larghezza a metà altezza dei picchi nello spettro 0-esimo.

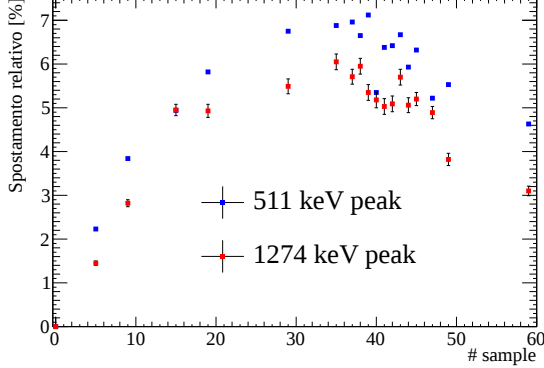


Figura 18: Aumento percentuale della larghezza a metà altezza.

5 Analisi geometrica e dispersioni angolari

Per il calcolo della sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ è importante avere un buon controllo degli angoli. Ovviamente, dal punto di vista sperimentale, le sezioni d'urto sono calcolate su un angolo solido finito $\Delta\Omega$ che corrisponde all'angolo solido di occupazione della base del rivelatore cilindrico. Tuttavia, se la dispersione angolare attorno al valore di riferimento è piccola, questo $\Delta\Omega$ può essere una buona approssimazione del $d\Omega$ infinitesimo.

Per avere la minor dispersione angolare possibile, oltre ad aumentare le distanze tra i rispettivi componenti come già discusso, si è scelto di utilizzare come scatteratore un blocco di piombo più piccolo rispetto a quelli usati per la schermatura ($7 \times 5 \times 4 \text{ cm}^3$).

Le incertezze sulla misura dell'angolo sono calcolate geometricamente come la massima deviazione dall'angolo di scattering ideale indicato dal goniometro (si veda l'appendice A per

il calcolo analitico esplicito). In realtà l'errore è dato dalla convoluzione tra l'effetto dovuto all'occupazione spaziale finita dello scatteratore e dello scintillatore, e la distribuzione della sezione d'urto ai diversi angoli. Questo effetto si renderebbe visibile in un'asimmetria del picco verso energie maggiori, che tuttavia non è stata riscontrata a causa della ridotta risoluzione dello scintillatore utilizzato. Per questo motivo si è scelto di approssimare il picco con una distribuzione normale.

Un approccio alternativo potrebbe essere quello di effettuare una simulazione Montecarlo nella quale si parametrizzano le accettanze dei detector, in modo da avere un controllo maggiore sugli effetti di volume dei vari dispositivi.

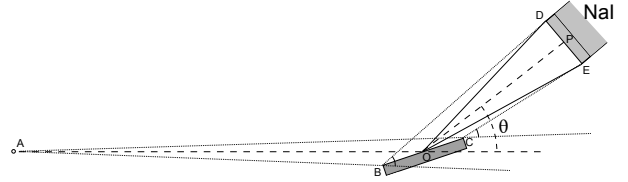


Figura 19: Dispersione angolare (la figura non è in scala).

5.1 Stima dell'angolo solido

L'angolo solido $\Delta\Omega$ è dato, per definizione, dalla formula seguente:

$$\Delta\Omega = \int_{\Delta\theta} \sin\theta d\theta \int_{\Delta\varphi} d\varphi \quad (7)$$

Si presti attenzione al fatto che in questo paragrafo le variabili θ e φ **non** si riferiscono alla fisica dello scattering Compton, ma sono semplicemente le due coordinate sferiche che definiscono l'angolo solido occupato dalla faccia circolare dello scintillatore.

L'angolo polare $\theta \in [0; \delta]$, dove δ è definita da:

$$\delta = \arctan \frac{d}{D} \quad (8)$$

con d raggio della superficie circolare del rivelatore e D distanza tra lo scatteratore e il rivelatore.

L'angolo azimutale $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Si veda la figura 20 per una rappresentazione grafica delle coordinate sferiche e della loro posizione reciproca.

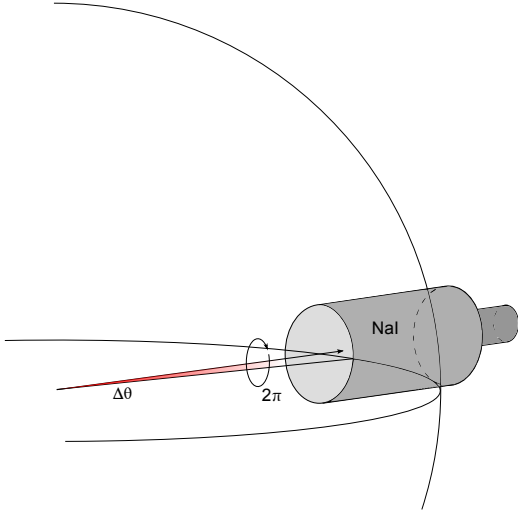


Figura 20: Calcolo dell'angolo solido, in rosso l'ampiezza di θ .

Una volta valutate le ampiezze entro cui variano θ e φ , queste vengono poste come estremi degli integrali per il calcolo dell'angolo solido:

$$\Delta\Omega = \int_0^\delta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(1 - \cos\delta) \quad (9)$$

6 Efficienza degli scintillatori

In linea di principio i detector dovrebbero generare un segnale ogni qual volta una particella interagisce all'interno del loro volume attivo. In questo caso ideale ai rivelatori si attribuisce un'efficienza pari al 100% ($\varepsilon = 1$).

In realtà i rivelatori hanno sempre un'efficienza $\varepsilon < 1$, dovuta sia alla geometria sia al fatto che l'interazione dei fotoni con la materia è un fenomeno statistico.

L'efficienza degli scintillatori può essere definita in due modi differenti: efficienza assoluta (ε_{abs}) ed efficienza intrinseca (ε_{int}).

Nel caso di una sorgente isotropa le due risultano essere legate dalla relazione:

$$\varepsilon_{abs} = \varepsilon_{int} \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \quad (10)$$

L'efficienza assoluta viene definita come:

$$\varepsilon_{abs} = \frac{N \text{ impulsi registrati}}{N \text{ fotoni emessi da S}} \quad (11)$$

dipende dalle proprietà del rivelatore e dalla geometria del setup sperimentale, in particolare dalla distanza tra la sorgente S e lo scintillatore.

L'efficienza intrinseca è invece definita come:

$$\varepsilon_{int} = \frac{N \text{ impulsi registrati}}{N \text{ fotoni incidenti}} \quad (12)$$

dipende dal materiale del detector, dall'energia dei fotoni incidenti, e dallo spessore del rivelatore lungo la direzione di incidenza. Una minima dipendenza dalla distanza tra sorgente e rivelatore permane poichè il cammino medio della radiazione attraverso lo scintillatore varia con essa.

E' più conveniente valutare ε_{int} piuttosto che ε_{abs} , poichè la prima dipende in maniera più blanda dalla geometria del setup.

Dalla definizione 11 e dalla relazione 10 si ha che:

$$N_{riv} = N_{emessi} \cdot \varepsilon_{int} \cdot \frac{\Omega}{4\pi}$$

Il rate degli eventi sottesi al picco da 511 keV è quindi dato da:

$$r_{riv} = 2A(t) \cdot BR \cdot \varepsilon_{int} \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \quad (13)$$

dove $A(t)$ è l'attività della sorgente al tempo attuale di misura, BR è il branching ratio (90.5 %) del decadimento β^+ del ^{22}Na e il fattore due è dovuto alla doppia emissione dei fotoni back-to-back per ogni positrone.

L'angolo solido Ω sotteso al rivelatore è stato calcolato con la formula 9.

Al momento dell'acquisto, nel 2008, l'attività della sorgente (A_0) era pari a 380 kBq; considerando che da allora sono passati circa 1.3 tempi di dimezzamento, si ha che l'attività attuale è:

$$A(t = 1.3 t_{1/2}) = A_0 e^{-1.3 \ln 2} = A_0 \cdot 2^{-1.3}$$

L'efficienza è stata stimata effettuando una serie di acquisizioni nelle quali si è fatta variare la distanza tra sorgente e rivelatore, in modo da ridurre progressivamente l'angolo solido sotteso dalla faccia dello scintillatore [5]. Il rate di conteggi contenuti nel picco da 511 keV è

plottato in funzione dell'angolo solido Ω , moltiplicato per le costanti indicate nell'equazione 13. Un fit lineare permette di ricavare la costante di proporzionalità tra le due grandezze, corrispondente all'efficienza intrinseca ε_{int} del rivelatore.

I risultati sono riportati in figura 21 per lo scintillatore da 2'' e in figura 22 per quello da 3''.

