

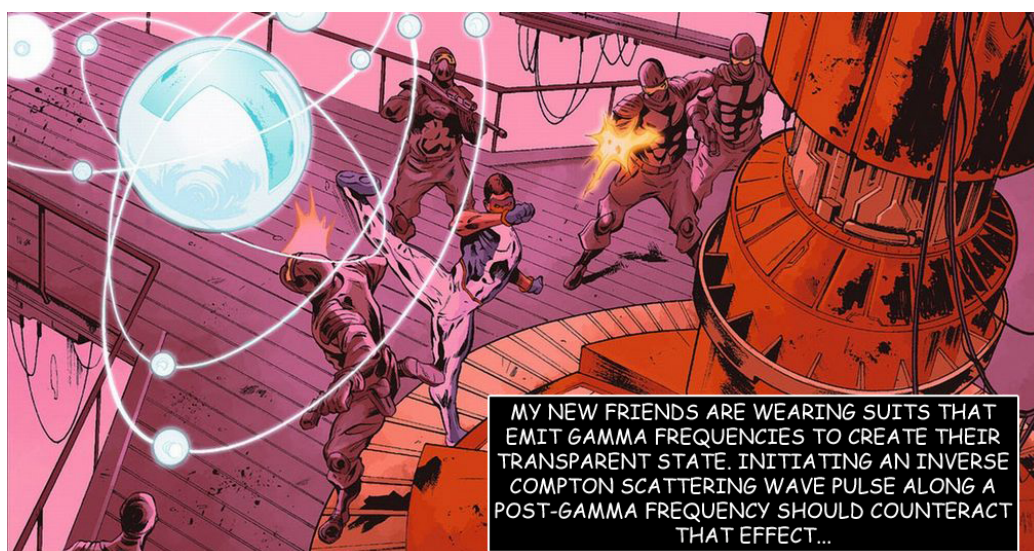
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
LAUREA SPECIALISTICA IN FISICA
LABORATORIO DI MISURE NUCLEARI E SUBNUCLEARI



EFFETTO COMPTON

Gaia Barbiero - Davide Lancierini - Giuseppe Scionti

ANNO ACCADEMICO 2013-2014



SOMMARIO

L'esperienza qui descritta consiste in una verifica sperimentale dell'effetto Compton, realizzata attraverso l'utilizzo di un apparato in coincidenza costituito da due rivelatori scintillanti, un diffusore di piombo ed una sorgente di fotoni emessi *back-to-back*. Durante la fase preliminare sono state determinate le condizioni di lavoro ottimali dell'apparato e delle singole unità che lo compongono. Le misure sperimentali così ottenute hanno permesso la verifica della relazione Compton, della relazione Klein-Nishina e della parità del positronio.

INDICE

Indice	I
1 Introduzione	1
1.1 Esperimento storico	1
1.2 Esperimento attuale	6
2 Ottimizzazione dei moduli	8
2.1 La sorgente	8
2.2 I rivelatori e i preamplificatori	10
2.3 Alimentatore	11
2.3.1 Ricerca della tensione di lavoro ottimale	12
2.3.2 Deriva della tensione	13
2.4 Alimentatori dei preamplificatori	15
2.4.1 Linearità del guadagno	16
2.5 MCA	18
2.5.1 Linearità dell'ADC	19
2.5.2 Calibrazione dell'MCA	20
2.6 Il crate e i cavi	22
3 Ottimizzazione dell'apparato sperimentale	23
3.1 Scelta del guadagno	23
3.2 Scelta del tempo di formatura	24
3.3 Scelta della distanza di lavoro	27
3.4 L'apparato sperimentale	29
3.4.1 Studio delle coincidenze casuali e del pile-up	30
3.5 Analisi della geometria dell'esperimento	31
3.5.1 Studio della distanza del rivelatore di gate	31
3.5.2 Profondità di attenuazione del fascio	31
3.5.3 Dispersione angolare	33

4	Risultati sperimentali	37
4.1	Relazione Compton	38
4.2	Sezione d'urto Klein-Nishina	40
5	Verifica della parità del positronio	45
5.1	Covarianza dell'equazione di Dirac e parità intrinseca	45
5.2	Il positronio	47
5.2.1	C-parità del positronio	47
5.2.2	C-parità di un sistema di n fotoni	48
5.2.3	Comportamento del sistema in esame sotto parità	48
5.3	Dalla sezione d'urto all'apparato sperimentale	49
5.4	Geometria finita	52
5.5	Studio dell'MDA	56
5.6	Conclusioni	59
A	Calcolo degli errori	61
A.1	Risoluzione	61
A.2	Efficienza	62
A.3	Relazione Compton	64
A.4	Sezione d'urto Klein-Nishina	65
B	Argomenti complementari	66
B.1	Stima della profondità di attenuazione	66
B.2	Studio del coefficiente risoluzione - energia	67
C	Script e programmi	69
C.1	Job per Maestro	69
C.2	Programmi ROOT per l'analisi degli spettri	69
C.3	Script di Mathematica per il calcolo di σ_C^{TH} e per $R_{\perp\parallel}$	70
	Bibliografia	76

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

In questo capitolo viene presentato il contesto storico, il primo approccio sperimentale ed una breve trattazione quantistico-relativistica dell'effetto Compton. Di seguito viene fornito un semplice confronto tra l'esperimento originale e l'approccio usato nell'esperimento presentato in questa relazione.

1.1 ESPERIMENTO STORICO

L'elettrodinamica classica prevede che la radiazione incidente su un bersaglio sia diffusa con la stessa lunghezza d'onda della radiazione incidente.

$$\lambda_{diff} = \lambda_{inc}$$

Sperimentalmente, tuttavia, si osservano alcune deviazioni dalla teorica classica della diffusione. Per piccoli angoli, tale deviazione è interpretabile, ancora nell'ambito della teoria classica, come un fenomeno di interferenza tra l'onda secondaria e le onde diffuse dagli elettroni vicini. Per radiazione incidente molto energetica, al limite raggi X o γ , la distribuzione energetica a grandi angoli non è più isotropa e tale fenomeno non è più interpretabile nell'ambito dell'elettrodinamica classica. Si rende quindi necessaria una teoria quantistica e relativistica per descrivere il fenomeno.

La prima formulazione di questa teoria venne avanzata da A. H. Compton (1892-1962) e P. J. W. Debye (1884-1966) nel 1923, a seguito di una serie di osservazioni sperimentali, con il nome di *Effetto Compton*. In tale fenomeno si osserva che la radiazione diffusa è caratterizzata da una lunghezza d'onda maggiore di quella incidente.

$$\lambda_{diff} > \lambda_{inc}$$

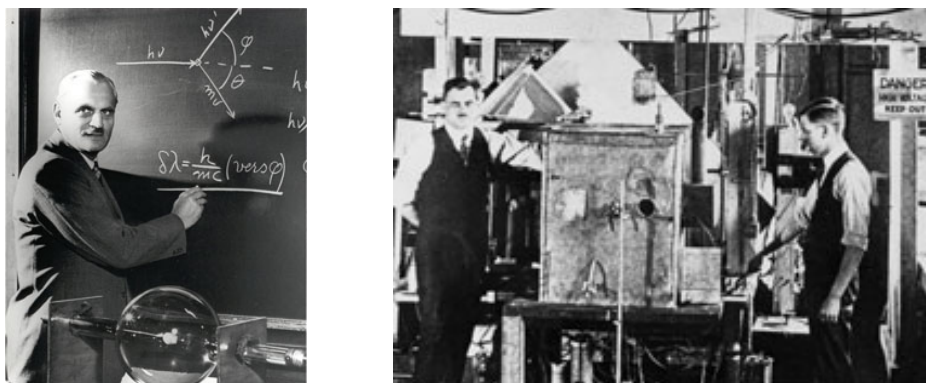


Figura (1.1). Immagini che ritraggono Compton nella spiegazione della sua teoria e accanto al suo esperimento.

La prima osservazione della diffusione incoerente è stata presentata da A. H. Compton nel 1922, alla *Washington University* di St. Louis (fig. 1.1). L'esperimento da egli condotto, prevedeva l'utilizzo di un fascio primario di raggi X prodotti da una sorgente di Molibdeno, nell'intervallo di energie tra 177 e 496 keV, e di un fascio di raggi γ fra gli 0.5 ed i 3.5 MeV, prodotti da una sorgente di ^{214}Bi . Questi fasci incidevano su bersagli costituiti, rispettivamente, da schermi di grafite per i raggi X e di Ferro, Alluminio o paraffina per i raggi γ [1]. La lunghezza d'onda dei raggi diffusi era misurata osservando le riflessioni di Bragg; le intensità dei raggi erano invece misurate con camere a ionizzazione [2] (fig. 1.2).

Le misure erano in aperto contrasto con le teorie classiche di diffusione proposte da J. J. Thomson, che trattavano la radiazione elettromagnetica solo da un punto di vista ondulatorio. Nell'interpretazione dell'effetto fotoelettrico, tuttavia, era stata avanzata l'ipotesi che la radiazione incidente non fosse descrivibile in termini ondulatori, ma come un fascio di fotoni che vengono assorbiti dagli elettroni del materiale, in un processo quantistico di trasferimento dell'energia. Compton e Debye ripresero l'ipotesi dei fotoni e applicarono un approccio quantistico al processo di diffusione elettrone-fotone. Interpretarono, quindi, la diffusione incoerente come un urto elastico tra particelle, in cui il fotone incidente è diffuso e l'elettrone, considerato inizialmente in quiete, rincula. Per tale processo si richiede la conservazione del quadri-impulso, come nel caso dell'effetto fotoelettrico [3].

Nell'esperimento di Compton, le alte energie dei fotoni incidenti, comprese tra le centinaia di keV e qualche MeV, potevano essere trasferite agli

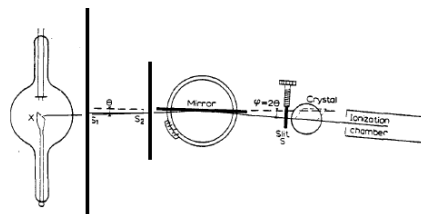


Figura (1.2). Apparato sperimentale dell'esperimento originale.

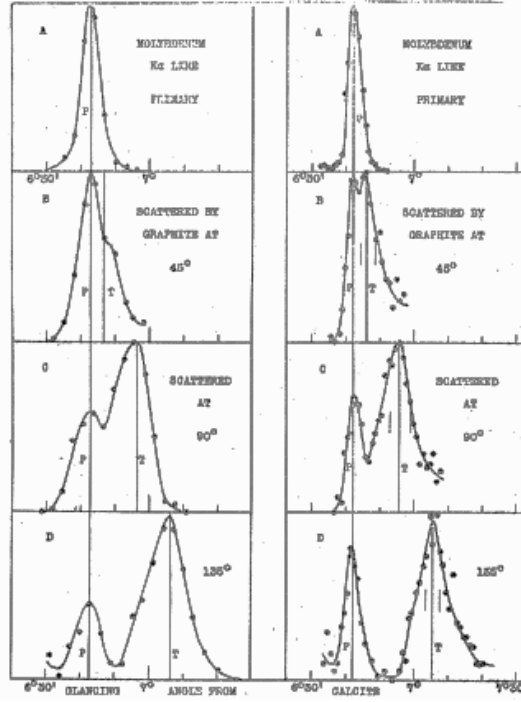


Figura (1.3). Risultati dell'esperimento originale.

elettroni della grafite. L'energia del fotone incidente, quindi, è confrontabile con la massa a riposo dell'elettrone. Tale limite rende necessaria una trattazione nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica della cinematica del processo.

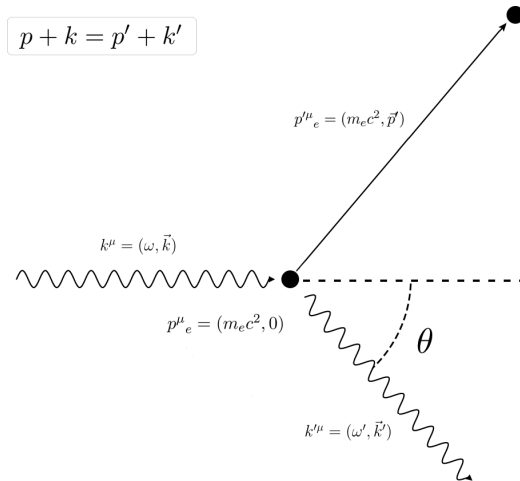


Figura (1.4). Rappresentazione della cinematica dell'effetto Compton.

La lagrangiana d'interazione è

$$L_I = -e : j^\mu A_\mu :$$

dove $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ è la corrente di Dirac.

Per calcolare il contributo della matrice di Dyson o di *scattering* S al processo in esame, è necessario svilupparla fino al secondo ordine in e e tenere gli elementi nonnulli tra gli stati finali, $\langle e'^-\gamma' | = \langle 0 | a(k')b(p')$, ed iniziali, $|e^-\gamma\rangle = a^\dagger(k)b^\dagger(p)|0\rangle$.

L'unico elemento nonnullo nello svolgimento del prodotto ordinato temporale delle lagrangiane di interazione è la 1-contrazione

$$S_{fi} = \langle f | S_B^{(2)} | i \rangle = (ie)^2 \int d^4x d^4y \langle e'\gamma' | \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) iS_F(x-y) \mathcal{A}(y) \psi(y) | e\gamma \rangle$$

e sviluppando anche i prodotti ordinati normali, si ottiene il contributo dei due grafici, a livello albero (fig. 1.5)

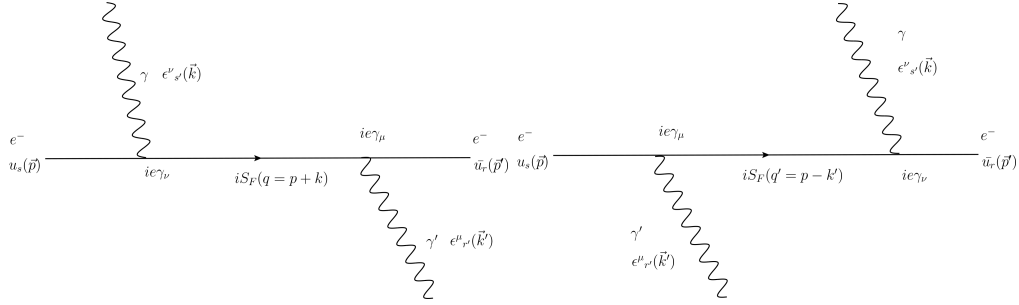


Figura (1.5). Diagrammi di Feynman, a livello albero, dell'effetto Compton.

$$\begin{aligned} \langle f | S^a + S^b | i \rangle &= S_{fi}^a + S_{fi}^b \\ &= (ie)^2 \int d^4x d^4y \langle 0 | a(k')b(p') \bar{\psi}^-(x) \mathcal{A}^-(x) iS_F(x-y) \mathcal{A}^+(y) \psi^+(y) a^\dagger(k) b^\dagger(p) | 0 \rangle \\ &+ (ie)^2 \int d^4x d^4y \langle 0 | a(k')b(p') \bar{\psi}^-(x) \mathcal{A}^+(x) iS_F(x-y) \mathcal{A}^-(y) \psi^+(y) a^\dagger(k) b^\dagger(p) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Lo sviluppo in modi normali dei campi fermionici e bosonici coinvolti, ossia $\bar{\psi}^-$, ψ^+ , $\mathcal{A}^-$ e $\mathcal{A}^+$, fornisce l'espressione di S_{fi}^a e S_{fi}^b in termini di ampiezze di Feynman, a meno di fattori di normalizzazione e δ di conservazione di quadri-momento. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} S_{fi} &= S_{fi}^a + S_{fi}^b \\ &= \left[2\pi^4 \delta^4(\sum p_f - \sum p_i) \prod_{ext} \left(\frac{m}{VE} \right)^{1/2} \prod_{ext} \left(\frac{1}{2V\omega} \right)^{1/2} \right] (M_a + M_b) \end{aligned}$$

dove

$$M_a = \bar{u}_r(\vec{p}') [ie\gamma_\mu \epsilon_r^\mu(\vec{k}')] iS_F(q = p + k) [ie\gamma_\nu \epsilon_s^\nu(\vec{k})] u_{s'}(\vec{p})$$

$$M_b = \bar{u}_r(\vec{p}') [ie\gamma_\nu \epsilon_s^\nu(\vec{k})] iS_F(q = p - k') [ie\gamma_\mu \epsilon_r^\mu(\vec{k}')] u_{s'}(\vec{p})$$

e la probabilità di transizione per unità di tempo è $\omega = \frac{|S_{fi}|^2}{T}$, con T l'intervallo di tempo considerato. La sezione d'urto differenziale, ossia il tasso di transizione in un gruppo di stati finali per un solo centro di diffusione e per flusso incidente unitario, è

$$d\sigma = \omega \frac{V}{v_{rel}} \prod_f \frac{V d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3}$$

dove V è il volume d'integrazione e v_{rel} è la velocità del flusso rispetto allo scatteratore. La sezione d'urto così ricavata è ancora invariante di Lorentz per ogni sistema di riferimento in cui le particelle si muovono collinearmente, ossia o il sistema del laboratorio o il sistema del centro di massa. Passando al limite di $(T, V) \rightarrow \infty$, si ha, per l'effetto Compton

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{m_e^2 \omega'}{16\pi^2 E E' \omega} \left[\frac{\partial(w' + E')}{\partial|p'|} \right]^{-1} |M_a + M_b|^2$$

e per ricavare $\left[\frac{\partial(w' + E')}{\partial|p'|} \right]^{-1}$ è necessario porsi nel sistema di riferimento più opportuno, in questo caso il sistema del laboratorio, dove $v_{rel} = \frac{|\vec{k}|}{\omega} = c$.