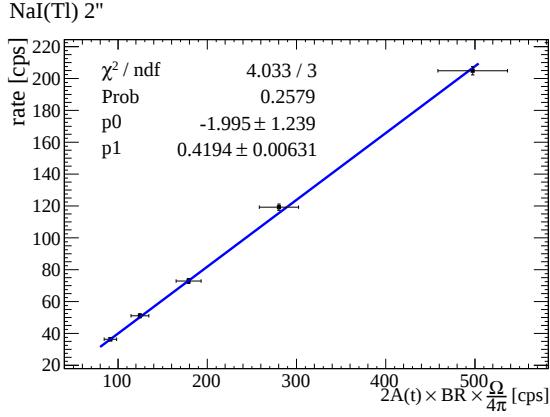


Figura 21: Stima dell'efficienza intrinseca per il rivelatore da 2''.

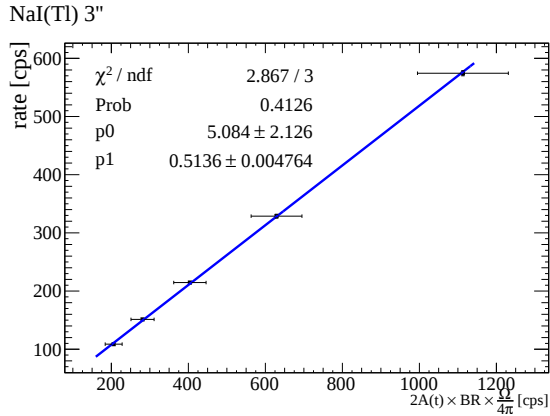


Figura 22: Stima dell'efficienza intrinseca per il rivelatore da 3''.

Le incertezze sul rate sono ricavate partendo da quelle sui conteggi, nell'ipotesi che questi ultimi si distribuiscano secondo una poissoniana con $\sigma = \sqrt{N}$; le incertezze sulla misura dell'angolo solido derivano dalla propagazione degli errori sulla misura delle lunghezze (raggio della faccia circolare del detector e distanza tra

rivelatore e sorgente).

Dal fit lineare si ricava:

$$\varepsilon_{int}^{2''} = (41.9 \pm 0.6)\%$$

$$\varepsilon_{int}^{3''} = (51.4 \pm 0.5)\%$$

Si noti che nella trattazione sopra esposta non viene tenuto conto dei fotoni che hanno perso parte della propria energia a causa dello scattering Compton nella parte attiva dello scintillatore, non venendo così conteggiati nel picco di energia piena. Questo effetto nello Ioduro di Sodio risulta tuttavia trascurabile [1].

7 Studio delle coincidenze casuali

In un sistema di coincidenze è possibile che vengano acquisiti eventi non correlati con l'apertura del gate (coincidenze casuali). Questi eventi possono provenire, indistintamente, dal fondo naturale oppure da annichilazioni avvenute all'interno della sorgente ma nelle quali il fotone rivelato non è fisicamente associato a quello che ha provocato l'apertura del gate. Ciò può essere causato, ad esempio, da annichilazioni contemporanee (A e B) nelle quali uno dei fotoni provenienti da (A) viene rivelato dal $\text{NaI}_{2''}$, mentre dei due provenienti da (B) uno viene perso e l'altro entra nella finestra di accettazione del $\text{NaI}_{3''}$.

Occorre, quindi, creare una disposizione sperimentale che sia sensibile solo alle coincidenze casuali. A questo scopo l'apparato è stato modificato rispetto a quello rappresentato in figura 7 semplicemente spostando il gate in modo che esso si trovi al di fuori della linea ideale che congiunge la sorgente con lo scatteratore. In questo modo le coincidenze vere sono eliminate perché impossibili dal punto di vista geometrico.

L'obiettivo è quello di verificare che la stima del fondo dovuto alle coincidenze casuali sia consistente con i fondi presenti negli spettri Compton acquisiti. Inoltre è utile accertarsi del fatto che nello spettro di coincidenze casuali non sia presente in maniera evidente il

picco di diffusione Compton: in caso contrario significherebbe infatti che gli spettri acquisiti nell'ipotesi di coincidenza vera sarebbero in realtà dominati dalle casuali. Una possibile causa di questo effetto potrebbe essere attribuita, ad esempio, ad una scelta non ottimale dell'apertura temporale della finestra di gate. La probabilità che un evento venga registrato come coincidenza casuale ($\mathcal{P}(ev)$) può essere scomposta nella probabilità di apertura del gate ($\mathcal{P}(g)$) e nella probabilità che un quanto di radiazione faccia scintillare il detector da 3'' ($\mathcal{P}(3'')$). Siccome queste due probabilità sono del tutto indipendenti, si ha:

$$\mathcal{P}(ev) = \mathcal{P}(g) \cdot \mathcal{P}(3'')$$

La probabilità $\mathcal{P}(3'')$, nella regione dello spettro in corrispondenza della quale si collocherebbe un eventuale picco di scattering Compton, possiede una dipendenza di tipo geometrico. I quanti emessi dalla sorgente (fotoni da 511 e 1274 keV) per arrivare al NaI_3'' , devono infatti effettuare uno scattering la cui probabilità $\mathcal{P}(3'')$ dipende dall'angolo in analisi, avendo essa lo stesso andamento della sezione d'urto.

Dato il tempo limitato a disposizione e i tempi relativamente lunghi necessari per il campionamento dei fondi, è stato acquisito uno spettro di coincidenze casuali ad un angolo $\theta = 30^\circ$. Così facendo, la parte non dipendente dalla geometria è valida per tutti gli spettri, mentre la parte di scattering Compton rappresenta un limite superiore sulla frequenza del picco dei vari angoli analizzati per la misura della sezione d'urto differenziale (paragrafo 8.2).

Nonostante ciò, nello spettro acquisito non è stata osservata la presenza di un alcun picco Compton, giustificando così la scelta dell'apertura temporale del gate.

8 Misure Eseguite

Le misure sono state effettuate mantenendo lo schema del setup sperimentale rappresentato in figura 7, dopo avere svolto la parte di ottimizzazione e caratterizzazione della catena

elettronica descritta nelle sezioni precedenti.

Il rivelatore da 3'' è stato posizionato a 10 differenti angoli compresi tra i 20° e 150° , variando i tempi di acquisizione degli spettri a seconda dell'angolo stesso. Per fotoni con $h\nu = 511$ keV, infatti, lo scattering Compton è decisamente più probabile a valori di θ inferiori a 60° , come mostrato nel plot della sezione d'urto in funzione dell'angolo di deflessione di figura 4. Per ottenere una buona statistica i tempi di misura sono dunque stati fatti variare tra un paio di giorni, per angoli inferiori a 60° , fino ad arrivare a circa una settimana per le misure a 120° e 150° .

A titolo esemplificativo, in figura 23 si riporta lo spettro dei conteggi acquisito dal MCA, ottenuto posizionando il rivelatore da 3'' ad un angolo θ pari a 90° e mettendolo in coincidenza con lo scintillatore da 2''.

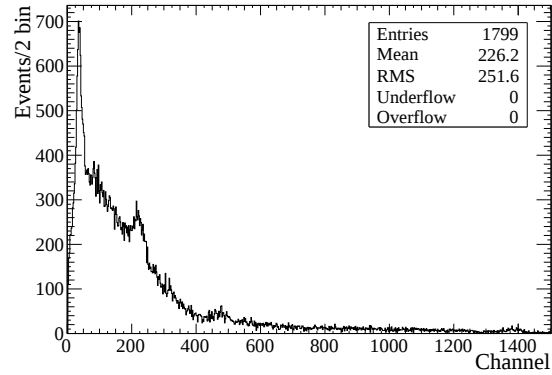


Figura 23: Spettro dei conteggi ottenuto con il rivelatore da 3'' posto a 90° rispetto alla direzione di incidenza iniziale. Ogni bin corrisponde a 2 canali del MCA.

Nello spettro appaiono diverse strutture: il picco di fluorescenza X del piombo a 79 keV dovuto, come già accennato, alla schermatura esterna del rivelatore; il picco di energia piena del fotone scatterato (attorno al canale 250, nell'esempio riportato in figura 23); un picco nella regione corrispondente a 511 keV, dovuto allo scattering Thomson sui nuclei dello scintillatore (vedi sezione 8.3).

Successivamente, la regione attorno al picco di scattering è fittata con una funzione data dalla somma tra un esponenziale decrescente (che

simula l'andamento del fondo) e una gaussiana centrata sul picco stesso. Dai parametri del fit è possibile ricavare il numero di eventi di scattering osservati N^{obs} , il valor medio del picco e la sigma (entrambi in unità di canali del MCA) con i relativi errori.

Queste informazioni sono poi utilizzate per il calcolo delle relazioni energia/angolo e della Klein-Nishina presentati nelle sezioni seguenti.

8.1 Relazione energia/angolo

In questa parte dell'esperimento si vuole verificare la relazione, riportata in equazione 1, che lega l'energia del fotone diffuso $h\nu'$ con l'angolo di scattering θ .