La conservazione del quadri-momento ($p + k = p' + k'$) impone che

$$\omega' = \frac{m_e \omega}{m_e + \omega(1 - \cos \theta)}$$

e ripristinando le unità del S.I. si ottiene la nota relazione Compton

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

dove è facile notare che nel limite classico ($E \ll m_e c^2$) $E' \sim E$. In questo sistema di riferimento, l'esplicita relazione tra ω' , E' e p' permette di calcolare $\left[\frac{\partial(w' + E')}{\partial|p'|} \right]^{-1}$. Con quest'ultima si ottiene la sezione d'urto differenziale per lo *scattering* Compton [5]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{LS} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right) |M_a + M_b|^2.$$

1.2 ESPERIMENTO ATTUALE



Figura (1.6). Immagine dell'esperimento presentato in questa relazione.

Nell'esperimento descritto in questa relazione (fig. 1.6) sono stati utilizzati i fotoni emessi dall'annichilazione del positrone emesso nel decadimento β^+ di una sorgente di ^{22}Na , che incidono su uno scatteratore di Piombo. La scelta del materiale è stata dettata dalla necessità di avere un'alta densità di atomi bersaglio e caratterizzati da un'energia di legame molto minore rispetto all'energia dei fotoni incidenti, al fine di avere sezione d'urto Compton significativa (fig. 1.8 e fig. 1.7, [6]). In caso contrario, si ricadrebbe nel caso di diffusione coerente descritto dalla teoria di Thomson.

Nell'esperimento originale era stata utilizzata una camera a ionizzazione ed un cristallo per misurare lunghezza d'onda e intensità della radiazione diffusa. Nell'esperimento in esame, questi ruoli sono svolti entrambi da uno scintillatore NaI(Tl) che permette di effettuare una migliore analisi spettroscopica. Al fine di rivelare solamente i fotoni diffusi all'angolo stabilito, è stata posta una schermatura di Piombo attorno al rivelatore spettroscopico e lo si è posto in coincidenza con un secondo scintillatore NaI(Tl). L'utilizzo della schermatura ha tuttavia introdotto nello spettro finale i picchi della radiazione X emessa dal Piombo e altri elementi di disturbo.

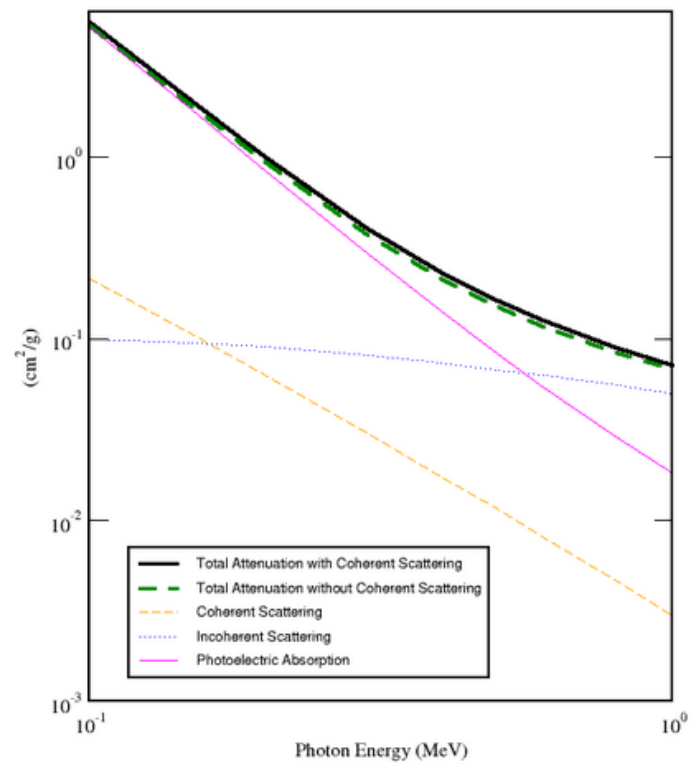


Figura (1.7). Grafico delle sezioni d'urto per il Piombo [6].

Photon Energy	Scattering		Photoelectric Absorption	Pair Production		Total Attenuation	
	Coherent	Incoherent		In Nuclear Field	In Electron Field	With Coherent Scattering	Without Coherent Scattering
MeV	cm²/g	cm²/g	cm²/g	cm²/g	cm²/g	cm²/g	cm²/g
1.000E-01	2.128E-01	9.894E-02	5.237E+00	0.000E+00	0.000E+00	5.549E+00	5.336E+00
1.500E-01	1.049E-01	9.484E-02	1.815E+00	0.000E+00	0.000E+00	2.015E+00	1.910E+00
2.000E-01	6.260E-02	8.966E-02	8.464E-01	0.000E+00	0.000E+00	9.986E-01	9.360E-01
3.000E-01	2.988E-02	8.036E-02	2.930E-01	0.000E+00	0.000E+00	4.032E-01	3.733E-01
4.000E-01	1.746E-02	7.310E-02	1.417E-01	0.000E+00	0.000E+00	2.323E-01	2.148E-01
5.000E-01	1.143E-02	6.734E-02	8.257E-02	0.000E+00	0.000E+00	1.613E-01	1.499E-01
6.000E-01	8.060E-03	6.263E-02	5.406E-02	0.000E+00	0.000E+00	1.248E-01	1.167E-01
8.000E-01	4.621E-03	5.537E-02	2.871E-02	0.000E+00	0.000E+00	8.870E-02	8.408E-02
1.000E+00	2.991E-03	4.993E-02	1.810E-02	0.000E+00	0.000E+00	7.102E-02	6.803E-02

Figura (1.8). Tabella delle sezioni d'urto del Piombo.

CAPITOLO 2

OTTIMIZZAZIONE DEI MODULI

In questo capitolo vengono presentate, dopo una breve descrizione della sorgente e dei rivelatori, le principali caratteristiche costruttive dei vari moduli utilizzati. Al termine della presentazione di ogni singola unità, sono espone anche le prime calibrazioni effettuate su ciascun modulo.

2.1 LA SORGENTE

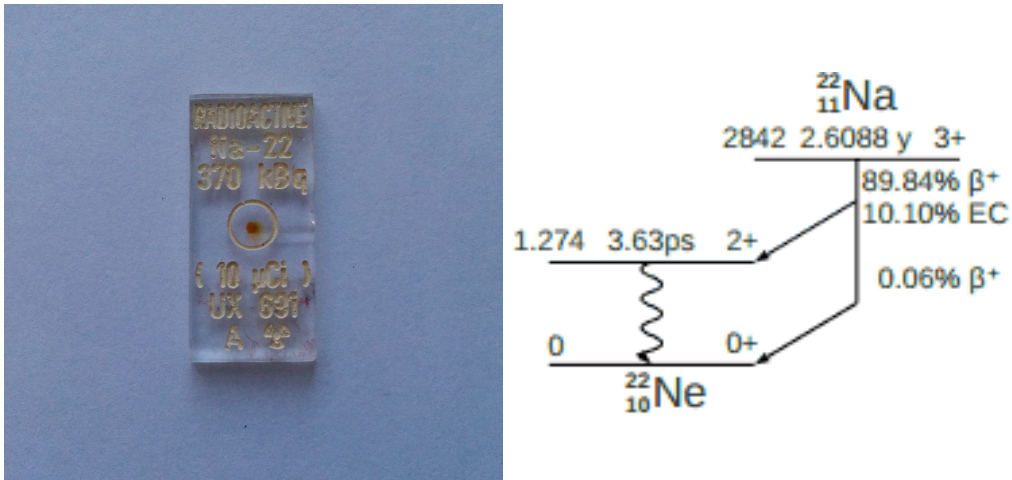


Figura (2.1). Immagine della sorgente di ^{22}Na e schema del decadimento [7].

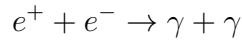
La sorgente (fig. 2.1) utilizzata nell'esperimento in esame è l'isotopo radioattivo ^{22}Na ($M = 22.001404$ amu, $\tau_{1/2} = 2.6029$ y, $Q = 2843.02$ keV).

La reazione d'interesse per l'esperimento è il decadimento β^+ , che può avvenire in due modalità che differiscono per il diverso stato eccitato dell'isotopo ^{22}Ne prodotto. Il decadimento che produce $^{22}\text{Ne}^*$ sullo stato nucleare

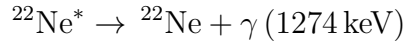
eccitato 2^+ ha $Br = 89.84\%$; il decadimento che produce lo stesso isotopo nel suo stato nucleare fondamentale è caratterizzato da $Br = 0.06\%$ (fig. 2.1)[4].



Il positrone emesso forma uno stato legato, denominato positronio, con uno degli elettroni circostanti. Il positronio, in seguito, si annichila emettendo due fotoni *back-to-back* aventi, ciascuno, energia pari a 511 keV.



Contemporaneamente a questo processo avviene la diseccitazione elettromagnetica del nucleo di $^{22}\text{Ne}^*$, sullo stato fondamentale 0^+ , con l'emissione di un ulteriore fotone avente energia pari a 1274.53 keV [7].



La sorgente in esame ha un'attività nominale di 370 kBq ed in data 21 Febbraio 2013 è stata misurata un'attività $A(0)$ di 347.9 kBq. All'inizio delle misure è stata calcolata un'attività pari a 275260.7195 Bq per mezzo della legge del decadimento radioattivo:

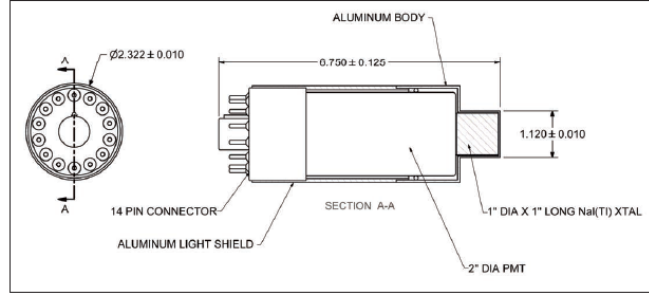
$$A(t) = A(0)e^{-\frac{t \ln 2}{\tau_{1/2}}}$$

dove $\tau_{1/2} = 2.6029$ y e t è il tempo trascorso tra il 21 Febbraio 2013 e l'inizio delle misure ($t = 321$ d). A causa della costante di decadimento relativamente alta, l'attività così calcolata è stata supposta costante per tutto l'arco delle misure.

La sorgente è incapsulata in una piccola barretta di materiale plastico. La sua geometria e le sue ridotte dimensioni permettono di considerarla puntiforme.

2.2 I RIVELATORI E I PREAMPLIFICATORI

905-1 NaI Scintillation Detector, 1- x 1-in. crystal, 2-in. tube



905-3 NaI Scintillation Detector, 2- x 2-in. crystal, 2-in. tube

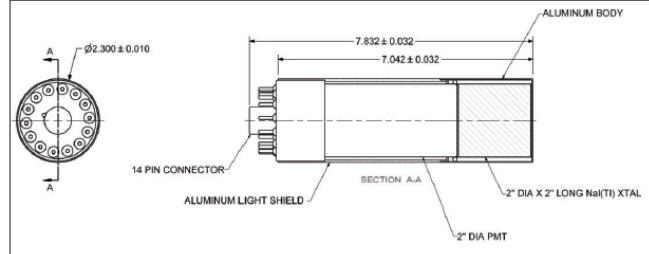


Figura (2.2). Schema degli scintillatori NaI(Tl), di 1" e 2", utilizzati nell'esperimento.



Figura (2.3). Immagine dei preamplificatori.

I rivelatori utilizzati sono due scintillatori inorganici di NaI(Tl), prodotti dalla ORTEC (fig. 2.2). Entrambi sono rivestiti con una scocca cilindrica di metallo, che comprende sia il cristallo scintillante sia il fototubo (modello RCA-8055, da 10 dinodi, con un guadagno di 10^5 ad 1.5 kV). I due scintillatori si distinguono principalmente per la dimensione del cristallo scintillante. Il diametro del primo è di 1 pollice (1.27 cm), mentre il secondo ha diametro

di 2 pollici (2.54 cm). Questo comporta un diverso volume attivo e, quindi, una diversa efficienza di rivelazione ed una diversa calibrazione.

All'estremità di ciascun fototubo è possibile innestare il preamplificatore (fig. 2.3). Il modello usato è ORTEC 276, che dispone di un'uscita anodica e di un'uscita preamplificata. Sono inoltre disponibili gli ingressi sia per l'alimentazione del preamplificatore sia per l'alimentazione del fototubo, oltre ad un ingresso per impulsi di test. Le specifiche tecniche del preamplificatore sono elencate in tabella 2.1.

PREAMPLIFICATORE	
IN	Dall'ultimo dinodo del fototubo
OUT	Preamplificato positivo
Z_{OUT}	$93\ \Omega$
t_{RISE}	$< 100\text{ ns}$ per impulsi di test con rise time veloce
t_{DECAY}	$50\ \mu\text{s}$
G	nominale $5\ \mu\text{V}/\text{eV}$ per 2" NaI(Tl)
INL	$< \pm 0.02\%$ tra 0 e 10 V
$NOISE_{OUT}$	$< 50\ \mu\text{V rms}$
$\Delta G(T)$	$< \pm 0.005\%$ °C tra 0°C e 50°C

Tabella (2.1). Specifiche tecniche dei preamplificatori [11], [8].

2.3 ALIMENTATORE



Figura (2.4). Immagine dell'alimentatore per i fototubi.

I due fototubi sono alimentati da un modulo di alimentazione in alta tensione, modello ORTEC N1470AL (fig. 2.4), le cui specifiche tecniche sono riportate

in tabella 2.2. La principale calibrazione eseguita per questo modulo è stata la ricerca della tensione di lavoro ottimale, al fine di massimizzare la risoluzione e l'efficienza di conteggio dei rivelatori. Particolare attenzione è stata posta anche alla ricerca di possibili derive della tensione di lavoro.

ALIMENTATORE	
$V_{MIN} - V_{MAX}$	10 – 8100 V
$V_{SET} STABILITY$	0.02% a temperatura fissata dopo 7 d
$\Delta V(T)$	max 50 ppm°C tra 0 °C e 45 °C

Tabella (2.2). Specifiche tecniche dell'alimentatore [12], [9].

2.3.1 RICERCA DELLA TENSIONE DI LAVORO OTTIMALE

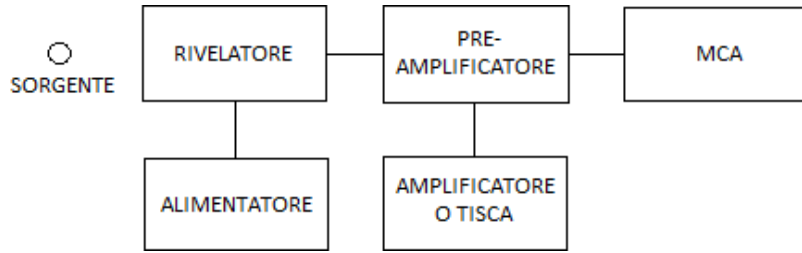


Figura (2.5). Apparato sperimentale per la ricerca della tensione di lavoro.

Il modulo di alimentazione in alta tensione permette di diversificare la tensione fornita ai due rivelatori. La tensione di lavoro ottimale è stata scelta cercando operativamente il voltaggio che massimizzasse sia la risoluzione (par. A.1) sia l'efficienza di conteggio, ossia l'area integrale sottesa dai picchi dello spettro, per ciascun rivelatore. A tal fine, ogni rivelatore è stato alimentato con varie tensioni (fig. 2.5), per ciascuna delle quali è stato acquisito lo spettro dopo un'ora di misura ad una distanza tale da evitare il *pile-up*. L'errore sulla tensione di lavoro è, infatti, predominante rispetto all'errore relativo alla distanza rivelatore-sorgente nelle fasi iniziali, in quanto riguarda la raccolta delle cariche. Il procedimento è stato reiterato per tutte le tensioni tra i 600 V e i 1100 V per il rivelatore da 1" e tra i 500 V e i 1100 V per il rivelatore da 2", con passo di 50 V. Da ogni singolo spettro ottenuto in questa campagna di misure sono state estratte informazioni sull'area integrale e sulla *FWHM* dei picchi a 511 keV. Tali informazioni sono riportate nei grafici di fig. 2.6 e fig. 2.7.