Dalla formula si evince che quando il fotone incidente cede poca energia all'elettrone dell'assorbitore, e quindi l'energia del fotone deflesso è poco inferiore a quella iniziale (511 keV), l'angolo θ di scattering è piccolo. Man mano che l'energia del fotone diffuso diminuisce, θ aumenta.

Il valor medio, in canali, del picco di energia piena del fotone diffuso viene ricavato dal valor medio della gaussiana utilizzata per il fit. Questo dato viene poi convertito in energia, utilizzando la curva di calibrazione calcolata secondo la procedura descritta nella sezione 3.2.

I valori ottenuti sperimentalmente sono riportati in figura 24 in funzione dell'angolo θ a cui si è posizionato il rivelatore da 3".

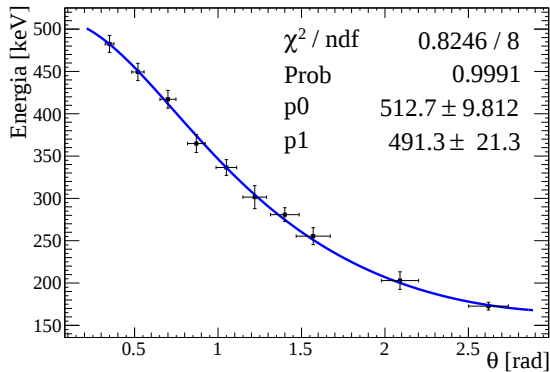


Figura 24: Energia del fotone scatterato in funzione dell'angolo, espresso in radianti.

L'errore sul valore centrale del picco Comp-

ton è stato valutato partendo dalla deviazione standard σ della gaussiana ottenuta dal fit. Ad esso contribuiscono, tra gli altri, tre effetti:

1. la *risoluzione finita* dello scintillatore;
2. l'*errore dei componenti elettronici*, in particolare ADC e MCA;
3. l'*errore dovuto all'angolo θ* : la visuale della sorgente radioattiva sullo scatteratore non è un punto, bensì una regione asimmetrica rispetto al centro dello scatteratore e questo provoca l'arrivo sullo scintillatore di fotoni aventi una diversa energia rispetto a quella ideale di scattering.

Un'altra sorgente di errore, questa volta di natura sistematica, che incide sulla misura dell'energia è data dalla perdita di una corretta *relazione canale-energia*, dovuta alla presenza di drifts dello spettro: questo è il motivo per cui, come già detto nel paragrafo 3.2, è stato necessario ricalibrare l'apparato più volte, durante l'intera durata dell'attività sperimentale. Le incertezze sulla misura dell'angolo sono invece ricavate geometricamente come massime deviazioni dall'angolo ideale di scattering θ . Il calcolo dettagliato, riportato in appendice A, permette di ottenere due angoli limite per lo scattering, il maggiore dei quali è stato quotato come errore sull'asse delle ascisse:

$$\arcsin\left(\frac{\frac{D}{\sin\delta} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \delta\right)}{h}\right) + \frac{\theta}{2} - \epsilon$$

per il primo angolo limite;

$$\arcsin\left(\frac{\frac{D}{\sin\delta} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \delta\right)}{h'}\right) + \frac{\theta}{2} + \epsilon$$

per il secondo angolo limite.

D è la distanza tra scatteratore e rivelatore, δ è definito dalla relazione 8, h e h' sono le distanze limite tra gli estremi dello scatteratore e gli estremi del rivelatore ed ϵ è l'angolo di dispersione.

I punti sperimentali sono successivamente stati

fittati con una funzione del tipo:

$$f(\theta; p_0, p_1) = \frac{p_0}{1 + \frac{p_0}{p_1} \cdot (1 - \cos \theta)}$$

dove p_0 e p_1 sono parametri liberi del fit.

Come si può osservare dai risultati riportati in figura 24, la predizione teorica descrive ottimamente la distribuzione dei punti sperimentali. Dal secondo parametro del fit è possibile ricavare una stima della massa a riposo dell'elettrone che provoca la diffusione dei fotoni:

$$m_e c^2 = 491.3 \pm 21.3 \text{ keV}$$

in ottimo accordo con il valore teorico.

8.2 Verifica della relazione di Klein-Nishina

La distribuzione angolare dei γ è data dalla formula di Klein-Nishina (vedi equazione 2).

Per verificare tale relazione si sono calcolate le sezioni d'urto differenziali, mediante gli spettri energetici acquisiti in precedenza per la relazione energia/angolo (vedi paragrafo 8.1).

La misura della sezione d'urto si riduce ad una misura di rate (r), in quanto queste due grandezze risultano essere legate da costanti quali il flusso di fotoni incidenti (ϕ) e il numero di centri diffusori nello scatteratore ($\mathcal{N}$):

$$\sigma = \frac{r}{\phi \cdot \mathcal{N}}$$

Per questo motivo, l'andamento di $\frac{dr}{d\Omega}$ e $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ in funzione dell'angolo di scattering risulta essere il medesimo.

Questo approccio permette inoltre di svincolarsi dagli errori sistematici di carattere geometrico dai quali è affetto il calcolo del flusso diretto sullo scatteratore.

Inoltre, il fatto che la finestra attiva sottenda un angolo solido finito (seppur piccolo) e non infinitesimo ($d\Omega \rightarrow \Delta\Omega$), fa sì che quello che viene calcolato a livello pratico sia dato dalla variazione di rate per un piccolo incremento di angolo solido ($\frac{\Delta r}{\Delta\Omega}$).

Da ogni spettro viene ricavato il numero di

conteggi sottesi al picco (la procedura per arrivare a questo risultato è stata descritta nella parte introduttiva di questa sezione) ovvero:

$$\Delta N_{meas} = \Delta t \cdot \varepsilon \cdot \int_{\Delta\Omega} \frac{dr}{d\Omega}(\theta) d\Omega$$

dove $\varepsilon = \varepsilon_{int}^{2''} \cdot \varepsilon_{int}^{3''}$ è dato dal prodotto delle efficienze intrinseche dei due rivelatori.

L'integrale precedente è stato poi diviso per il corrispettivo tempo di misura, in modo da ottenere il relativo rate. Si utilizza il rate al posto dei conteggi totali perchè i tempi di acquisizione dei vari spettri non sono stati sempre i medesimi (vedi paragrafo introduttivo alla sezione 8).

Per ottenere il valore della sezione d'urto differenziale, il rate ottenuto è stato diviso a sua volta per l'angolo solido corrispondente.

L'equazione sottostante mostra la relazione tra la previsione teorica (a sinistra del segno di similitudine $\approx$) e ciò che è stato misurato sperimentalmente (a destra):

$$\frac{dr}{d\Omega}(\theta) = \varepsilon \phi \mathcal{N} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \approx \frac{\Delta N_{meas}}{\Delta t \cdot \Delta\Omega} = \frac{\Delta r}{\Delta\Omega} \quad (14)$$

dove l'angolo solido $\Delta\Omega$ è stato calcolato secondo la relazione 9 definita nel paragrafo 5.1. I valori delle sezioni d'urto differenziali così ricavate sono rappresentate dai punti nel plot di figura 25.

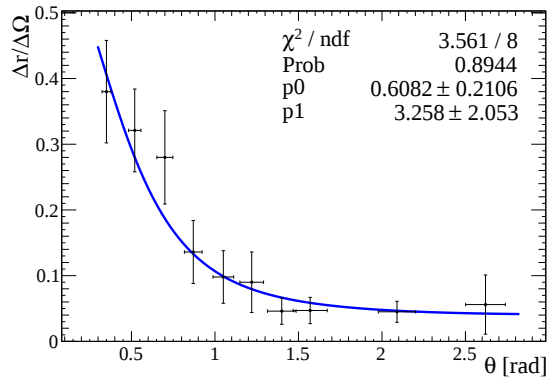


Figura 25: $\frac{\Delta r}{\Delta\Omega}$ in funzione dell'angolo di scattering, espresso in radianti.

L'errore relativo sul rate è stato ricavato a partire dall'errore relativo sull'integrale della gaussiana ottenuta dal fit (numero di eventi di segnale); l'errore sulla stima dell'angolo solido

invece deriva dalla propagazione delle incertezze sulla misura delle distanze. I due errori sono poi sommati in quadratura e il risultato ottenuto è quotato come incertezza sull'asse delle ordinate nel plot di figura 25.

$$\frac{\delta(\Delta r/\Delta\Omega)}{\Delta r/\Delta\Omega} = \sqrt{\left[\frac{\delta r}{r}\right]^2 + \left[\frac{\delta(\Delta\Omega)}{\Delta\Omega}\right]^2}$$

L'errore sull'asse delle ascisse è stato invece calcolato come massima deviazione dall'angolo ideale di scattering θ , come descritto nella sezione 8.1 per la relazione energia/angolo.

I punti sperimentali sono stati poi fittati mediante una funzione avente la stessa dipendenza angolare della Klein-Nishina, lasciando come parametri liberi una costante moltiplicativa ($p0$) e il rapporto $\alpha = h\nu/m_e c^2$ ($p1$).

I risultati del fit sono riportati in figura 25.

8.3 Scattering Thomson

Lo *scattering Thomson* è la diffusione elastica della radiazione elettromagnetica da parte di una particella carica libera. Il processo è ottenibile dallo scattering Compton nel limite in cui l'energia del fotone incidente è molto minore della massa a riposo della particella che ne provoca la diffusione:

$$h\nu \ll Mc^2$$

Come conseguenza, la frequenza ν del fotone rimane la stessa prima e dopo lo scattering.

Definendo q la carica della particella e θ l'angolo di diffusione del fotone rispetto alla direzione di incidenza, la sezione d'urto differenziale è data da [2]:

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 Mc^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (15)$$

Nel processo in esame lo scattering Thomson avviene tra il fotone da 511 keV proveniente dall'annichilazione del positronio e uno degli atomi di piombo dello scatteratore. In questo caso, dunque, il processo diffusivo non coinvolge più solo uno degli elettroni di valenza del

Pb, ma bensì l'atomo intero. Ovviamente, essendo la massa a riposo dell'atomo di piombo superiore di svariati ordini di grandezza rispetto all'energia del fotone ($h\nu/M_{Pb}c^2 \sim 10^{-6}$), quest'ultimo manterrà la stessa energia che aveva inizialmente e ne verrà modificata solo la direzione.

Utilizzando il medesimo apparato sperimentale costruito per lo studio dello scattering Compton è possibile dare una stima del contributo dovuto allo scattering Thomson, verificando in particolare la dipendenza angolare della sezione d'urto differenziale (equazione 15).

La procedura è del tutto equivalente a quella descritta nell'introduzione alla sezione 8 per studio della diffusione Compton: sugli spettri di conteggio, nella regione che la calibrazione ha mostrato corrispondere ad un'energia pari a 511 keV, viene eseguito un fit con una funzione data, anche in questo caso, dalla somma tra un esponenziale decrescente (che modella il fondo atteso) e una gaussiana (per il segnale). I conteggi di segnale e i relativi errori, ricavati dai parametri del fit, sono utilizzati per stimare il rate di eventi in cui il fotone diffuso ha la stessa energia di quello iniziale.

Questo procedimento è applicabile solo per gli spettri la cui acquisizione si è protratta per un periodo di tempo sufficientemente elevato da garantire la statistica necessaria per la convergenza del fit. In alcuni casi prima di eseguire il fit, per evitare le fluttuazioni tra i singoli bin dell'istogramma, si è reso necessario effettuare un *rebinning* dello spettro in canali.

Una volta calcolato il rate di eventi, ne è stato valutato il rapporto con l'unità di angolo solido sotteso dallo scatteratore di piombo ($\Delta r/\Delta\Omega$), ripetendo la procedura al variare dell'angolo di diffusione. In questo modo è possibile svincolarsi sia dal flusso di fotoni emessi dalla sorgente, sia dal numero degli elementi infinitesimi che formano lo scatteratore.

Le incertezze associate ai punti sperimentali derivano dalla propagazione degli errori sulle variabili in gioco. Nonostante gli accorgimenti descritti precedentemente, le fluttuazioni nel numero di eventi di segnale sottesi dalla gaussiana del fit rappresentano il principale contri-

buto all'errore riferito alla misura di $\Delta r/\Delta\Omega$. Le incertezze sulle misure degli angoli provengono da considerazioni di tipo geometrico basate sulla dimensione finita dello scatteratore e della superficie degli scintillatori (vedi appendice A e quanto detto nella sezione 8.1).

Le misure sperimentali sono poi fittate con una funzione avente l'andamento in funzione dell'angolo θ predetto dall'equazione 15, lasciando come parametro libero una costante moltiplicativa $p0$.

I risultati ottenuti sono mostrati in figura 26.

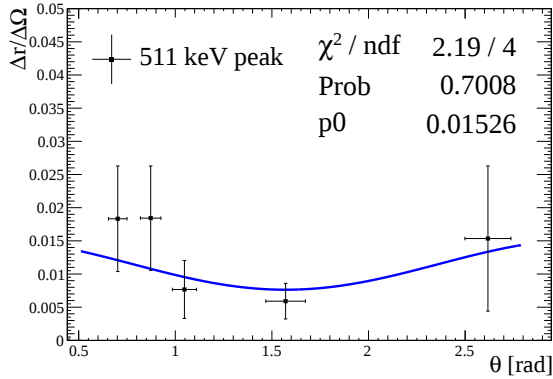


Figura 26: *Scattering Thomson: risultati delle misure effettuate agli angoli indicati in ascissa (in radianti) e risultati del fit.*

Misura della parità del positronio

9 Introduzione

Il positrone generato nel decadimento della sorgente di ^{22}Na , dopo che ha perso praticamente tutta la sua energia cinetica, crea uno stato legato (definito positronio) con un elettrone del materiale. L'annichilazione avviene sempre su uno stato a $L = 0$. Lo stato fondamentale del positronio ha due possibili configurazioni a seconda dell'orientamento relativo degli spin dell'elettrone e del positrone.

Lo stato di singoletto 1S_0 , detto para-positronio, è caratterizzato da spin antiparal-

leli e, per la conservazione del momento angolare, può decadere solo in un numero pari di fotoni. Si ricorda però che la probabilità di decadimento decresce al crescere del numero di fotoni presenti nello stato finale: la probabilità maggiore si ha quindi per il decadimento in 2γ da 511 keV. Il tempo caratteristico per questo processo è $\tau = 1.244 \cdot 10^{-10}$ s.

L'orto-positronio è invece uno stato di tripletto (3S_1), con spin paralleli, che decade in un numero dispari di fotoni, prevalentemente tre. La teoria dei fermioni attribuisce a particella e antiparticella parità intrinseche opposte. Siccome quest'ultima è una quantità moltiplicativa e il momento angolare tra e^+ ed e^- è zero, si ottiene che il positronio ha parità $P = -1$.

L'obiettivo di questa parte dell'esperimento è verificare la predizione teorica per la parità intrinseca di questo atomo esotico nello stato 1S_0 , attraverso il decadimento in due fotoni⁴. L'unico modo per studiare la parità di questo stato è analizzare le polarizzazioni dei due fotoni emessi. Siccome questo decadimento è un processo elettromagnetico, per la conservazione della parità si ha che la parità dello stato finale coincide con quella dello stato iniziale [6].

Le funzioni d'onda più semplici che si possono utilizzare per descrivere uno stato a due fotoni sono date dalle seguenti [7]:

$$\psi_1(2\gamma) = A(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2) \propto \cos \alpha$$

$$\psi_2(2\gamma) = B(\vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2) \cdot \vec{k} \propto \sin \alpha$$

dove α è l'angolo tra i piani di polarizzazione. Si precisa che con il termine "piano di polarizzazione" si intende il piano su cui giacciono il vettore momento $\vec{k}$ e il vettore di polarizzazione $\vec{\epsilon}$.

Entrambe le funzioni d'onda sono totalmente simmetriche per scambio di particelle, condizione necessaria per un sistema di bosoni.

A seconda della parità delle due funzioni d'onda, esse saranno massimizzate a diversi valori di α . In particolare ψ_1 , che è pari sotto inversione di coordinate spaziali (parità), ha un

⁴La modalità di selezione di questo canale di decadimento è indicata al paragrafo 11.

massimo in $\alpha = 0$ mentre ψ_2 , dispari, ha un massimo quando $\alpha = \pi/2$.

La sezione d'urto Compton per fotoni polarizzati dipende dall'angolo φ tra il piano di scattering e il vettore di polarizzazione $\vec{\epsilon}$ [2]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_0^2 \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \left(\frac{h\nu'}{h\nu} + \frac{h\nu}{h\nu'} - 2\sin^2\theta \cos^2\varphi \right) \quad (16)$$

le altre grandezze sono le stesse delle equazioni 1 e 2.

Da quest'equazione si può notare come lo scattering a $\theta=90^\circ$ con $\varphi=90^\circ$ è 5 volte più frequente di quello a $\varphi=0^\circ$

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\varphi=90}}{\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\varphi=0}} = \frac{\frac{5r_0^2}{16}}{\frac{r_0^2}{16}} = 5 \quad (17)$$

questo implica che il vettore di polarizzazione $\vec{\epsilon}$ sia preferenzialmente ortogonale al piano di scattering.

La dipendenza dell'equazione 16 da φ lega il rate di scattering alla polarizzazione dei fotoni e quindi alla parità iniziale del positronio. Risulta necessario, quindi, trovare una disposizione sperimentale che sia sensibile a questa grandezza fisica.