A basse tensioni entrambi i rivelatori hanno risoluzione peggiore, in accordo con la minor produzione di cariche in grado di superare la barriera di

estrazione del fotocatodo. Ad alte tensioni, tuttavia, la maggior profondità di fuga degli elettroni nei diodi riduce la quantità di cariche nella cascata di-nodica [3]. Esiste quindi un voltaggio ottimale che massimizza la risoluzione (vedi fig. 2.6). L'efficienza di conteggio, invece, non risente particolarmente delle diverse tensioni a cui sono alimentati i fototubi, poiché dipende principalmente dal cristallo (vedi fig. 2.7). A seguito di tali considerazioni, il rivelatore da 1" è stato posto a 800 V mentre il rivelatore da 2" a 700 V. Le risoluzioni dei due rivelatori, alimentati a questi voltaggi, sono quindi rispettivamente $R_{1''} = 0.08405 \pm 0.0009$ e $R_{2''} = 0.07849 \pm 0.0007$.

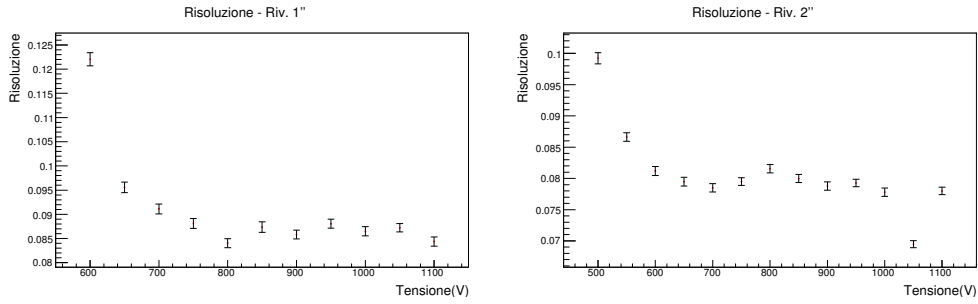


Figura (2.6). Grafici della risoluzione in funzione della tensione di lavoro.

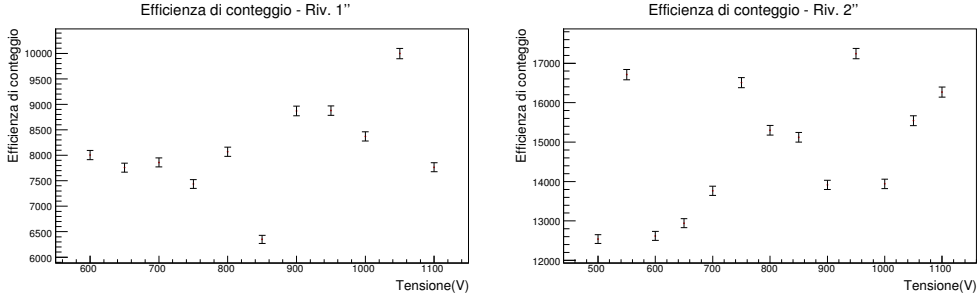


Figura (2.7). Grafici dell'efficienza di conteggio in funzione della tensione di lavoro.

2.3.2 DERIVA DELLA TENSIONE

Le variazioni di tensione durante la raccolta dello spettro portano ad alterazioni dello stesso, poiché la posizione dei picchi risente particolarmente di tale fluttuazione. Se l'entità di tale spostamento è paragonabile con la $FWHM$ dei picchi, essi presenteranno risoluzioni peggiori [3]. Avendo la necessità di effettuare misure molto lunghe, anche di diversi giorni, è stato necessario determinare la presenza e l'entità di eventuali fluttuazioni della tensione di alimentazione.

Una possibile causa delle fluttuazioni della tensione è la variazione della temperatura. Per questa ragione, sono state effettuate due diverse campagne di misura nei periodi in cui si registra la maggior variazione di temperatura: i giorni feriali e i giorni festivi (in corrispondenza dei quali, si ha un'escursione termica attesa $\Delta T \approx 5^\circ\text{C}$). In questi periodi sono stati raccolti degli spettri, ciascuno con durata temporale di un'ora e intervallati da pause di 5 minuti, con il medesimo apparato utilizzato per la ricerca della tensione di lavoro (fig. 2.5). Da questi spettri sono state estrapolate le posizioni delle centroidi dei picchi da 511 keV, riportate nei grafici in fig. 2.8. I grafici mostrano l'analisi eseguita per il rivelatore 2" ma non viene riportato lo studio della deriva della tensione di lavoro per il rivelatore da 1", in quanto il modulo di alimentazione è lo stesso per entrambi e sono stati ottenuti i medesimi risultati.

Dai grafici in fig. 2.8, si evince che la deriva non è influenzata dalla variazione della temperatura, come atteso dalle specifiche tecniche del modulo di alimentazione (vedi tabella 2.2). L'andamento oscillatorio della tensione, infatti, è inferiore all'1% in entrambi i grafici.

Il grafico di fig. 2.9 mostra una campagna di misura di due giorni, eseguita a partire dall'accensione del modulo. Nelle prime 6/7 ore dopo l'accensione, si osserva un andamento inatteso, che è stato ricondotto all'iniziale instabilità della tensione fornita dall'alimentatore. Poiché si manifesta solo nelle prime ore dall'accensione, tale instabilità risulta poco rilevante, e ha come unico effetto quello di procrastinare l'inizio dell'acquisizione delle misure.

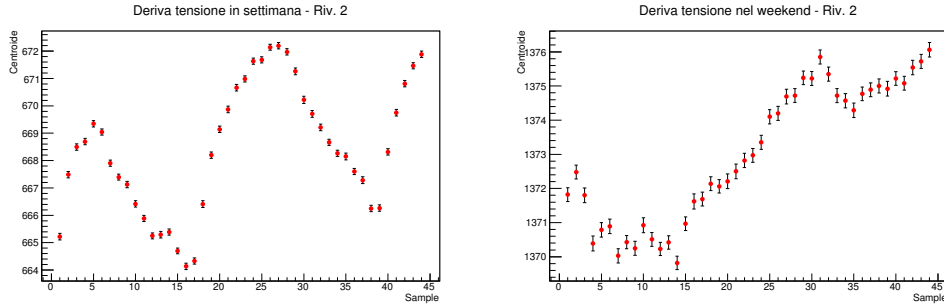


Figura (2.8). Grafici della deriva della tensione di lavoro per il rivelatore spettroscopico.

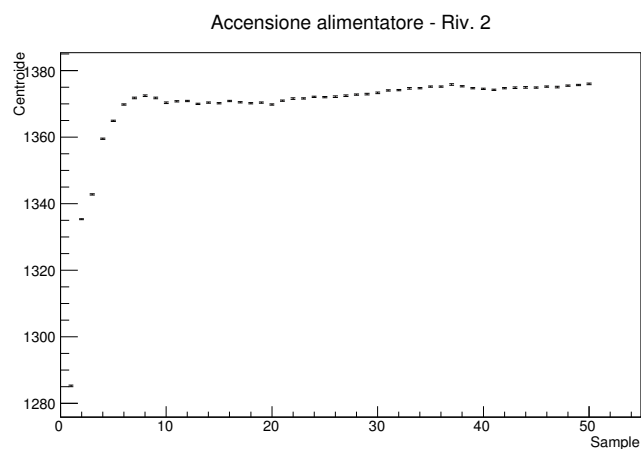


Figura (2.9). Grafico che mostra la deriva della tensione nelle prime 6/7 ore di misura.

2.4 ALIMENTATORI DEI PREAMPLIFICATORI



Figura (2.10). Immagine del modulo di amplificazione, a sinistra, e del modulo TiSCA, a destra.

I due preamplificatori sono invece alimentati da due diversi moduli. Il preamplificatore del rivelatore 1" è alimentato dal modulo di amplificazione ORTEC 572 (fig. 2.10 a sinistra), che fornisce inoltre l'amplificazione e la formatura del segnale in *input*. Le specifiche tecniche sono riportate in tabella 2.3.

Il preamplificatore del rivelatore da 2" è alimentato dal modulo TiSCA modello SILENA 7616 mostrato in fig. 2.10 a destra. Questo modulo, oltre a svolgere il ruolo di alimentatore, amplifica, forma e permette di impostare

una finestra energetica per il segnale di *input*. Le specifiche tecniche sono elencate in tabella 2.4.

AMPLIFICATORE	
IN	0 – 10 V, rise time 10 – 650 ns, decay time 40 – 2000 μ s
Z_{IN}	500 Ω
OUT	0 – 10 V, unipolare
Z_{OUT}	< 1 Ω
G	1 – 1500
INL	< 0.05% a 2 μ s di shaping time
$NOISE_{OUT}$	< 8 μ V a 2 μ s di shaping time e $G \geq 100$
$\Delta G(T)$	$\leq 0.0075\%$ °C tra 0 °C e 50 °C
t_{ST} (μ s)	0.5, 1, 2, 3, 6, 10

Tabella (2.3). Specifiche tecniche dell'amplificatore [13].

TiSCA	
IN	0 – 10 V rise time 10 – 650 ns e decay time > 40 μ s
Z_{IN}	1 k Ω
OUT_{SCA}	TTL con rise time e decay time di 25 ns
	0.5 – 6 μ s, emesso 200 ns dopo il picco di OUT_{AMP}
$Z_{OUT_{SCA}}$	100 Ω
OUT_{AMP}	circa gaussiano
$Z_{OUT_{AMP}}$	93 Ω
$Rumore_{OUT_{AMP}}$	5 μ V a 2 μ s di shaping time e $G = 100$
G	12 - 1280
$\Delta G(T)$	$\leq 0.0075\%$ °C a fondo scala
INL	< 0.05% a fondo scala
t_{ST} (μ s)	0.5, 2

Tabella (2.4). Specifiche tecniche di lavoro del TiSCA [14].

2.4.1 LINEARITÀ DEL GUADAGNO

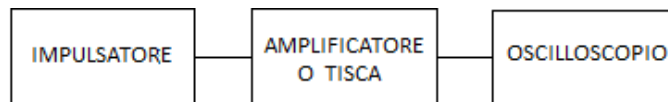


Figura (2.11). Apparato sperimentale per la verifica della linearità del guadagno.

Il TiSCA e l'amplificatore permettono di modificare l'ampiezza del segnale in uscita, agendo sul guadagno. Risulta quindi necessario verificare che tale

guadagno sia effettivamente lineare. A tale scopo è stato utilizzato un generatore di onde quadre positive di ampiezza fissata $V_{in} = 0.05\text{ V}$, collegato al modulo di amplificazione. L'ampiezza V_{out} del segnale in uscita dall'amplificatore è stata misurata tramite oscilloscopio, come in fig. 2.11. Le ampiezze attese e misurate al variare del guadagno G , sono riportate nelle tabelle 2.5.

Da questi dati sono stati estratti i grafici in fig. 2.4.1, che provano la linearità del guadagno entro l'errore sperimentale, sia del TiSCA sia dell'amplificatore. L'errore sperimentale è dovuto alla precisione dei cursori dell'oscilloscopio e alla sensibilità con cui è possibile scegliere il guadagno all'amplificatore. I valori di ampiezza attesi sono stati calcolati come: $V_{atteso} = GV_{in}$.

AMPLIFICATORE				TiSCA			
G	V_{in}	V_{out}^{EXP}	V_{out}^{TH}	G	V_{in}	V_{out}^{EXP}	V_{out}^{TH}
20	0.05	1.10	1.00	19	0.05	3.60	3.61
40	0.05	2.16	2.00	20.4	0.05	3.84	3.88
50	0.05	2.68	2.50	21.8	0.05	4.12	4.14
60	0.05	3.14	3.00	23.2	0.05	4.36	4.41
100	0.05	5.28	5.00	24.6	0.05	4.64	4.67
150	0.05	7.52	7.50	26	0.05	4.84	4.94
200	0.05	10.30	10.00	27.4	0.05	5.08	5.21

Tabella (2.5). Linearità del guadagno per l'amplificatore e per il TiSCA.

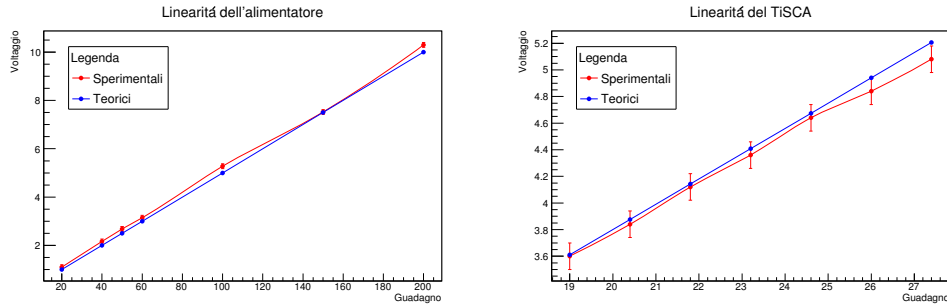


Figura (2.12). Grafici della linearità del guadagno per entrambi i moduli. In rosso i punti sperimentali, in blu i punti teorici.

2.5 MCA

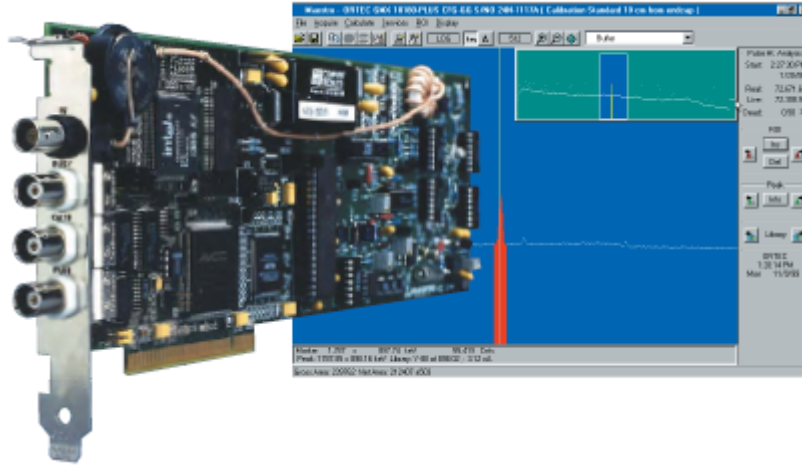


Figura (2.13). Immagine della scheda elettronica con funzione di MCA.

I segnali provenienti dall'amplificatore e dal TiSCA vengono raccolti rispettivamente dall'*input* e dal *gate* di una scheda elettronica inserita all'interno di un PC e che ha la funzione di MCA (fig. 2.13). Le specifiche tecniche sono elencate nella tabella 2.6. Per questo modulo è stato necessario provare la linearità dell'ADC, sua fondamentale componente, e stabilire il fattore di conversione canali-energia.

MCA	
IN	0 – 10 V, unipolare positivo
Z_{IN}	1 k Ω
$GATE$	NIM positivo lento
Z_{GATE}	1 k Ω
ADC	approssimazioni successive con metodo sliding scale
$\frac{t_{dead}}{events}$	8 μs con correzione metodo Gedcke-Hale [16],[17]
DNL	$< \pm 1\%$ sopra il 99% del range dinamico
INL	$< \pm 0.25\%$ sopra il 99% del range dinamico
$\Delta G(T)$	$\leq \pm 50$ ppm $^{\circ}C$

Tabella (2.6). Specifiche tecniche dell'MCA [15], [9].

2.5.1 LINEARITÀ DELL'ADC

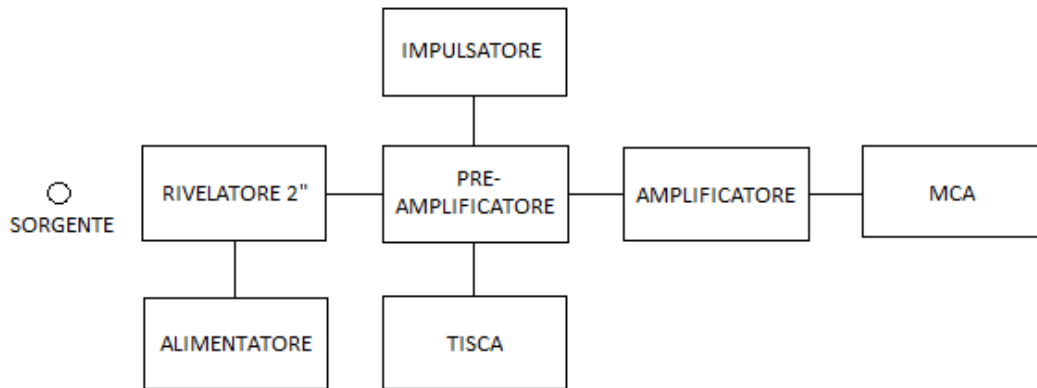


Figura (2.14). Apparato utilizzato per la verifica della linearità dell'ADC.