10 Tecnica sperimentale

In questo paragrafo l'angolo di scattering θ è considerato essere fisso a 90° . Considerando la figura 31 riportata alla fine del report si può vedere come un confronto tra i rate delle due disposizioni dia informazioni sulle polarizzazioni dei fotoni e quindi sulla parità del positronio. Infatti, i rispettivi rate di rivelazione avranno lo stesso rapporto indicato dalla relazione 17. Statisticamente si avrà dunque che ogni 6 fotoni rivelati 5 avranno $\varphi = 90^\circ$ (polarizzazione ortogonale al piano di scattering) mentre 1 avrà $\varphi = 0^\circ$. In altre parole, 5/6 saranno polarizzati ortogonali $\langle \perp \rangle$ e 1/6 paralleli $\langle \parallel \rangle$ sempre rispetto al piano. Questo è valido per ognuno dei due scattering in figura quindi, essendo le probabilità di diffusione indipendenti, i rapporti si moltiplicano tra loro. I casi possibili sono due:

- P = -1: la funzione d'onda è descritta da ψ_2 ed ha un massimo in $\alpha = 90^\circ$.

Dalla figura 31a): la probabilità che entrambi i fotoni provenienti dal decadimento siano $\langle \parallel \rangle$ è pari a 1/36 (in rosso), mentre la probabilità che entrambi siano $\langle \perp \rangle$ è pari a 25/36 (in blu). Di conseguenza, la probabilità che i due fotoni abbiano la stessa polarizzazione rispetto al proprio piano di scattering corrisponde a 26/36.

Dalla figura 31b): la probabilità che un fotone sia polarizzato $\langle \parallel \rangle$ e uno $\langle \perp \rangle$ è pari a 5/36. Siccome rosso e blu sono simmetrici, la probabilità complessiva che i due fotoni abbiano polarizzazione opposta risulta essere pari a 10/36.

Facendo un rapporto tra i rate misurati nelle due condizioni si ottiene un valore pari a 26/10.

- P = +1: la funzione d'onda è descritta da ψ_1 ed ha un massimo in $\alpha = 0^\circ$.

In questo caso le probabilità sono invertite, perché con le stesse disposizioni geometriche di a) e b) l'angolo tra i fotoni dello stesso colore è zero. La c) è del tutto analoga a b) e la d) diventa come la a). Quindi, calcolando il rapporto tra i rate nelle due disposizioni, si ottiene un valore pari a 10/26.

A seconda che il rapporto misurato sperimentalmente sia 2.6 o $10/26 \sim 0.38$ si può concludere che il sistema $\gamma\gamma$ (e quindi il positronio) ha parità intrinseca, rispettivamente, -1 o +1.

11 Set-up sperimentale

Anche in questo caso le misure sono state effettuate con i due scintillatori NaI, di due e tre pollici rispettivamente, e la sorgente di ^{22}Na utilizzati in precedenza.

Le misure da effettuare richiedono due configurazioni differenti.

Nella prima, siccome è necessario avere una disposizione che consenta la rivelazione contem-

poranea di fotoni scatterati su due piani tra di loro ortogonali, il rivelatore a tre pollici è stato sollevato dal piano sul quale giace il NaI_2'' , in modo tale che la finestra di ingresso di questo risultasse parallela al piano stesso (si veda la figura 31). Nella seconda, invece, dovendo rivelare fotoni scatterati in uno stesso piano, i due rivelatori sono posti uno in fronte all'altro. La configurazione usuale, basata sulla coincidenza tra rivelatore per spettrometria e gate, permette di selezionare la cinematica dell'evento (ovvero solo i decadimenti del positronio in due fotoni back-to-back).

I due scatteratori sono stati posizionati invece ad un angolo di 45 gradi, in modo da minimizzare l'autoassorbimento all'interno degli stessi. Si è scelto un angolo di scattering di 90° per praticità nella disposizione dei vari elementi. In figura 31 si può osservare lo schema finale della configurazione utilizzata.

Per evitare che vengano registrati eventi di non interesse o che possano svilupparsi false coincidenze, la sorgente è stata schermata lungo ogni lato con delle mattonelle piombo, lasciando libera solo la direzione che unisce la sorgente stessa con i due scatteratori. In questo modo ci si è assicurati che i fotoni emessi dal ^{22}Na non comunicassero direttamente con i due rivelatori e, in particolare, con lo scintillatore da $2''$ utilizzato come gate.

La tensione di lavoro adottata è ancora quella ricavata dalla calibrazione durante la prima parte dell'esperimento, ovvero 820 V per entrambi i fototubi.

Prima di iniziare la presa dati è risultato necessario effettuare una nuova calibrazione energetica dei rivelatori, in modo da essere in grado di correlare il giusto valore energetico ad ogni picco presente nello spettro acquisito tramite software.

I fotoni che regolano l'apertura del gate, prima di giungere allo scintillatore da due pollici, scatterano ad un angolo di 90° e dunque arrivano al detector con un'energia pari a 255 keV circa. Per questo motivo è stato necessario reimpostare i livelli ΔE e LE del TISCA, in modo da centrare la finestra energetica attorno a questo nuovo valore. Per la formatura

dei segnali sono stati utilizzati i due tempi di shaping time già adottati nel corso della prima parte (si veda il paragrafo 3.3).

Dato il basso rate degli eventi e la presenza di un fondo non trascurabile nella zona energetica di interesse, si è scelto di ridurre al minimo valore possibile la finestra temporale del gate, ponendola a $1.3 \mu\text{s}$. L'obiettivo è quello di correlare meglio l'apertura del gate con l'acquisizione del segnale, riducendo la digitalizzazione di impulsi spuri.

12 Misure eseguite

Dopo aver modificato l'apparato sperimentale nella maniera descritta al paragrafo 11, si è proceduto ad una nuova campagna di presa dati. Dal momento che il rate atteso è molto basso, i tempi di acquisizione sono stati prolungati fino ad una settimana.

Il problema principale che si è riscontrato in questa fase consiste nella presenza di un elevato fondo, in particolare nel range energetico di interesse. Ciò ha impedito di fatto l'osservazione di un segnale chiaramente visibile.

Per approfondire lo studio e comprendere le possibili cause di questo problema, si è pensato di valutare il Minimum Detectable Amount (MDA) della configurazione utilizzata e di confrontarla con il rate atteso degli eventi di doppio scattering.

13 Minimum Detectable Amount e stima degli eventi di fondo attesi

Come spiegato precedentemente, la misura della parità del positronio si riduce essenzialmente ad un esperimento di conteggio, effettuato in due diverse configurazioni sperimentali. Nel seguito si definiscono eventi di segnale (e vengono indicati con N_s) gli eventi in cui i due fotoni da 511 keV emessi dal positronio vengono diffusi ad un angolo $\theta = 90^\circ$ rispetto allo scatteratore e a $\varphi = 90^\circ$. Il loro numero è dato

da:

$$N_s = N_t - N_b$$

dove N_t è il numero di eventi totali registrati all'interno della zona di interesse del MCA e N_b è l'insieme di tutti gli eventi di fondo.

I valori di N_i ($i = s, b, t$) si distribuiscono secondo una poissoniana che, nel limite in cui $N_i \gtrsim 30$, approssima una gaussiana centrata nel valore vero $\bar{N}_i$ e con $\sigma_{N_i} = \sqrt{N_i}$. Inoltre:

$$\sigma_{N_s}^2 = \sigma_{N_t}^2 + \sigma_{N_b}^2 \quad (18)$$

Se $\bar{N}_s = 0$, i conteggi attribuiti al segnale sono da considerarsi “falsi-positivi”: il livello di soglia β che deve essere imposto se si desidera che la probabilità di questi conteggi sia minore del 5% è definito da:

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(N_s; \bar{N}_s = 0, \sigma_{N_s}^2) > 0.95$$

dove $f(N_s; \bar{N}_s, \sigma_{N_s}^2)$ è la p.d.f. gaussiana secondo la quale si distribuiscono gli eventi osservati. Dunque, tenendo conto della relazione 18, si ha:

$$\beta \simeq 1.6 \sigma_{N_s} = 1.6 \sqrt{2} \sigma_{N_b} = 1.6 \sqrt{2N_b} \quad (19)$$

Se $\bar{N}_s > 0$, il numero minimo di eventi di segnale tale per cui la probabilità di perdere eventi perchè sotto la soglia scelta (“falsi-negativi”) sia minore del 5% è definito da:

$$\int_{\beta}^{\infty} f(N_s; \bar{N}_s^{min}, \sigma_{N_s}^2) > 0.95$$

ovvero:

$$\bar{N}_s^{min} = \beta + 1.6 \sigma_{N_s} \quad (20)$$

Questa quantità viene denominata Minimum Detectable Amount (MDA) e rappresenta, dato un certo confidence level, il numero minimo di eventi di segnale che possono essere osservati garantendo un rate di falsi-negativi minore del livello scelto. Risolvendo esplicitamente la relazione 20 nell'ipotesi in cui $\bar{N}_b \gg \bar{N}_s^{min}$ si ottiene [1]:

$$\text{MDA} = \bar{N}_s^{min} \simeq 4.6 \sigma_{N_b} + 2.7 =$$

⁵Counts per hour.

$$= 4.6 \sqrt{N_b} + 2.7 \quad (21)$$

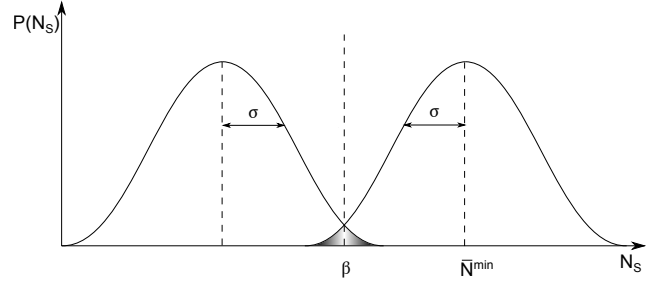


Figura 27: Distribuzione di probabilità per gli eventi di segnale nell'ipotesi $\bar{N}_s = 0$ e $\bar{N}_s > 0$ e livello di soglia β .

Una misura di fondo eseguita senza sorgente ha permesso di stimare un rate di eventi nella regione energetica di interesse pari a $r_b = N_b/\Delta t = 13 \text{ cph}$ ⁵.

Sperimentalmente si è tuttavia osservato che la presenza della sorgente introduce un'ulteriore fondo a bassa energia all'interno della regione nella quale ci si attende di trovare il segnale. Si è ipotizzato che questo fondo possa essere dovuto a fotoni provenienti dalla sorgente che vengono diffusi dallo scatteratore ad energie $\lesssim 300 \text{ keV}$, entrando nella finestra di accettazione geometrica del rivelatore da $3''$ mentre il gate è aperto.

Per verificare questa tesi si è confrontato lo spettro acquisito nella configurazione per la misura della parità del positronio con quello ottenuto nell'ipotesi di sole coincidenze casuali (sezione 7).

I due, normalizzati allo stesso tempo, sono riportati in figura 28.

Come si può vedere, gli andamenti dei due spettri nella regione energetica di interesse sono compatibili tra di loro. Questa osservazione supporta la tesi secondo la quale il fondo aggiuntivo a bassa energia osservato sperimentalmente sia dovuto a fotoni diffusi che vengono rivelati in maniera casuale.

La costruzione dell'apparato sperimentale utilizzato per questa seconda parte non permette una riduzione agevole dagli angoli solidi sottesi dai due scintillatori e questo effetto non è

dunque eliminabile in maniera immediata.

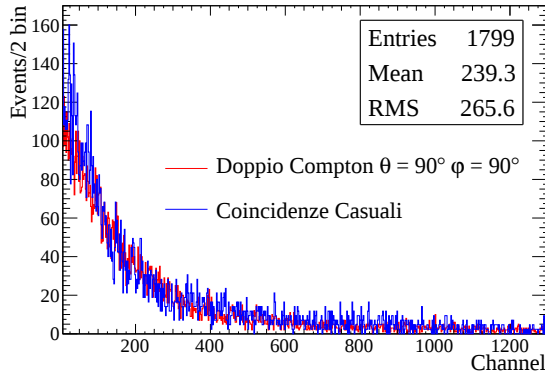


Figura 28: Spettro di conteggi per il doppio scattering Compton (rosso) e le coincidenze casuali (blu); ogni bin corrisponde a due canali del MCA.

Questo ulteriore contributo viene stimato sullo spettro ottenuto sottraendo lo spettro in conteggi dato dalla misura con la sorgente e lo spettro contenente il solo fondo, entrambi normalizzati agli stessi tempi: si esegue un sideband fit all'esterno della regione di interesse e si estrapola il risultato all'interno di quest'ultima. Aggiungendo questo contributo, il rate r_b di eventi di fondo all'interno della regione di segnale risulta essere pari a circa 28 cph.

Moltiplicando per il tempo di acquisizione dello spettro si ottiene un numero di eventi di fondo nella regione in cui ci si aspetta il segnale pari a 810 ± 28 cnts. Inserendo questo valore nella relazione 21 si ottiene un Minimum Detectable Amount pari a 133 cnts.

14 Rate atteso

Per stimare il rate atteso è stata considerata la relazione:

$$\frac{dr}{d\Omega} = \phi \cdot \mathcal{N} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

che lega la sezione d'urto di un evento al rate, tramite il flusso di fotoni incidenti per unità di superficie e il numero di centri diffusori nel materiale.

⁶ Anche in questo caso, come nelle sezioni 5 e 8, il rate, le sezioni d'urto e quindi anche le probabilità, non sono differenziali ma rapportate all'angolo solido (finito) sotteso. In seguito verranno considerate solo queste quantità anche se, per semplicità di notazione, saranno ugualmente indicate con r , σ e $\mathcal{P}$ rispettivamente.

Il processo fisico che viene studiato in questa parte dell'esperimento implica che avvengano due eventi di scattering contemporanei, come spiegato al paragrafo 10. Siccome la diffusione di un fotone è totalmente indipendente da quella del secondo, le probabilità che i due eventi accadano simultaneamente è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi. Ciò che si è fatto è stato calcolare le due probabilità dei singoli processi di scattering, moltiplicandole tra loro e riscalandole per il rate di fotoni che incidono effettivamente sugli scatteratori⁶ ($\mathcal{R}_{\gamma 1}, \mathcal{R}_{\gamma 2}$).

$$r(\theta, \varphi_1, \varphi_2) =$$

$$= (\mathcal{R}_{\gamma 1} + \mathcal{R}_{\gamma 2}) \cdot \mathcal{P}(\theta, \varphi_1) \cdot \mathcal{P}(\theta, \varphi_2) \quad (22)$$

Come già descritto, θ è rimasto fisso a 90° per entrambe le configurazioni mentre per φ vale $\varphi_1 = 90^\circ$ e $\varphi_2 = 90^\circ$ nel primo caso e $\varphi_1 = 90^\circ$ e $\varphi_2 = 0^\circ$ nel secondo.

La teoria prevede che la disposizione che dà il numero di eventi di scattering maggiore sia la prima. Per questo motivo per lo studio del rate atteso si è presa in considerazione solo quest'ultima: se il rate teorico di osservazione da essa predetto è al di sotto del MDA, allora sarà sicuramente al di sotto anche il rate della seconda disposizione.

Per calcolare la probabilità $\mathcal{P}(\theta, \varphi_i)$ bisogna considerare la sezione d'urto, ovvero l'area efficace entro la quale avviene il processo di scattering. Quest'area efficace è associata ad ogni centro scatteratore, ovvero ad ogni elettrone della shell più esterna dell'atomo di Piombo che si affaccia sulla superficie rivolta verso la sorgente. Moltiplicando la sezione d'urto per $\mathcal{N}$ e rapportandola all'intera superficie irraggiata dal ^{22}Na , si ottiene un numero adimensionale. Questo numero rappresenta la probabilità che un fotone intercetti la *superficie di scattering* totale, ovvero che vada incontro ad uno scattering Compton all'angolo in corrispondenza del quale si calcola la sezione

d'urto:

$$\mathcal{P}(\theta, \varphi) = \mathcal{N} \cdot \frac{\sigma(\theta, \varphi)}{A}$$

Il numero di centri scatteratori ($\mathcal{N}$) è calcolato come la frazione di e^- esterni compresi in una lunghezza di attenuazione del piombo per fotoni aventi un'energia di 511 keV ($\lambda = 0.5$ cm). In una lunghezza di attenuazione, però, si ha un abbattimento del numero iniziale di fotoni incidenti del 70%. Ciò che si è fatto è stato pesare ogni spessore dx per il tasso di particelle che non hanno interagito entro λ :

$$x_{eff} = \int_0^\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \lambda \cdot (1 - e^{-1})$$

il che porta a definire un numero di nuclei “efficaci” presenti nel blocchetto di piombo.

Moltiplicando questo numero per il numero di elettroni esterni nel Pb (quattro), otteniamo come risultato il numero di centri scatteratori:

$$\mathcal{N}_{eff} = 4 \cdot \frac{M}{m_{mol}} \cdot N_{Av} \cdot \frac{x_{eff}}{T}$$

dove con M si è indicata la massa dello scatteratore, con m_{mol} la massa molare del Pb, con N_{Av} è il numero di Avogadro e con T lo spessore del blocchetto di piombo.

La sezione d'urto è calcolata tramite la Klein-Nishina polarizzata (si veda l'equazione 16).

La stima dei fotoni incidenti sul blocchetto ($\mathcal{R}_{\gamma i}$) è invece data dall'attività attuale della sorgente moltiplicata per il rapporto tra l'angolo solido sotteso dal blocchetto stesso e l'angolo solido totale (4π).