Per verificare la linearità dell'ADC, componente fondamentale dell'MCA, sono state immesse nell'ingresso di test del rivelatore da 2" delle onde quadre con ampiezza diversa (tra 0.05 e 0.1 V, con passo 0.01 V) e frequenza fissata a 100 Hz, prodotte da un generatore, come in fig. 2.14. La linearità è verificata se lo spettro ottenuto consiste di picchi equispaziati con centroidi in canali proporzionali all'ampiezza dell'onda immessa. I picchi ottenuti (fig. 2.15) mostrano una risoluzione migliore rispetto ai picchi attesi negli spettri poiché sono immessi a livello di preamplificazione e non di fotomoltiplicazione. In quest'ultimo stadio, infatti, le fluttuazioni del guadagno interdinodico avrebbero peggiorato la risoluzione [3]. La stima della non-linearità integrale è stata ottenuta tramite interpolazione parabolica e lineare delle posizioni delle centroidi (fig. 2.16) e i risultati confermano la linearità dell'ADC (il coefficiente del termine quadratico è quasi nullo e l'interpolazione lineare risulta ottima) [3].

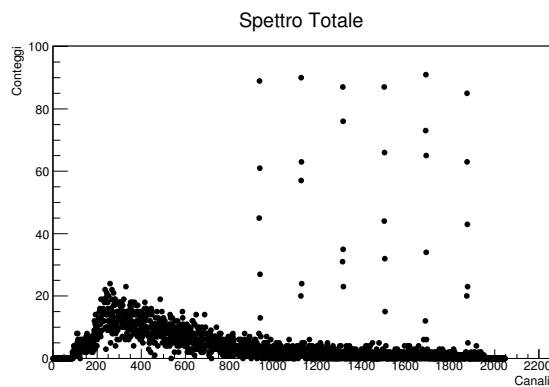


Figura (2.15). Spettro a pettine ottenuto per la linearità dell'ADC.

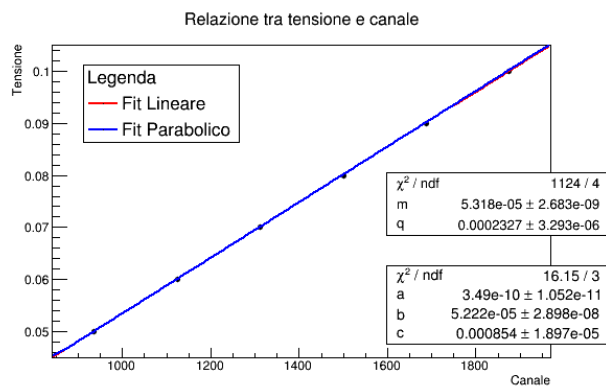


Figura (2.16). Stima della non-linearità integrale.

2.5.2 CALIBRAZIONE DELL'MCA

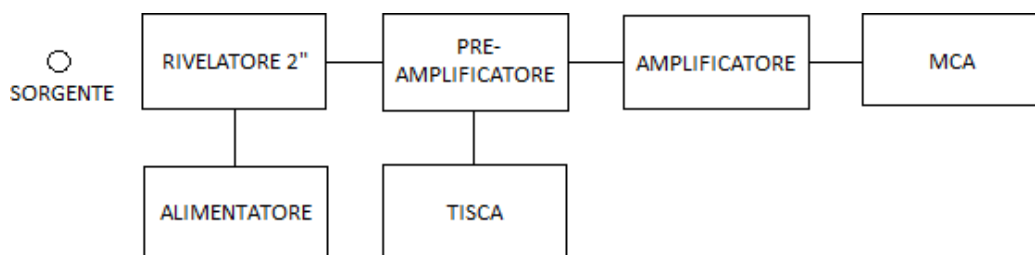


Figura (2.17). Apparato utilizzato per la verifica la stima del fattore di conversione canali-energia.

La conversione tra canali ed energia per l'MCA è stata ottenuta tramite interpolazione dei picchi prodotti da varie sorgenti γ :

- ^{57}Co ($\tau_{1/2} = 271.79$ d) con picco a 122.062 keV e a 136.475 keV;
- ^{22}Na ($\tau_{1/2} = 2.6029$ y) di cui viene analizzato il picco a 511 keV;
- ^{228}Th ($\tau_{1/2} = 1.9116$ y) di cui vengono analizzati i picchi a 238.6 keV e 583.2 keV.

Questa procedura, eseguita con l'apparato mostrato in fig. 2.17, garantisce anche un'ulteriore conferma della linearità dell'ADC [3]. Il fattore di conversione b canali-energia è mostrato dall'interpolazione parabolica ($y = ax^2 + bx + c$) di fig. 2.18, in cui si può notare che l'andamento è pressoché lineare poiché il coefficiente a ha valore compatibile col suo errore.

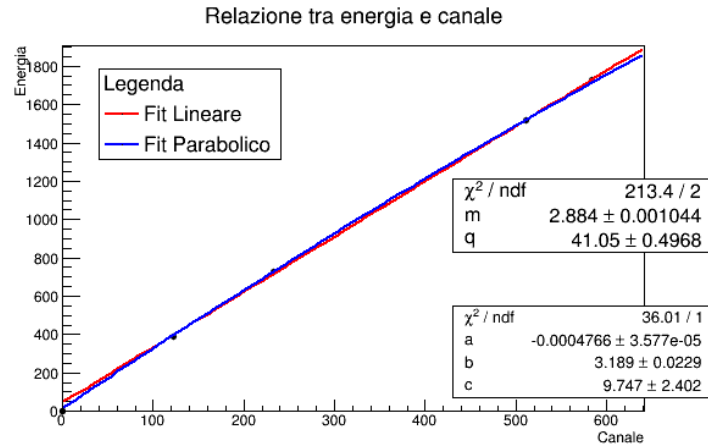


Figura (2.18). Interpolazione parabolica eseguita per ricavare il fattore di conversione b canali-energia.

2.6 IL CRATE E I CAVI



Figura (2.19). Immagine del *crate* a sinistra, e dei cavi coassiali a destra.

Il supporto e l'alimentazione dei singoli moduli viene fornita da un NIM *crate*, da 12 *slot*, dell'azienda Tesys (fig. 2.19 a sinistra). I cavi di alimentazione (tranne quelli dei preamplificatori) e di collegamento sono tutti cavi coassiali RG-58/U terminati con connettori BNC. Questo tipo di cavi ha impedenza caratteristica $\approx 52\Omega$ e quindi vengono terminati con *shunt* da 50Ω per evitare possibili riflessioni. La velocità di trasmissione di questo tipo di cavi, dovuta al dielettrico utilizzato, è $0.66c$. Le specifiche tecniche sono riportate per intero in tabella 2.7 [10].

CAVI COASSIALI	
<i>MATERIALE ISOLANTE</i>	polietilene
<i>DIAMETRO</i>	1.03 cm
<i>IMPEDENZA</i>	52Ω
<i>$v_{trasmissione}$</i>	$0.66c$
<i>HV_{max}</i>	5000 V
<i>C</i>	96.8 pF/m
<i>ATTENUAZIONE</i>	100 MHz/m
<i>LUNGHEZZE(m)</i>	≤ 2.5 m

Tabella (2.7). Specifiche tecniche dei cavi coassiali.

CAPITOLO 3

OTTIMIZZAZIONE DELL'APPARATO SPERIMENTALE

I moduli, calibrati nel precedente capitolo, sono stati successivamente collegati al fine di ottenere un apparato per misure in coincidenza. Per minimizzare le coincidenze casuali e l'errore sperimentale di tale apparato, è stato necessario scegliere guadagno, *shaping time* e distanza tra rivelatori e sorgente. Con queste selezioni è stato possibile determinare la configurazione elettronica e geometrica ottimale per l'esperimento.

3.1 SCELTA DEL GUADAGNO

Al fine di posizionare il picco a 511 keV dei fotoni di *gate* al centro dello spettro (circa al canale 1000 dell'MCA) il guadagno del TiSCA è stato impostato a $G = 87.6$. Prevedendo l'andamento decrescente dell'energia del fotone misurato, il guadagno per l'amplificatore è stato impostato a $G = 39$, corrispondente ad un picco da 511 keV al canale 1500 circa dell'MCA. Questa scelta permette di contenere il picco di misura, anche in caso di derive, e di sfruttare al meglio i canali disponibili.

3.2 SCELTA DEL TEMPO DI FORMATURA

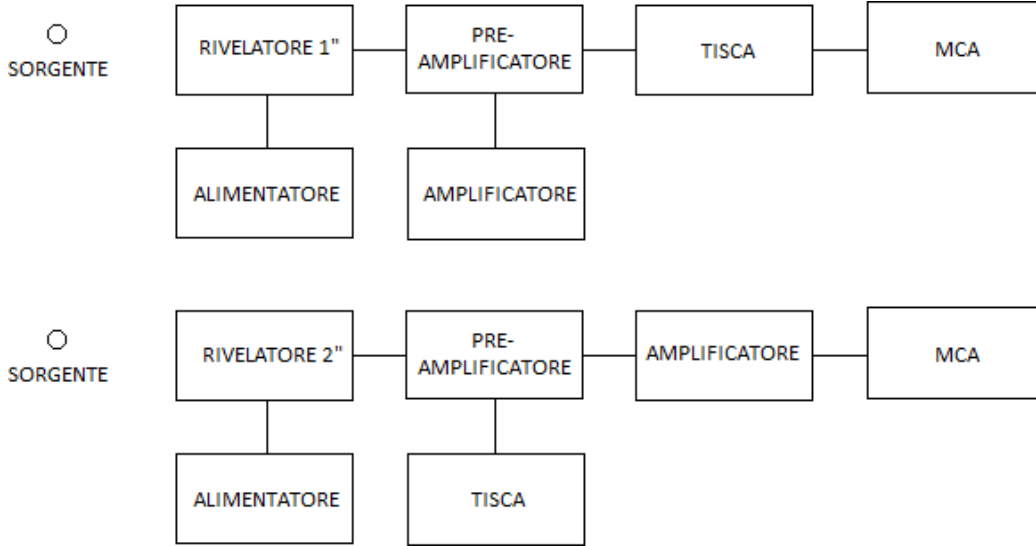


Figura (3.1). Apparato sperimentale per la scelta del empo di formatura.

I due rivelatori presentano le stesse caratteristiche tecniche (stesso tipo di cristallo, stesso modello di fototubo e stesso modello di fotomoltiplicatore), quindi i segnali uscenti dai rispettivi preamplificatori si possono considerare contemporanei. Ciascun modulo di amplificazione, invece, permette di modificare lo *shaping time*, ossia il tempo di formatura del segnale di tipo *long tail*, proveniente dal preamplificatore. La scelta del corretto *shaping time* permette di adeguare i singoli segnali ai requisiti specifici e di coincidenza dell'MCA, citati in precedenza (par. 2.5), e permette di ridurre il *pile-up*. Le caratteristiche tecniche dei moduli utilizzati, tuttavia, permettono la scelta solo di alcuni *shaping time* (tab. 2.3, 2.4).

Per l'amplificatore lo *shaping time* è la costante caratteristica τ del circuito attivo che forma il segnale di *output*. L'impulso amplificato raggiunge il picco in 2.2τ e la sua ampiezza scende sotto lo 0.1% in 6τ [13].

L'amplificatore presente nel TiSCA apre il *gate* $0.2\mu s$ dopo che il segnale da esso formato raggiunge il massimo. La durata del segnale di *gate* uscente dal TiSCA è regolabile, attraverso vite interna, da un minimo di $0.5\mu s$ ad un massimo di $6\mu s$, per ottenere segnali più lunghi dovrebbero essere introdotte ulteriori unità elettroniche che genererebbero rumore [14].

L'MCA richiede che il segnale prodotto dallo SCA arrivi all'ingresso di *gate* con un anticipo di $0.5\mu s$, rispetto al massimo del segnale di *input*, e che

si estenda per i successivi $0.5 \mu s$ al fine di processare correttamente il segnale spettroscopico [15].

Tenendo conto di queste caratteristiche, sono state svolte le misure per tutti i possibili *shaping time* di ciascun amplificatore, in accordo con la configurazione riprodotta in fig. 3.1. I risultati sono riportati nelle tabelle 3.1. Il calcolo dell'errore sulla risoluzione è svolto in dettaglio in appendice A par. A.1.

Il grafico mostrato in fig. 3.2, invece, mostra il migliore tempo di formatura per il modulo di amplificazione, corrispondente al minimo della curva di risoluzione (dovuto alla diminuzione del deficit balistico e del rumore in serie e ad una scarsa sensibilità al rumore in parallelo, oltre che ad un minimo del *pile-up* [3]).

Tenuto conto dei risultati precedenti e dei vincoli imposti dai vari moduli, si è ottimizzato lo *shaping time* scegliendo $1 \mu s$ per il segnale del rivelatore 2" e $0.5 \mu s$ per quello del rivelatore 1". Per il valore di apertura del *gate* si è scelto $4 \mu s$. Queste caratteristiche sono visibili nell'immagine, da oscilloscopio, riportata in fig. 3.3.

Rivelatore 1" - TISCA			Rivelatore 2" - Amplificatore		
$t_{ST} (\mu s)$	R	$\sigma(R)$	$t_{ST} (\mu s)$	R	$\sigma(R)$
0.5	0.086998	0.000832	0.5	0.082403	0.000456
2	0.088980	0.000871	1	0.083163	0.000461
			2	0.082771	0.000462
			3	0.083161	0.000449
			6	0.081556	0.000451
			10	0.082553	0.000466

Tabella (3.1). Tabella della risoluzione al variare dello *shaping time* per TiSCA ed amplificatore.

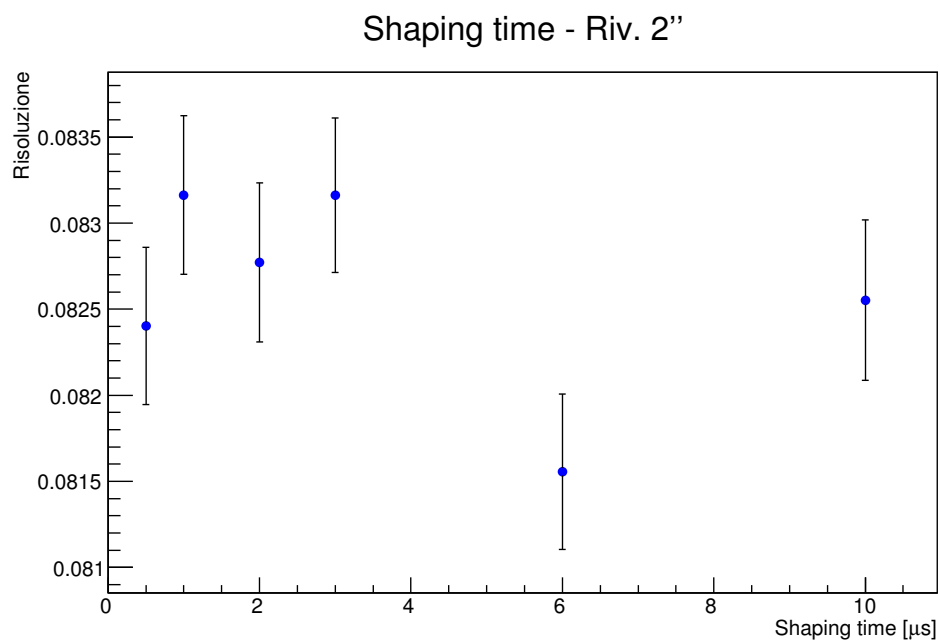


Figura (3.2). Grafico della risoluzione in funzione dello *shaping time* per l'amplificatore.

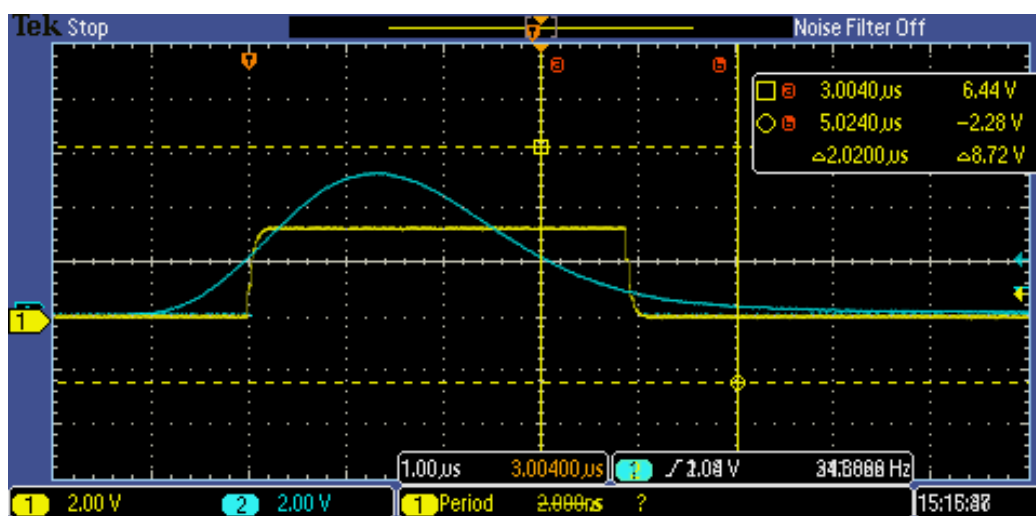


Figura (3.3). Immagine di una coincidenza presa da oscilloscopio.

3.3 SCELTA DELLA DISTANZA DI LAVORO

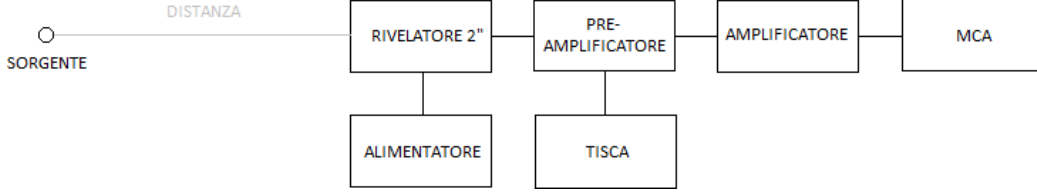


Figura (3.4). Apparato sperimentale utilizzato per le misure di efficienza al variare della distanza.

Per una completa trattazione della disposizione geometrica dell'esperimento, si rende necessario lo studio delle efficienze dei rivelatori, al variare della loro distanza dalla sorgente. L'efficienza assoluta è definita come

$$\epsilon_{ABS} = \frac{N}{2ABr\Delta t}$$

ed al fine di svincolarla dalla geometria dell'apparato è definita anche l'efficienza intrinseca come

$$\epsilon_{INT} = \frac{N}{ABr\Delta t} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)^{-1}.$$

La trattazione completa è riportata in appendice A par. A.2. Per ottenere l'efficienza intrinseca dai dati si è eseguita una linearizzazione della formula precedente:

$$\underbrace{\frac{N}{\Delta t}}_y = \underbrace{\epsilon_{INT}}_m \underbrace{ABr \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)}_x.$$

Per ciascuna formula il calcolo dell'errore è mostrato in appendice A par. A.2. L'apparato utilizzato per tale misura è illustrato in figura 3.4. I risultati, riportati in fig. 3.6, mostrano la linearità entro l'errore sperimentale. Sono inoltre presenti i grafici delle efficienze assolute e delle efficienze intrinseche senza linearizzazione (fig. 3.5 e 3.6) da cui si evince che le distanze ottimali sono 25 cm per il rivelatore 1" ($\epsilon_{INT}^{(1)} = 0.1895 \pm 0.0003$) e 40 cm per il rivelatore 2" ($\epsilon_{INT}^{(2)} = 0.4734 \pm 0.0012$).

Scelte le distanze, è possibile stabilire quale rivelatore svolga in maniera ottimale la funzione di rivelatore di *gate* e quale quella di rivelatore spettroscopico. Avendo la minor superficie attiva, il rivelatore 1" permette di avere un fascio maggiormente collimato di fotoni da 511 keV, quindi è stato scelto

come *gate*. La necessità di avere una risoluzione migliore per il rivelatore spettroscopico ha avvalorato tale scelta, dato che il rivelatore 1" ha una risoluzione peggiore (par. 2.3.1). Il rivelatore 2", quindi, è stato usato come rivelatore spettroscopico.

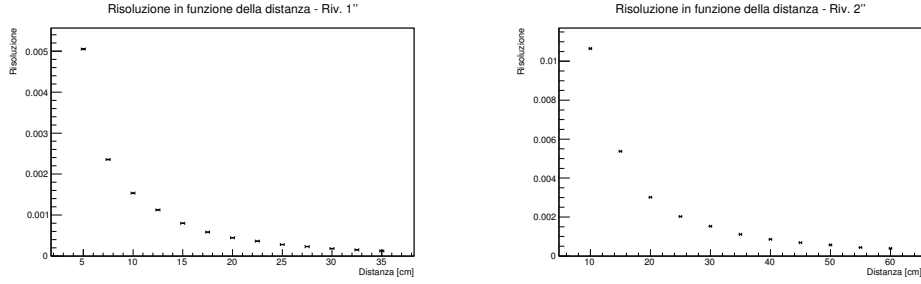


Figura (3.5). Grafici dell'efficienza assoluta al variare della distanza.

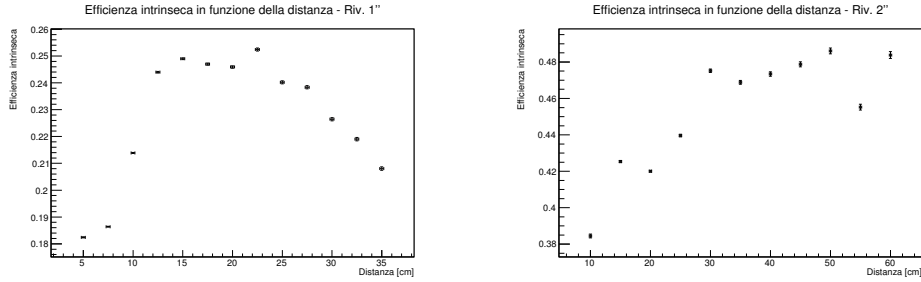


Figura (3.6). Grafici dell'efficienza intrinseca al variare della distanza.

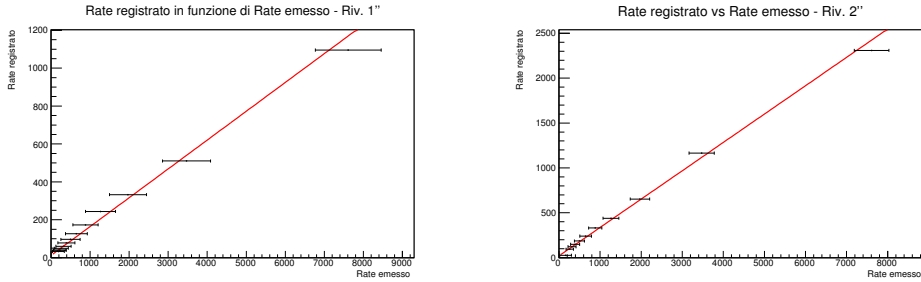


Figura (3.7). Grafici che rappresentano la linearizzazione dell'efficienza intrinseca e l'interpolazione.

3.4 L'APPARATO SPERIMENTALE

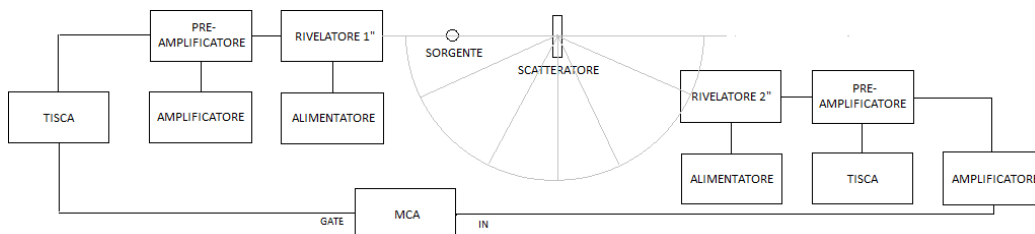


Figura (3.8). Apparato sperimentale.

Le scelte dei paragrafi precedenti hanno definito la configurazione geometrica ed elettronica dell'apparato sperimentale, mostrato in fig. 3.8, e descritto di seguito.

Nell'apparato sperimentale, la sorgente è stata allineata con il rivelatore da 1", posto a 25 cm di distanza. Tale rivelatore ha la funzione di fornire un segnale di *gate* all'MCA, quando rivela uno dei fotoni emessi *back-to-back* dalla sorgente. Il *gate*, al fine di soddisfare le richieste di coincidenza dell'MCA (tab. 2.6), rimane aperto per un tempo di $t = 4 \mu\text{s}$.

Il secondo fotone incide su uno scatteratore cilindrico di Piombo, posto a 10 cm di distanza dalla sorgente, con diametro 7 cm e spessore 0.5 cm. Il rivelatore da 2", posto a 30 cm di distanza dallo scatteratore ed orientato ad angoli diversi a seconda della misura, ha il compito fare spettroscopia sul fotone diffuso dal bersaglio.

Per selezionare soltanto i fotoni di *gate* con energia di 511 keV, abbiamo opportunamente chiuso la finestra energetica del TiSCA. Questo permette di ridurre le coincidenze tra fotoni di diversa energia.

Al fine di rivelare esclusivamente i fotoni diffusi dallo scatteratore, il rivelatore da 2" è stato schermato con un castello di mattoni di Piombo di 20x10x5 cm.

Lo spettro atteso, nonostante questi accorgimenti, non presenterà il solo picco del fotone diffuso (fig. 3.9), in quanto non è possibile eliminare totalmente il fondo naturale, il rumore elettronico, i contributi dovuti a coincidenze accidentali (par. 3.4.1) e alla radiazione introdotta dalla schermatura. In ogni spettro sarà visibile, al canale 1900 circa, un picco di controllo ottenuto tramite segnale da impulsatore, immesso nell'ingresso di test del preamplificatore del rivelatore 2". Questo impulso serve per avere un controllo sull'eventuale perdita della calibrazione dell'MCA, dovuta a derive o fluttuazioni della tensione di lavoro. Le caratteristiche dell'impulso sono: onda quadra con ampiezza 0.1 V, frequenza 10 Hz e *offset* 0.035 V.

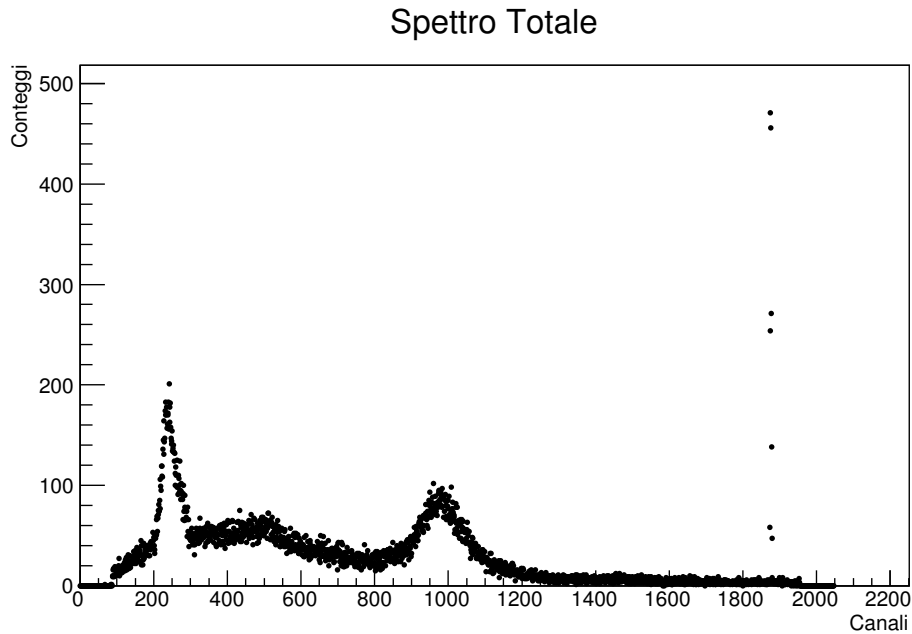


Figura (3.9). Spettro esemplificativo.

3.4.1 STUDIO DELLE COINCIDENZE CASUALI E DEL PILE-UP

Le coincidenze casuali consistono nella rivelazione di eventi causati da fotoni provenienti dalla radioattività naturale. È stato necessario quindi individuarne le possibili sorgenti:

- il *gate* viene aperto da un fotone proveniente dalla sorgente, ed il rivelatore spettroscopico rivela un fotone da radioattività naturale ed il secondo fotone emesso *back-to-back* dalla sorgente;
- un fotone ambientale apre il *gate* e un altro fotone ambientale è rivelato dal rivelatore spettroscopico.

La prima sorgente di coincidenze casuali è stimabile con una misura in cui il rivelatore spettroscopico risulta cieco ai fotoni della sorgente, poiché è stato rimosso il diffusore dalla configurazione originale. La seconda invece è facilmente stimabile con una misura senza sorgente.

Gli spettri ottenuti in queste configurazioni, sono riportati in fig. 3.10, in cui è possibile osservare l'esiguità degli eventi osservati.

La stima dell'eventuale *pile-up* è invece effettuabile, misura per misura, grazie al picco di controllo: se l'area di interpolazione dello stesso, senza fondo, differisce molto dal numero di impulsi immessi da generatore allora vi

è un forte effetto di *pile-up* (è il metodo dell'impulsatore [3]). Come visibile anche dalla fig. 3.9 questa differenza è minima e quindi trascurabile.

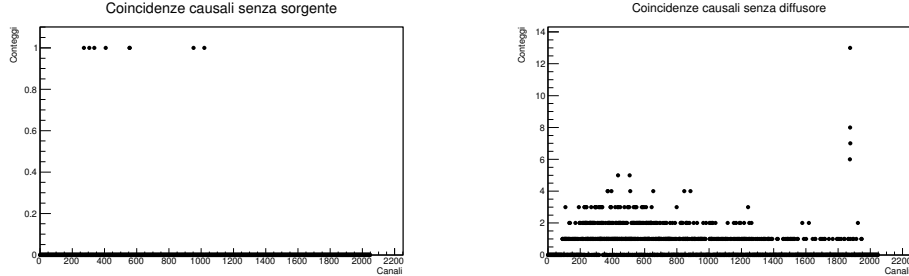


Figura (3.10). Grafici che rappresentano la linearizzazione dell'efficienza intrinseca e l'interpolazione.

3.5 ANALISI DELLA GEOMETRIA DELL'ESPERIMENTO

Particolare attenzione è stata prestata alla ricerca della configurazione geometrica ottimale dell'apparato sperimentale, in quanto maggiore fonte di errore sull'angolo di misura e, di conseguenza, sull'energia corrispondente. L'errore sull'angolo è dovuto principalmente ai contributi dati dall'estensione finita del diffusore e del rivelatore 2".

Le seguenti valutazioni sulla dispersione angolare permettono di scegliere un ulteriore grado di libertà della configurazione sperimentale: l'orientazione a cui porre il diffusore per minimizzare l'errore sull'angolo di misura.

3.5.1 STUDIO DELLA DISTANZA DEL RIVELATORE DI GATE

Nell'ipotesi di emissione isotropa della sorgente, la distanza tra quest'ultima ed il rivelatore da 1" (AB in fig. 3.11), fa sì che il fascio di fotoni che producono coincidenza sia limitato a quello contenuto nel cono sotteso dalla superficie del rivelatore 1". Tale distanza è stata scelta per ottimizzare l'efficienza del rivelatore di *gate* e collimare il fascio di fotoni da esso sotteso. Questa scelta pone un limite superiore alla distanza AC (in fig. 3.11) affinché l'angolo solido uguale ed opposto a quello sotteso dal rivelatore 1", sia interamente contenuto nella superficie del diffusore.

3.5.2 PROFONDITÀ DI ATTENUAZIONE DEL FASCIO

Si è presa come profondità di interazione la sezione centrale IJ del diffusore, essendo la distanza di attenuazione di un fascio di fotoni per interazione Compton nel Piombo, considerevolmente maggiore dello spessore dello stesso.

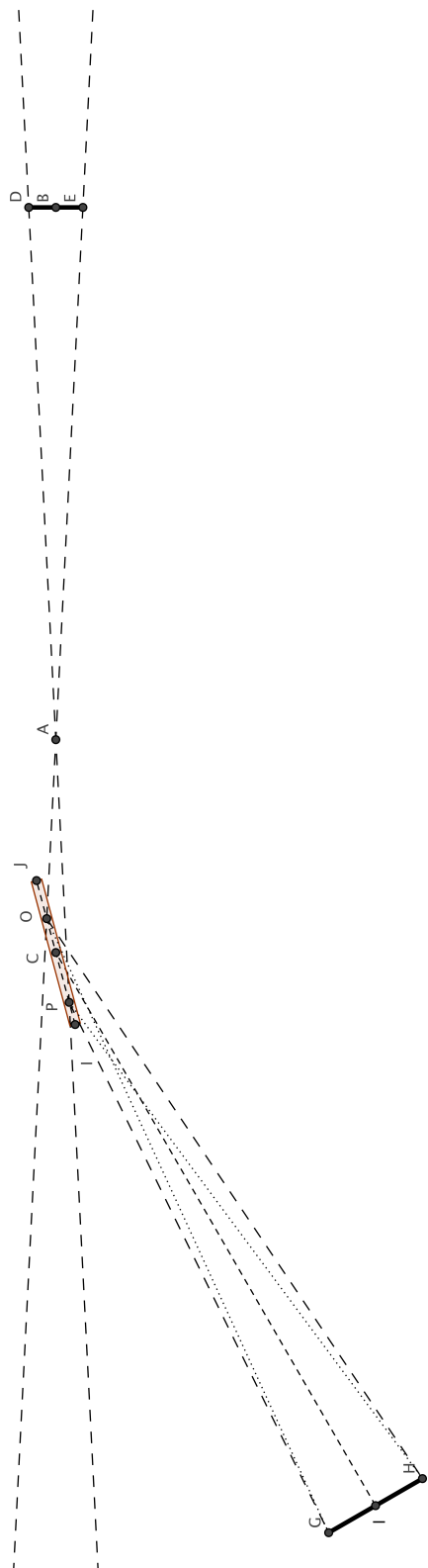


Figura (3.11). Geometria dell'apparato sperimentale in configurazione di riflessione.