L'attività della sorgente è stata stimata nel paragrafo 6, tenendo conto del tempo di dimezzamento del ^{22}Na e del tempo trascorso dal momento dell'acquisto.

Infine, l'angolo solido viene calcolato con l'equazione 7, cambiandone però gli estremi di integrazione⁷. L'angolo zero su θ è posto nella direzione verticale, quindi la disposizione sul piano è a $\theta = 90^\circ$, mentre φ gira sul piano.

Dalla figura 29 si possono trovare i range entro cui variano i due angoli:

- della prima delle due figure sono noti h , d e l'angolo tra il blocchetto e il raggio (135°). Applicando al triangolo il teorema del coseno e successivamente quello del seno si trova che:

$$\varphi \in [0; \delta']$$

dove:

$$\delta' = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{b}{\sqrt{d^2 + b^2 + \sqrt{2}d \cdot b}} \right)$$

- nella seconda figura θ varia nell'intervallo

$$\left[\frac{\pi}{2} - \epsilon'; \frac{\pi}{2} \right]$$

con:

$$\epsilon' = \arctan \left(\frac{h}{d} \right)$$

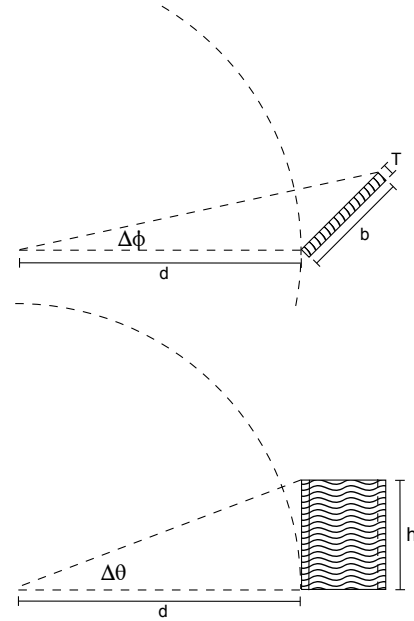


Figura 29: Disposizione della sorgente (centro della sfera) e scatteratore (rettangolo ondulato). Sopra: vista dall'alto (lo scatteratore è inclinato di 45°); sotto: vista frontale.

Questi valori rappresentano gli estremi di integrazione per il calcolo dell'angolo solido secondo la relazione 7. Si ottiene, quindi:

$$\Delta\Omega = \delta' \cdot \sin \epsilon'$$

⁷Da qui fino alla fine del paragrafo θ e φ non sono più collegati all'effetto Compton, ma sono semplicemente le due variabili angolari della geometria sferica.

I dati calcolati sono stati inseriti nell'equazione 22, ponendo $\mathcal{R}_{\gamma 1}$ uguale a $\mathcal{R}_{\gamma 2}$ in virtù delle identiche disposizioni geometriche degli scattori rispetto alla sorgente.

Lo stesso è stato fatto per $\mathcal{P}(\theta, \varphi_1)$ e $\mathcal{P}(\theta, \varphi_2)$ perché, come già citato, gli angoli di scattering e le caratteristiche del blocchetto sono le stesse.

Una volta eseguite tutte le semplificazioni numeriche e accorpato il rapporto $\frac{M}{A \cdot T}$ nella densità ρ , si ottiene una stima del rate teorico di eventi attesi:

$$r_{th} = \varepsilon \frac{25 \cdot 2^{-1,3}}{64\pi} \left(\frac{\rho \cdot N_{av}}{m_{mol}} \cdot r_0^2 \cdot x_{eff} \right)^2 A_0 \delta' \sin \epsilon'$$

dove ε è il prodotto delle efficienze dei rivelatori.

Inserendo i valori numerici, si ha che $r_{th} = \varepsilon \cdot 3.4 \sim 3.4/4$ cph, corrispondenti a 25 ± 5 eventi nella regione dello spettro di interesse.

Come si può facilmente notare, questo valore è ben al di sotto del Minimum Detectable Amount calcolato nella sezione 13.

Si presti attenzione al fatto che il rate teorico r_{th} così calcolato è da considerarsi come una sovrastima del valore vero, in quanto non è stato tenuto conto, ad esempio, dell'autoassorbimento all'interno della sorgente, essendo quest'ultimo un effetto sistematico del quale è difficile dare una trattazione analitica. Tuttavia, dato che si è interessati a dare una stima di massima di questi eventi in modo da poterli confrontare con il MDA, l'approssimazione fatta è lecita.

15 Conclusioni

Lo scopo dell'esperienza è stato quello di fare uno studio sperimentale dell'effetto Compton, per verificare inizialmente la relazione energia/angolo (equazione 1) e la formula di Klein-Nishina (equazione 2) e, successivamente, dedurre la parità del positronio partendo da misure indirette.

Dopo aver riflettuto a priori sulle principali problematiche dell'esperimento, si è effettuata un'ottimizzazione del setup sperimentale sia

dal punto di vista geometrico che dal punto di vista dell'elaborazione elettronica del segnale. Una parte del nostro studio è stata dedicata anche alle coincidenze casuali, permettendo così di testare la bontà del sistema di coincidenze scelto.

La relazione tra l'angolo di scattering e l'energia del fotone diffuso è stata ricostruita partendo dai dati raccolti. Dal fit è stata ricavata una stima della massa a riposo dell'elettrone, ottenendo un risultato pari a:

$$m_e c^2 = 491.3 \pm 21.3 \text{ keV}$$

in accordo con il valore teorico.

Dai dati acquisiti è stato verificato anche l'andamento della formula di Klein-Nishina. Non avendo ricostruito la sezione d'urto, ma il rate differenziale, è stato estratto come dato significativo il parametro $\alpha = h\nu/m_e c^2$, ottenendo:

$$\alpha = 3.2 \pm 2.1$$

Ciò conferma che i dati sperimentali hanno un andamento compatibile con quello predetto dalla sezione d'urto differenziale teorica.

Si è anche riusciti ad apprezzare la presenza dello scattering Thomson, del quale è stato verificato l'andamento.

Durante l'esecuzione delle misure sono stati riscontrati due principali effetti.

Il primo, di natura sistematica, è dovuto alla dipendenza della risposta del rivelatore dalla temperatura. In particolare si è osservata l'introduzione di un leggero guadagno con la diminuzione della stessa. Questa sistematica è tuttavia trascurabile poichè non porta alcuna conseguenza sui risultati estratti dal fit.

L'altro problema è dato dalla presenza di un fondo composto sia dalla radioattività naturale sia dal rumore elettronico. Quest'effetto ha influito pesantemente sulla seconda parte dell'esperimento, impedendo la discriminazione di un segnale visibile. A conferma di ciò si è calcolato il Minimum Detectable Amount, pari a 133 cnts, confrontandolo poi con il rate di eventi atteso, pari a 25 ± 5 cnts.

A Deduzione analitica della dispersione angolare

La dispersione angolare dei fotoni che vengono diffusi dal blocchetto di piombo è dovuta al fatto che lo scatteratore non è puntiforme e che il rivelatore ha, ovviamente, un'accettanza finita. Una stima del massimo valore assunto da questa quantità può essere ottenuta tramite considerazioni di tipo geometrico.

Per i nomi delle variabili utilizzate in seguito si faccia riferimento alla schematizzazione dell'apparato sperimentale di figura 19 che, per comodità di visualizzazione, è stata ingrandita nella figura 30 riportata alla fine del report.

I dati di partenza sono le distanze tra sorgente e scatteratore ($\overline{AO} \equiv L$), la distanza tra scatteratore e rivelatore ($\overline{OP} \equiv D$), la larghezza dello scatteratore ($\overline{BC} \equiv \frac{l}{2}$) e il diametro della finestra d'ingresso del rivelatore ($\overline{DE} \equiv 2d$). In seguito, si indica con θ il valore di riferimento dell'angolo a cui sono stati eseguiti i campionamenti e con i due archetti a tratto continuo gli angoli di accettazione dell'esperimento (ovvero le dispersioni).