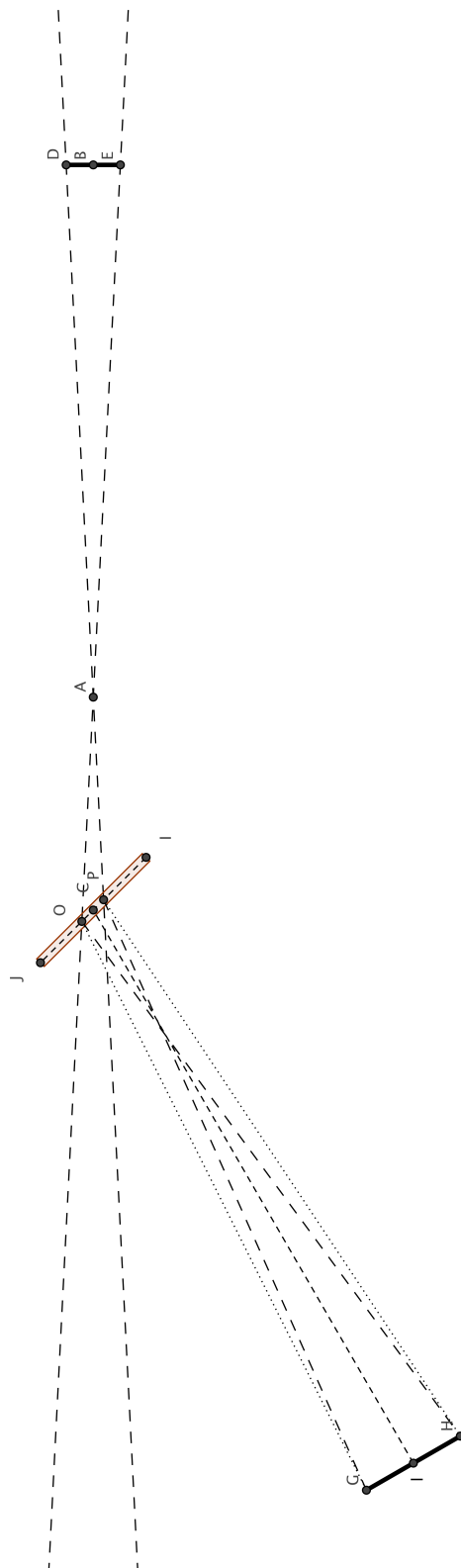


Figura (3.12). Geometria dell'apparato sperimentale in configurazione di trasmissione.

La distanza a cui l'intensità I del fascio è pari a $\frac{1}{10}$ dell'intensità iniziale I_0 vale, infatti, 3.02 cm (appendice B, par. B.1). Tale valore, se confrontato con lo spessore di 0.5 cm del bersaglio, giustifica l'approssimazione di un diffusore concentrato nella sua sezione centrale.

3.5.3 DISPERSIONE ANGOLARE

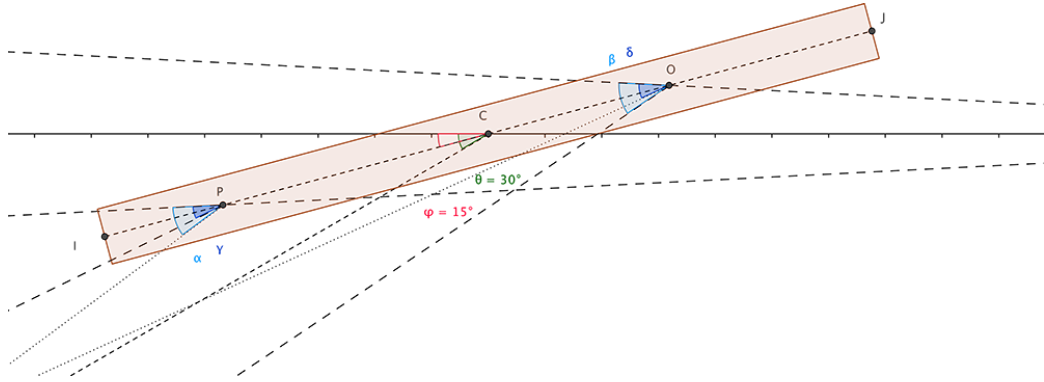


Figura (3.13). Rappresentazione dei possibili angoli estremanti di deflessione di un fotone diffuso.

La dispersione angolare è dovuta all'estensione finita dell'apparato sperimentale e, per tenerne conto, è necessario considerare i diversi punti a cui può avvenire l'interazione Compton sul segmento PO (fig. 3.11) e i diversi punti a cui il fotone diffuso può essere rivelato sulla superficie del rivelatore 2" (GH in fig. 3.11). Nel caso limite in cui l'interazione avvenga agli estremi di tali segmenti, la dispersione angolare è massima e coincide con la differenza tra gli angoli massimi e minimi di deflessione di un fotone rivelabile (fig. 3.13).

Per ogni angolo di misura θ , è stata calcolata al variare di φ , mediante simulazione in Geogebra, la differenza tra gli angoli massimi e minimi (rispettivamente β e γ in fig. 3.13) di deflessione di un fotone. Questo ha permesso di scegliere l'orientazione del diffusore, al fine di minimizzare tale dispersione angolare. Nella fig. 3.14 è riportato un grafico della dispersione angolare al variare di θ e φ .

Come si vede dal grafico e, più in dettaglio, dalla tabella 3.2, il valore di φ che minimizza la dispersione angolare non è unico ma vale $\varphi = 15^\circ$ per $\theta < 80^\circ$ e $\varphi = 20^\circ$ per $\theta > 80^\circ$. Si è scelto tuttavia di mantenere φ fissato a 15° per successiva convenienza nel calcolo della sezione d'urto. Tale valore minimizza le dispersioni angolari ai diversi θ , tranne per i casi di $\theta = 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ$ e 120° . In corrispondenza di questi valori di θ , infatti, la

differenza tra le dispersioni a $\varphi = 15^\circ$ e $\varphi = 20^\circ$ è inferiore a 2° , che, valutato in termini di ΔE , non contribuisce ad un sensibile allargamento del picco.

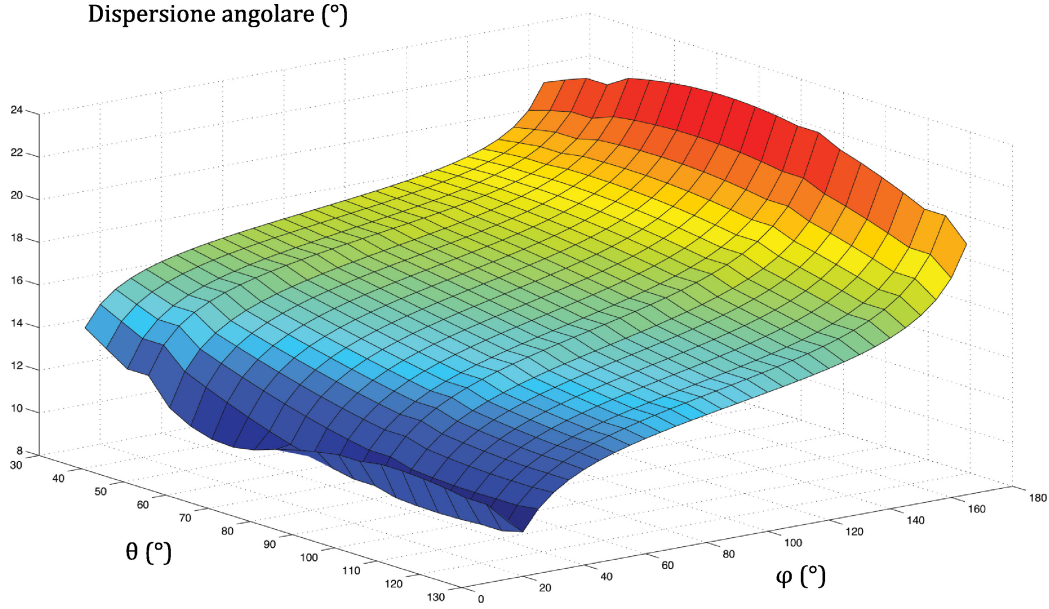


Figura (3.14). Grafico di Matlab in cui sono riportati i valori della dispersione angolare al variare dell'angolo di misura e dell'orientazione dello scatteratore. Il minimo di tale quantità non è unico.

	$\theta(^{\circ})$										
$\varphi(^{\circ})$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
15	9.19	9.22	11.08	10.23	10.34	10.95	11.35	11.53	11.47	11.19	10.70
20	9.28	9.30	12.65	11.81	11.09	10.51	10.10	9.82	9.73	9.82	10.08
30	9.39	9.39	14.19	13.57	13.01	12.52	12.13	11.84	11.66	11.60	11.66
40	9.45	9.45	14.99	14.48	14.00	13.57	13.19	12.89	12.67	12.58	12.48
50	9.49	9.48	15.51	15.10	14.64	14.24	13.88	13.57	13.31	13.13	13.01
60	9.52	9.51	15.90	15.50	15.12	14.74	14.39	14.07	13.79	13.57	13.40
70	9.55	9.53	16.20	15.86	15.50	15.14	14.80	14.47	14.18	13.92	13.72
80	9.57	9.55	16.47	16.17	15.84	15.50	15.16	14.83	14.52	14.24	14.00
90	9.60	9.57	16.73	16.46	16.16	15.83	15.5	15.16	14.83	14.53	14.26
100	9.62	9.59	17.00	16.75	16.47	16.17	15.84	15.50	15.17	14.83	14.52
110	9.65	9.62	17.23	17.06	16.81	16.52	16.20	15.85	15.50	15.14	14.80
120	9.68	9.64	17.60	17.42	17.20	16.92	16.60	16.25	15.88	15.50	15.11
130	9.71	9.67	17.97	17.85	17.67	17.42	17.11	16.75	16.35	15.93	15.50
140	9.77	9.72	18.50	18.45	18.30	18.09	17.78	17.41	16.99	16.51	16.00
150	9.85	9.79	19.32	19.37	19.30	19.12	18.83	18.44	17.96	17.41	16.80
160	10.03	9.94	20.92	21.15	21.21	21.10	20.82	20.39	19.81	19.10	18.29

Tabella (3.2). Tabella che indica i valori di dispersione angolare al variare di θ e φ .

La dispersione angolare fin qui calcolata induce, per effetto Compton, una dispersione in energia pari a ΔE . ΔE è funzione di θ^+ e θ^- , che sono gli angoli massimi e minimi di deflessione dei fotoni rivelabili, ad ogni θ di misura. La dipendenza funzionale di ΔE è data dalla relazione Compton e si può esprimere come

$$\begin{aligned}\Delta E &= E(\theta^+) - E(\theta^-) \\ &= \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2}(1 - \cos \theta^+)} - \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2}(1 - \cos \theta^-)}\end{aligned}$$

sostituendo $E = 511$ keV, questa relazione restituisce ΔE in energia. I valori di ΔE in canali, invece, possono essere calcolati con il fattore di conversione energia-canali b e sono riportati in tabella 3.3.

Uno studio alternativo del coefficiente risoluzione-energia è riportato in appendice B par. B.2, e permette di affinare la valutazione della $FWHM_{TH}$, inserendo l'errore dovuto alla risoluzione finita del rivelatore [3].

In tabella 3.4 sono riportati:

- gli angoli di misura θ ;
- i contributi geometrici dovuti alla dispersione angolare;
- i contributi dovuti alla risoluzione finita del rivelatore (par. B.2);
- la $FWHM_{TH}$ stimata come somma in quadratura dei due contributi precedenti;
- la $FWHM_{EXP}$ ottenuta da interpolazione dei dati sperimentali.

L'accordo tra $FWHM_{TH}$ e $FWHM_{EXP}$ conferma la buona valutazione degli errori finora considerati.

$\theta(^{\circ})$	$\theta^{+}(^{\circ})$	$\theta^{-}(^{\circ})$	$\Delta\theta(^{\circ})$	ΔE (keV)	ΔE (ch)
30	36.73	23.14	13.60	46.63	129.39
40	46.26	33.97	12.29	46.00	131.56
50	55.82	44.74	11.08	44.91	118.00
60	65.64	55.42	10.22	34.87	97.67
70	76.08	65.74	10.34	31.12	87.14
80	86.37	75.42	10.95	28.44	79.62
90	96.52	85.17	11.35	24.96	69.90
100	106.53	95.01	11.52	21.14	59.32
110	116.40	104.93	11.47	17.31	48.48
120	126.14	114.95	11.19	13.68	38.32
130	135.77	125.07	10.70	10.38	29.06

Tabella (3.3). Tabella che indica i valori di ΔE in funzione di θ .

$\theta(^{\circ})$	$\Delta E(\theta)$ (ch)	$FWHM_{STAT}$ (ch)	$FWHM_{TH}$ (ch)	$FWHM_{EXP}$ (ch)
30	129.39	113.48	172.10	140.39
40	131.56	112.12	172.85	137.59
50	118.00	108.45	160.27	138.73
60	97.67	100.25	139.96	128.59
70	87.14	91.78	126.56	111.86
80	79.62	87.40	118.22	105.39
90	69.90	83.50	108.90	104.14
100	59.32	79.86	99.48	95.98
110	48.48	77.20	91.16	78.57
120	38.32	74.70	83.96	79.41
130	29.06	72.64	78.23	111.01

Tabella (3.4). Tabella in cui è riassunto il paragone tra i contributi degli errori considerati e la $FWHM$ ottenuta da fit dei dati sperimentali

CAPITOLO 4

RISULTATI SPERIMENTALI

Le calibrazioni presentate nei precedenti capitoli, hanno determinato le condizioni ottimali per le misure ed ogni volta, prima di eseguirle, sono state controllate le condizioni specificate di seguito. Per il rivelatore di *gate* è stato necessario:

- regolare il guadagno del TiSCA affinché il picco dei fotoni di *gate* sia centrato al canale 1000 (par. 2.4.1);
- regolare la finestra energetica del TiSCA affinché i fotoni di *gate* siano solamente quelli del picco a 511 keV (par. 3.4);
- regolare la larghezza dell'impulso di *gate*, tramite manopola interna del TiSCA, affinché soddisfi i criteri di coincidenza imposti dall'MCA (par. 3.2);
- tenere in considerazione la deriva temporale dell'alimentatore (par. 2.3.2), verificando che il picco rientri interamente nella finestra del TiSCA.

Per il rivelatore spettroscopico è stato necessario:

- regolare il guadagno dell'amplificatore affinché il picco dei fotoni spettroscopici sia centrato al canale 1500 (par. 2.4.1);
- conoscere il coefficiente di conversione canale-energia per l'MCA (par. 2.5);
- tenere in considerazione la deriva temporale dell'alimentatore (par. 2.3.2), grazie al picco di controllo.

Le misure effettuate hanno permesso di verificare sperimentalmente la relazione Compton e la sezione d'urto Compton.

4.1 RELAZIONE COMPTON

Come descritto nel capitolo 1, par. 1.1, la relazione Compton è descritta dalla seguente formula:

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{m_e c^2}(1 - \cos \theta)}$$

che nel caso in esame, poiché l'energia del fotone incidente E è pari alla massa a riposo dell'elettrone $m_e c^2$, assume la forma

$$\frac{E'}{511 \text{ keV}} = \frac{1}{2 - \cos \theta}. \quad (**)$$

I dati raccolti nelle varie campagne di misura sono mostrati in tab. 4.1, e sono rappresentati in fig. 4.1 e fig. 4.2.

Il grafico in fig. 4.1 rappresenta il confronto tra i dati sperimentali e l'andamento teorico secondo la relazione (**). Il grafico in fig. 4.2 rappresenta invece una verifica dell'accordo. Si può osservare, infatti, che il coefficiente angolare della retta che interpola i dati del secondo grafico, ha valore prossimo ad 1, ed il valore dell'intercetta è prossimo a 0. Questo dimostra ulteriormente la compatibilità dei dati sperimentali coi dati teorici. Il calcolo preciso degli errori è riportato in appenice A par. A.3.

Relazione Compton					
θ	θ^+	θ^-	$\frac{E'_{TH}}{E}$	$\frac{E'_{EXP}}{E}$	$\sigma(\frac{E'_{EXP}}{E})$
30	6.865	6.734	0.882	0.901	0.031
40	6.030	6.257	0.810	0.811	0.031
50	5.260	5.818	0.737	0.740	0.031
60	4.584	5.641	0.667	0.685	0.031
70	4.259	6.077	0.603	0.609	0.031
80	4.581	6.372	0.548	0.569	0.031
90	4.829	6.524	0.500	0.530	0.031
100	4.994	6.532	0.460	0.482	0.031
110	5.069	6.402	0.427	0.454	0.031
120	5.049	6.144	0.400	0.426	0.031
130	4.933	5.770	0.378	0.398	0.031

Tabella (4.1). Tabella dei valori sperimentali e teorici per la relazione Compton.