Per calcolare l'ampiezza di questi due angoli la procedura è del tutto analoga. Si considerano i triangoli $\widehat{AOC}$ e $\widehat{OCE}$ per trovare l'angolo con vertice in C. Focalizzandosi sul primo dei due si trova l'ampiezza dell'angolo $\hat{ACO}$ come:

$$\hat{ACO} = \pi - \hat{CAO} - \hat{AOC}$$

Il primo angolo è

$$\hat{CAO} \equiv \epsilon = \arctan \frac{l \sin \frac{\theta}{2}}{2L + l \cos \frac{\theta}{2}}$$

mentre il secondo è il supplementare di $\frac{\theta}{2}$. Passando al secondo triangolo si calcola $\hat{EOC}$ tramite il teorema del seno:

$$\frac{\overline{EC}}{\sin \left(\frac{\theta}{2} - \delta \right)} = \frac{\overline{EO}}{\sin \hat{OCE}}$$

dove

$$\delta = \arctan \frac{d}{D}$$

$\overline{EO} = \frac{D}{\sin \delta}$ e, grazie al teorema del coseno:

$$\overline{EC} \equiv h = \sqrt{\left(\frac{D}{\sin \delta} \right)^2 + \frac{l^2}{4} - \frac{Dl}{\sin \delta} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \delta \right)}$$

L'angolo $\hat{OCE}$ è ottuso quindi:

$$\hat{OCE} = \pi - \arcsin \frac{\frac{D}{\sin \delta} \sin \left(\frac{\theta}{2} - \delta \right)}{h}$$

La prima dispersione è l'angolo supplementare della differenza tra $\hat{OCE}$ e $\hat{ACO}$ ed è pari a

$$\arcsin \frac{\frac{D}{\sin \delta} \sin \left(\frac{\theta}{2} - \delta \right)}{h} + \frac{\theta}{2} - \epsilon$$

Il secondo angolo limite si ottiene considerando i triangoli $\widehat{AOB}$ e $\widehat{DBO}$. Conducendo lo stesso ragionamento, si trova che l'ampiezza dell'angolo è:

$$\arcsin \frac{\frac{D}{\sin \delta} \sin \left(\frac{\theta}{2} + \delta \right)}{h'} + \frac{\theta}{2} + \epsilon$$

con

$$\overline{DB} \equiv h' = \sqrt{\left(\frac{D}{\sin \delta} \right)^2 + \frac{l^2}{4} + \frac{Dl}{\sin \delta} \cos \left(\frac{\theta}{2} + \delta \right)}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Glenn F. Knoll. *Radiation Detection and Measurement*. John Wiley and sons, third edition, 2000.
- [2] F.Mandl and G.Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley and sons, second edition, 2002.
- [3] Ortec. Maestro A65-B32, Software User's Manual.
- [4] PerkinElmer. TRUMP-PCI-2K Multichannel Buffer Card, Hardware Manual.
- [5] C. Raimondi, E. Rapisarda, and F. Cottini. *Compton Effect Measurement*. Technical report, Laboratorio di Particelle Elementari, Dipartimento di Fisica G. Occhialini, Università Milano-Bicocca, 2007.
- [6] C. S. Wu and I. Shaknov. *The Angular Correlation of Scattered Annihilation Radiation*, volume 77. Physical Review, 1950.
- [7] Donald H. Perkins. *Introduction to High Energy Physics*. Cambridge University Press, fourth edition, 2000.

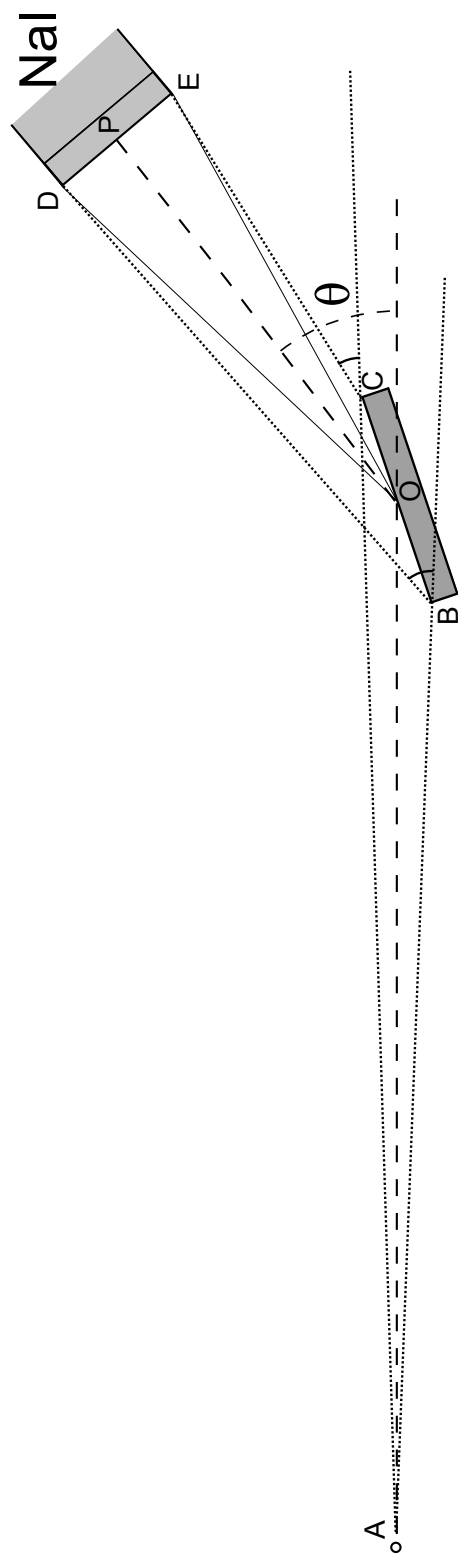


Figura 30: *Dispersione angolare tra lo scatteratore e il rivelatore da 3''*. Le lunghezze non sono in scala.

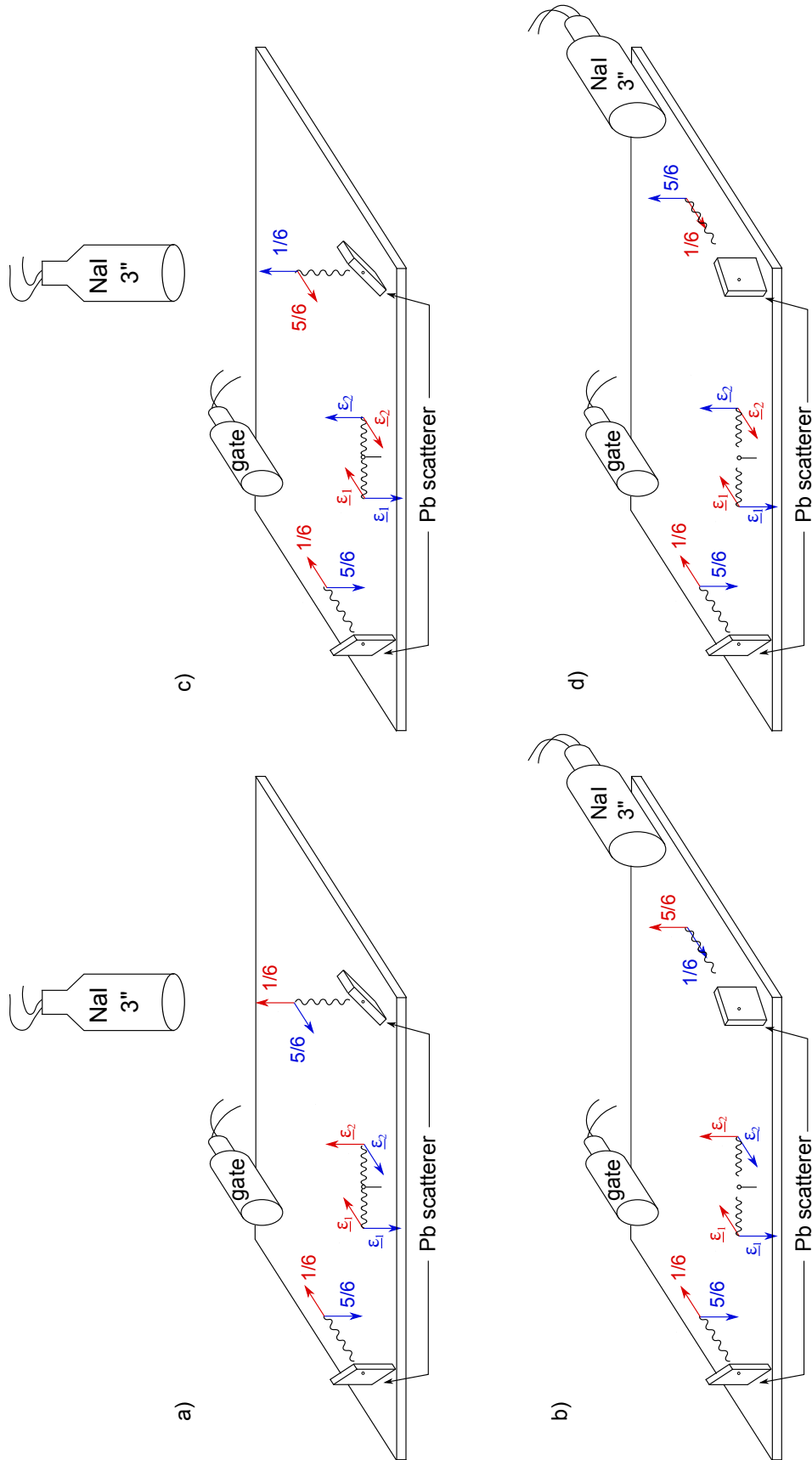


Figura 31: Schema dell'apparato sperimentale. I fotoni con colore uguale provengono dallo stesso decadimento.