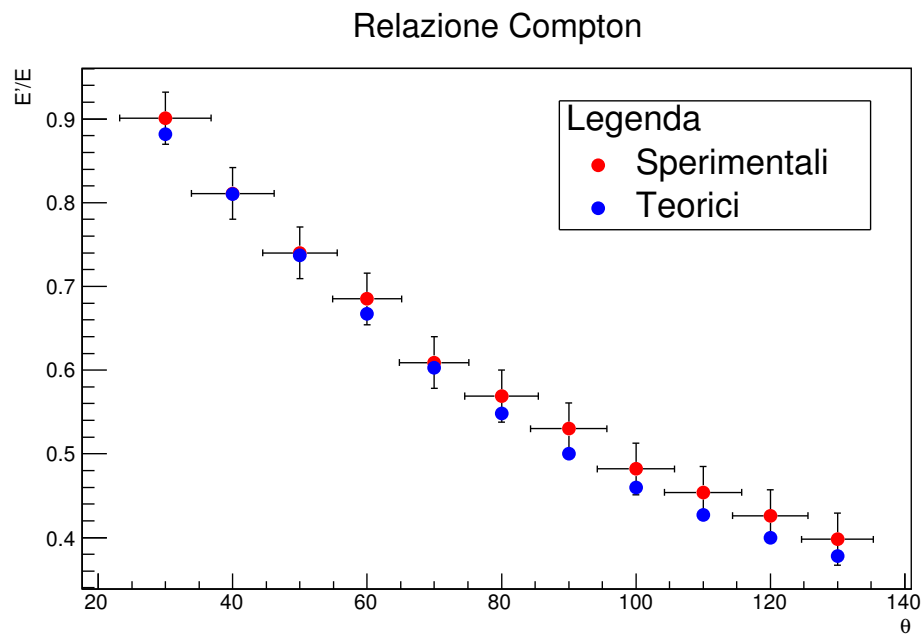


Figura (4.1). Grafico che mostra l'andamento teorico e sperimentale della relazione Compton.

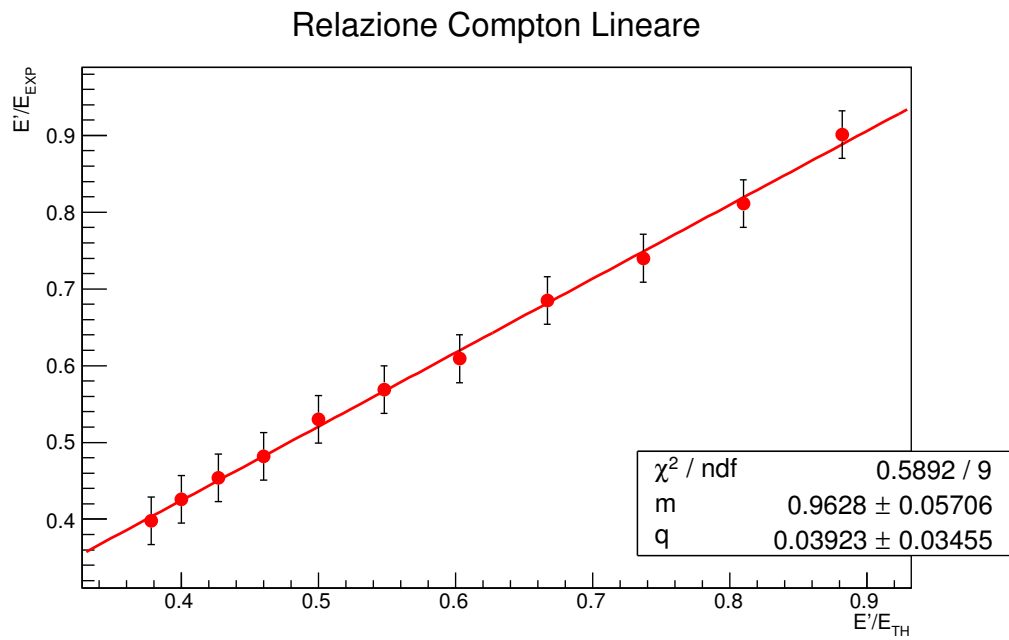


Figura (4.2). Grafico del confronto tra dati sperimentali e teorici per la relazione Compton.

4.2 SEZIONE D'URTO KLEIN-NISHINA

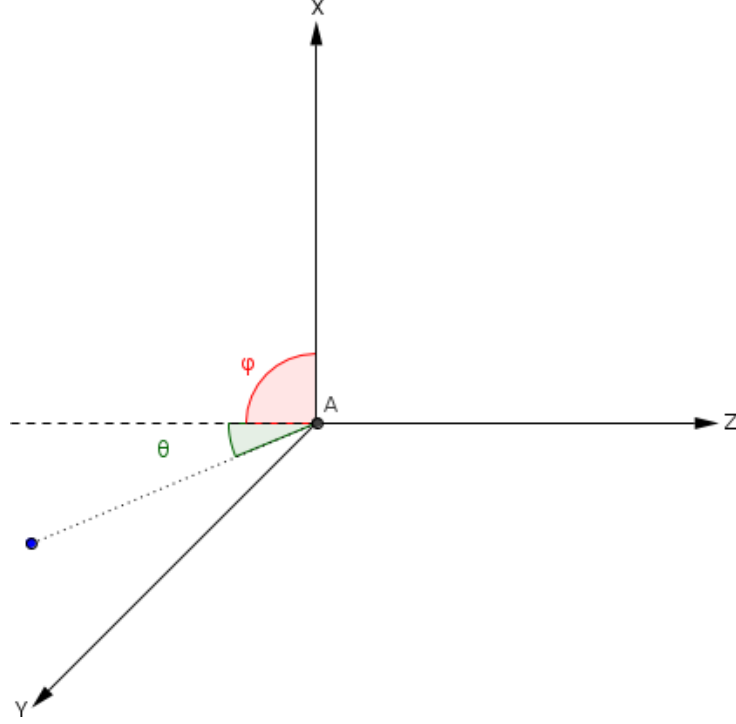


Figura (4.3). Grafico del sistema di riferimento del laboratorio.

Come descritto nel capitolo 1, paragrafo 1.1, la sezione d'urto per un processo di diffusione Compton è descritta dalla seguente formula

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right) |M_A + M_B|^2$$

dove M_A , M_B sono gli elementi di matrice relativi ai due diagrammi topologicamente indipendenti per la diffusione Compton (fig. 1.5).

Con alcuni passaggi algebrici [5] è possibile ottenere la seguente sezione d'urto per l'interazione Compton di fotoni con polarizzazione ϵ ed ϵ'

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right) + 4(\epsilon \cdot \epsilon') - 2 \right]$$

tuttavia si rende necessario, poichè la configurazione sperimentale utilizzata non seleziona la polarizzazione dei fotoni entranti, sommare su tutte le possibili polarizzazioni al fine di ottenere la sezione d'urto Klein-Nishina non

polarizzata

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left[\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right) + 2\cos^2\theta - 2 \right].$$

A questo punto è necessario integrare rispetto alle variabili angolari presenti nel sistema del laboratorio (fig. 4.3) ottenendo la sezione d'urto integrale, non polarizzata e nel sistema del laboratorio σ_C^{TH} , i cui valori sono riportati in tab. 4.2.

Per provare sperimentalmente questa relazione sono state utilizzate le aree sottese dai picchi, ottenuti in fase di verifica della relazione Compton. Per ricondurre tali aree ad una sezione d'urto, è stata riconsiderata la legge di attenuazione dei raggi γ (appendice B par. B.1)

$$I = I_0 e^{-\sigma_C^{EXP} x'}$$

dove x' è lo spessore massico attraversato. Si ottiene quindi che la frazione di fotoni, che hanno subito una variazione di intensità interagendo per effetto Compton, è pari

$$\Delta I = I_0 - I = I_0(1 - e^{-\sigma_C^{EXP} x'})$$

allora il tasso di eventi osservati dal rivelatore 2" è

$$R = \epsilon_{INT}^{(2)} \Delta I = \epsilon_{ABS}^{(2)} \Delta I$$

dove sono state introdotte le condizioni sperimentali ottenute nella calibrazione. Ora è possibile esplicitare alcune variabili per il caso in esame

$$x' = \frac{\rho N_A Z}{M} x$$

$$I_0 = 2ABr\epsilon_{INT}^{(1)} \frac{\Omega^{(1)}}{4\pi} = 2ABr\epsilon_{ABS}^{(1)}$$

dove il termine che moltiplica la x è la densità degli elettroni nel diffusore. Le quantità ρ , Z ed A sono, infatti, riferite al Piombo, mentre I_0 è l'intensità del fascio di fotoni di *gate*, acquisito dal rivelatore 1". Dalle relazioni precedenti è possibile ridefinire il tasso di eventi sotto il picco Compton come

$$R = 2ABr\epsilon_{ABS}^{(1)}\epsilon_{INT}^{(2)} \left(1 - e^{-\frac{\rho_{Pb} N_A Z x}{M} \sigma_C^{EXP}} \right)$$

con $x = \frac{t}{\sin\varphi}$ il cammino del fotone all'intero del diffusore, di spessore $t = 0.5$ cm ed orientato a $\varphi = 15^\circ$, inoltre nel caso del Piombo $Z = 82$, $\rho =$

11.34 g/cm³ e $M = 207.2$ g/mol. Da questa relazione è possibile ricavare la sezione d'urto Compton con una semplice inversione delle variabili

$$\sigma_C^{EXP} = -\frac{\sin \varphi M}{\rho_{Pb} N_A Z t} \ln \left(1 - \frac{R}{2ABr\epsilon_{ABS}^{(1)}\epsilon_{INT}^{(2)}} \right)$$

i risultati ottenuti sono riportati in tab. 4.2. Il calcolo degli errori associati a questa misura è svolto in appendice A par. A.4.

Il grafico di fig. 4.4 riporta il confronto tra dati teorici, σ_C^{TH} , e dati sperimentali, σ_C^{EXP} , per la sezione d'urto Klein-Nishina. Una verifica tramite linearizzazione si può invece osservare in fig. 4.5. Si osserva una certa discrepanza tra i dati teorici e i dati sperimentali, che può essere ricondotta ad una sovrastima nel calcolo della sezione d'urto attesa, poiché l'integrazione è stata svolta nell'approssimazione di rivelatore spettroscopico con superficie quadrata, invece che circolare. Questo comporta una sovrastima nell'andamento della sezione d'urto teorica, tuttavia si può osservare in fig. 4.6 che ha un profilo in accordo con l'andamento teorico calcolato.

θ°	σ_C^{TH}	σ_C^{EXP}	$\sigma(\sigma_C^{EXP})$
30	1.324	0.299	0.040
40	1.160	0.230	0.031
50	0.868	0.214	0.029
60	0.586	0.177	0.024
70	0.388	0.108	0.015
80	0.294	0.095	0.013
90	0.285	0.106	0.014
100	0.328	0.114	0.015
110	0.389	0.074	0.010
120	0.438	0.082	0.011
130	0.458	0.133	0.018

Tabella (4.2). Sezioni d'urto teoriche e sperimentali per la relazione Klein-Nishina, espresse in mb.

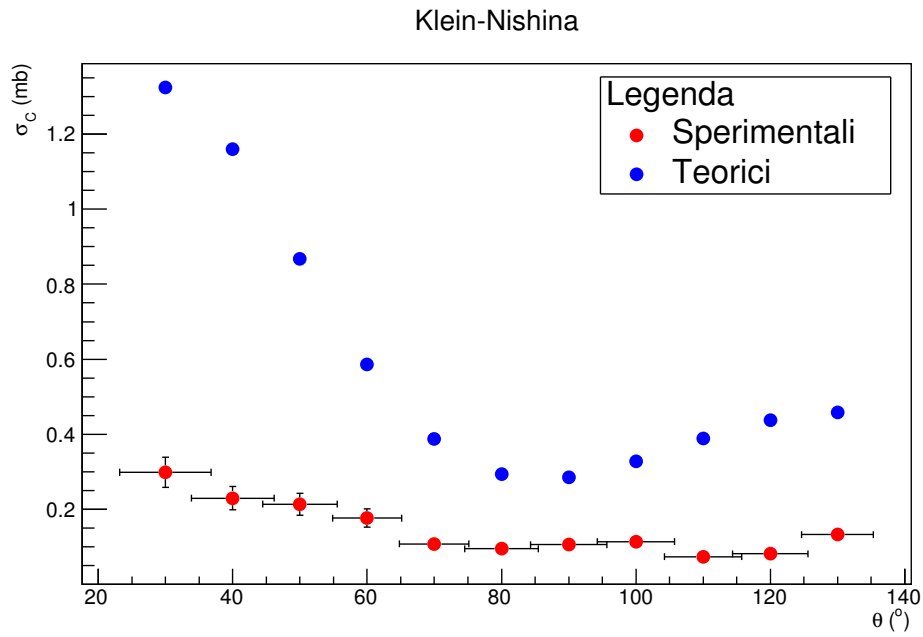


Figura (4.4). Grafico che mostra l'andamento teorico e sperimentale per la sezione d'urto Klein-Nishina.

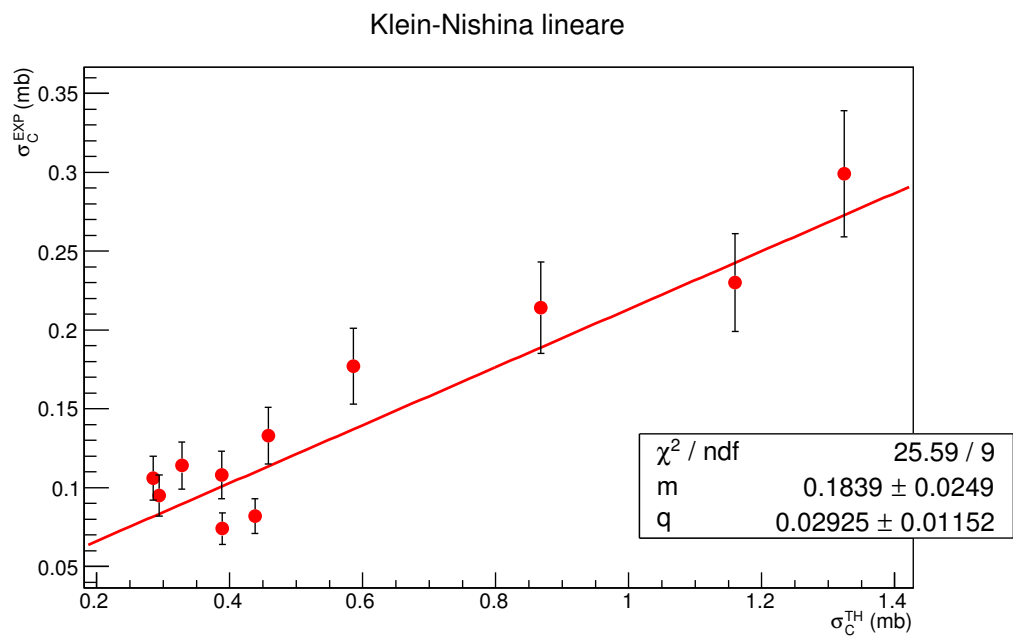


Figura (4.5). Grafico del confronto tra dati sperimentali e teorici per la sezione d'urto Klein-Nishina.

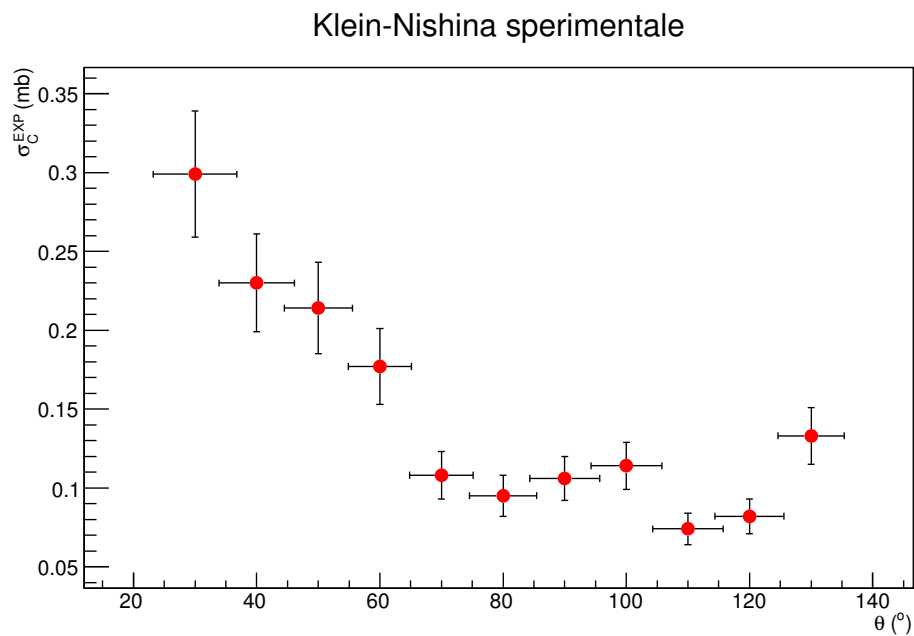


Figura (4.6). Grafico che mostra l'andamento dei dati sperimentali.

CAPITOLO 5

VERIFICA DELLA PARITÀ DEL POSITRONIO

In questo capitolo vengono presentate le misure eseguite per la seconda parte del corso. In tale ambito viene verificata la parità del positronio. Le misure sono state condotte con l'utilizzo di due scatteratori in Piombo, operanti da polarizzatori, e tramite lo studio della sezione d'urto Klein-Nishina polarizzata.

5.1 COVARIANZA DELL'EQUAZIONE DI DIRAC E PARITÀ INTRINSECA

I requisiti di covarianza dell'equazione di Dirac scritta nella forma

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m)\Psi(x) = 0$$

implicano che esista una legge che permetta all'osservatore O' di scrivere un'equazione $\Psi'(x')$ che descriva lo stesso stato fisico $\Psi(x)$ espresso in O . La $\Psi'(x')$ sarà, quindi, soluzione all'equazione di Dirac scritta nel sistema primato

$$(i\tilde{\gamma}^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m)\Psi'(x') = 0$$

dove le $\tilde{\gamma}$ soddisfano le stesse regole di anticommutazione delle matrici γ . Per assicurare l'hermitianicità dell'Hamiltoniana di Dirac, le matrici $\tilde{\gamma}^\mu$ soddisfano le relazioni $\tilde{\gamma}^{0\dagger} = \tilde{\gamma}^0$ e $\tilde{\gamma}^{i\dagger} = -\tilde{\gamma}^i$, inoltre sono legate alle γ di O tramite la trasformazione S unitaria ($S^\dagger = S^{-1}$) dalla relazione

$$\tilde{\gamma}^\mu = S^\dagger \gamma^\mu S$$

ed infine la linearità della trasformazione da Ψ a Ψ' implica che, detta Λ^μ_ν , la generica trasformazione di Lorentz, si abbia

$$\Psi'(x') = \Psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\Psi(x) = S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x').$$

Si osservi che $S(\Lambda)$ è una matrice 4x4 che opera sulle quattro componenti del bispinore Ψ e dipende sia dalle velocità relative sia dalle orientazioni spaziali relative tra O e O' . Analogamente, deve esistere $S^{-1}(\Lambda)$ tale che

$$\Psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\Psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\Psi'(\Lambda x)$$

e quindi dalla relazione precedente si ricava che $S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1})$.

Avendo determinato le proprietà di $S(\Lambda)$, l'osservatore O' , una volta resa l'equazione di Dirac espressa in O e scritta in termini di $\Psi'(x')$, avrebbe

$$(i\not{\partial} - m)S^{-1}(\Lambda)\Psi'(\Lambda x) = 0$$

e, moltiplicando a sinistra per $S(\Lambda)$, ricordando sempre che

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$$

otterrebbe

$$(iS(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m)\Psi'(x') = 0$$

che è formalmente analoga a $(i\not{\partial} - m)\Psi = 0$ se esiste una matrice S tale che

$$S^{-1}\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu. \quad (**)$$

L'esistenza di una soluzione per tale equazione garantisce la covarianza dell'equazione di Dirac e permette di ricavare la matrice S di trasformazione dei bispinori data la generica trasformazione di Lorentz. Nel caso utile alla verifica della parità del positronio, l'equazione (**) è risolvibile direttamente. Per trasformazioni di Lorentz improprie come la riflessione spaziale $\Lambda^\nu{}_\mu = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, per cui $\vec{x}' = -\vec{x}$ e $t' = t$, l'equazione (**) si scrive

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{pmatrix}$$

dove $S \equiv P$ è l'operatore di parità per un bispinore. La matrice P che soddisfa tale equazione è $P = e^{i\varphi}\gamma^0$ essendo $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$, il fattore di fase φ non è di interesse fisico e può essere limitato ai valori $\pm 1, \pm i$ se si richiede che quattro riflessioni riportino uno spinore in se stesso in analogia ad una rotazione di 4π [18]. Nel limite non relativistico, valido in quanto le velocità dei costituenti del positronio rispetto al sistema di riferimento del laboratorio

sono dell'ordine di $\alpha_{em}c$, le soluzioni dell'equazione di Dirac si scrivono nella forma

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)} &= e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \Psi^{(2)} &= e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Psi^{(3)} &= e^{+\frac{iEt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \Psi^{(4)} &= e^{+\frac{iEt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

tali soluzioni sono autostati di P , infatti, scelta la rappresentazione reale delle matrici γ , si ha che

$$\begin{aligned}P\Psi^{(1)} &= \gamma^0\Psi^{(1)} = +\Psi^{(1)} & P\Psi^{(2)} &= \gamma^0\Psi^{(2)} = +\Psi^{(2)} \\ P\Psi^{(3)} &= \gamma^0\Psi^{(3)} = -\Psi^{(3)} & P\Psi^{(4)} &= \gamma^0\Psi^{(4)} = -\Psi^{(4)}\end{aligned}$$

ossia la parità intrinseca per elettrone e positrone è opposta, $P(e^-) = +1 = -P(e^+)$, da cui si deduce che la teoria di Dirac prevede per la parità del sistema legato elettrone-positrone il valore $P(e^-e^+) = P(e^-)P(e^+) = -1$.

5.2 IL POSITRONIO

Sistemi neutri come uno stato legato di due fotoni o di e^+ ed e^- possono essere autostati dell'operatore di C di coniugazione di carica. Esso scambia operatori di creazione di particelle $b_{(s)}^\dagger(\vec{p})$ con operatori di creazione di antiparticelle $d_{(s)}^\dagger(\vec{p})$.

5.2.1 C-PARITÀ DEL POSITRONIO

Consideriamo lo stato del sistema e^+e^- nel suo centro di massa, $\vec{p}_{e^+} = \vec{p}_{e^-} = 0$. Lo stato di tripletto, in cui gli spin delle due particelle sono parallele, è definito come

$$b_{(1)}^\dagger(0)d_{(1)}^\dagger(0)|0\rangle \xrightarrow{C} d_{(1)}^\dagger(0)b_{(1)}^\dagger(0)|0\rangle = -b_{(1)}^\dagger(0)d_{(1)}^\dagger(0)|0\rangle$$

quindi $C(e^+e^- \text{ tripletto}) = -1$. Lo stato di singoletto, a spin antiparallelo, è realizzato in termini di operatori $b^\dagger$ e $d^\dagger$ tramite

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_{(1)}^\dagger(0)d_{(2)}^\dagger(0) - b_{(2)}^\dagger(0)d_{(1)}^\dagger(0) \right] |0\rangle &\xrightarrow{C} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_{(1)}^\dagger(0)d_{(2)}^\dagger(0) - b_{(2)}^\dagger(0)d_{(1)}^\dagger(0) \right] |0\rangle &\text{ quindi } C(e^+e^- \text{ singoletto}) = +1.\end{aligned}$$

5.2.2 C-PARITÀ DI UN SISTEMA DI N FOTONI

Il campo elettromagnetico A_μ è dispari sotto C-coniugazione in quanto la corrente j^μ cambia segno ma il termine di interazione $-j^\mu A_\mu$ nella lagrangiana $\mathcal{L}_{int}$ non deve cambiare segno. Il campo A^μ contiene una combinazione lineare di $a^\dagger_\epsilon(\vec{k})$ e $a_\epsilon(\vec{k})$ [19] da cui

$$a^\dagger_\epsilon(\vec{k}) \xrightarrow{C} -a^\dagger_\epsilon(\vec{k}) \quad e \quad a_\epsilon(\vec{k}) \xrightarrow{C} -a_\epsilon(\vec{k}).$$

Il generico stato di n fotoni ha C-parità $(-1)^n$, infatti

$$a^\dagger_{\epsilon_1}(\vec{k}_1)a^\dagger_{\epsilon_2}(\vec{k}_2)...a^\dagger_{\epsilon_n}(\vec{k}_n) \xrightarrow{C} (-1)^n a^\dagger_{\epsilon_1}(\vec{k}_1)a^\dagger_{\epsilon_2}(\vec{k}_2)...a^\dagger_{\epsilon_n}(\vec{k}_n).$$

Poiché l'interazione elettromagnetica è invariante sotto C-coniugazione, lo stato di tripletto del sistema e^+e^- decade in un numero dispari di fotoni, con $n = 3$ è il più probabile, mentre lo stato di singoletto decade in un numero pari di fotoni, con $n = 2$ il più probabile.

5.2.3 COMPORTAMENTO DEL SISTEMA IN ESAME SOTTO PARITÀ

La conservazione del momento impone che lo stato di singoletto decada in due fotoni prodotti *back to back* con $\vec{k}_{tot} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$ ovvero $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = 0$. Prendiamo $\vec{k}_1$ orientato nella direzione di $\hat{z}$ positivo, fig. 5.2, la condizione di gauge di Lorentz impone che $k_\mu \epsilon^\mu = 0$ ovvero che i versori di polarizzazione $\hat{\epsilon}^{\alpha,\beta}$ (con $\alpha, \beta = 1, 2$) giacciono sul piano perpendicolare alla propagazione del fotone.

I versori $\hat{k}$, $\hat{\epsilon}_1$ e $\hat{\epsilon}_2$ formano, quindi, una terna destrorsa ed in tale convenzione la relazione tra le polarizzazioni dei due fotoni emessi si scrive

$$\hat{\epsilon}_1(\vec{k}) = \hat{\epsilon}'_1(-\vec{k}) \quad e \quad \hat{\epsilon}_2(\vec{k}) = -\hat{\epsilon}'_2(-\vec{k})$$

dove il primato indica la polarizzazione del fotone propagato nella direzione negativa di $\hat{z}$.

Si possono quindi costruire due combinazioni lineari, ortogonali fra loro, di operatori di creazione e distruzione del campo A^μ che rappresentano stati a due fotoni con polarizzazione lineare parallela o perpendicolare

$$\Psi^\perp(2\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^\dagger_1(\vec{k})a^\dagger_2(-\vec{k}) + a^\dagger_2(\vec{k})a^\dagger_1(-\vec{k}) \right) |0\rangle$$

$$\Psi^\parallel(2\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^\dagger_1(\vec{k})a^\dagger_2(-\vec{k}) - a^\dagger_2(\vec{k})a^\dagger_1(-\vec{k}) \right) |0\rangle$$

dove le funzioni d'onda $\Psi^\perp$ e $\Psi^\parallel$ soddisfano la statistica richiesta da un sistema di due bosoni, ma si comportano diversamente sotto parità. Perché le equazioni di Maxwell $\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = J^\nu$ rimangano invariate sotto parità, infatti, $\vec{A}(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -\vec{A}(-\vec{x}, t)$, ed essendo A^μ lineare nello sviluppo in operatori di creazione e distruzione, deve valere

$$a^\dagger_\alpha(\vec{k}) \xrightarrow{P} (-)^\alpha a^\dagger_\alpha(-\vec{k}).$$

Da cui deriva [19]

$$P [\Psi^\perp(2\gamma)] = -\Psi^\perp(2\gamma)$$

$$P [\Psi^\parallel(2\gamma)] = \Psi^\parallel(2\gamma).$$

Dato che il sistema e^+e^- ha parità negativa, il sistema a due fotoni prodotto dal suo decadimento deve essere descritto dallo stato $\Psi^\perp(2\gamma)$ ossia due fotoni a polarizzazione relativa perpendicolare. L'obiettivo è quindi quello di osservare due fotoni prodotti *back-to-back* e utilizzare la forte dipendenza della sezione d'urto Klein-Nishina dalla polarizzazione dei fotoni prima e dopo lo *scattering* (ovvero la correlazione angolare della radiazione di annichilazione) per determinare la parità del positronio.

5.3 DALLA SEZIONE D'URTO ALL'APPARATO SPERIMENTALE

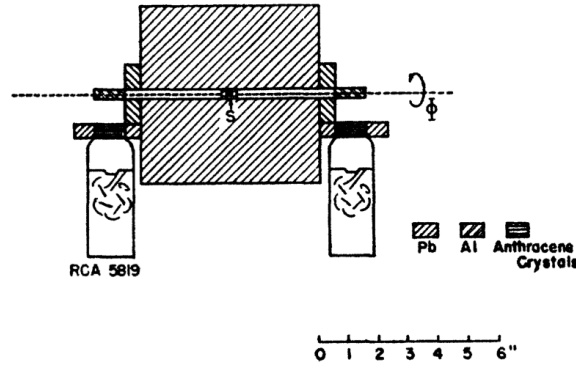


Figura (5.1). Apparato sperimentale utilizzato da Wu e Shaknov nel 1950.

Fu pubblicato nel Gennaio del 1950 da C. S. Wu e I. Shaknov [20] l'articolo che confermò sperimentalmente l'ipotesi di correlazione angolare di radiazione di annichilazione avanzata pochi anni prima da H. Snyder, S. Pasternack e J. Hornbostel [21] al *Brookhaven National Laboratory*.

L'esperimento, condotto nei *Pupin Physics Laboratories*, dell'Università della Columbia, sfruttava una sorgente di ^{64}Cu attivata tramite bombardamento di deuterio al ciclotrone della Columbia.

L'apparato sperimentale, schematizzato in fig. 5.1, fu progettato al fine di ottenere un'ottima collimazione della radiazione di annichilazione (la larghezza del fascio fu stimata di 3°) e gli scatteratori furono disegnati per limitare al minimo lo *scattering* multiplo.

Il rapporto di asimmetria, ossia il rapporto tra i due tassi di conteggio nella configurazione perpendicolare e nella configurazione coplanare [20], fu trovato in ottimo accordo con la previsione teorica [21]. Tale rapporto si calcola tramite l'utilizzo della sezione d'urto Klein-Nishina polarizzata. Si analizzi prima il caso di un fotone che interagisce Compton, la sezione d'urto di questo processo è data, in unità naturali, da

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right) + 4(\epsilon \cdot \epsilon') - 2 \right]$$

dove ω e ω' sono le frequenze angolari rispettivamente del fotone incidente e del fotone scatterato ed ϵ e ϵ' i quadri-vettori che indicano la direzione di polarizzazione in analogia notazione. La dipendenza dall'angolo formato dai vettori di polarizzazione del fotone incidente e scatterato introduce la dipendenza angolare della sezione d'urto. Specializzando l'analisi al sistema di riferimento riportato in fig. 5.2 e mediando sulle polarizzazioni iniziali si trova

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab}^{\beta=1} = \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right) + 2(\hat{\epsilon}_1 \cdot \hat{\epsilon}'_\beta) + 2(\hat{\epsilon}_2 \cdot \hat{\epsilon}'_\beta) - 2 \right].$$

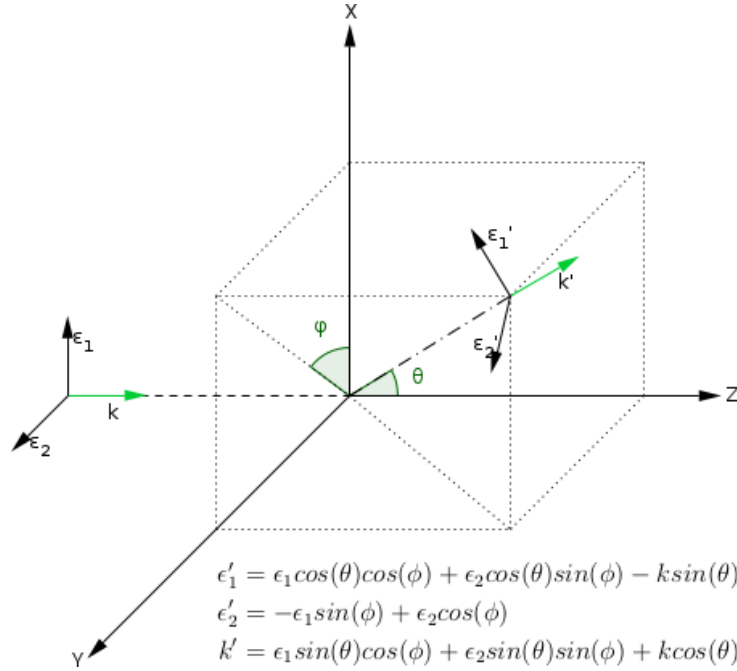


Figura (5.2). Grafico del sistema di riferimento del laboratorio.

Svolgendo i prodotti scalari nel sistema di riferimento in fig. 5.2 si ha, per la sezione d'urto di un fotone linearmente polarizzato nel piano dello *scattering* (ossia $\beta = 1$)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab}^{\beta=1} \propto \left[\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right) + 2\cos^2\theta - 2\right]$$

con θ angolo di *scattering*. Mentre un calcolo analogo porta alla sezione d'urto per un fotone linearmente polarizzato in direzione perpendicolare al piano dello *scattering* ($\beta = 2$)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab}^{\beta=2} \propto \left[\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)\right].$$

Consideriamo lo *scattering* in coincidenza di due fotoni, se il sistema è correttamente descritto dallo stato $\Psi^\perp(2\gamma)$, dopo lo *scattering* essi saranno polarizzati in qualsiasi direzione ma conserveranno la rispettiva ortogonalità [19].

Si definisce rapporto di asimmetria il rapporto tra i conteggi registrati in configurazione perpendicolare $P(\perp)$ e quelli registrati nella configurazione coplanare $P(\parallel)$. Tale rapporto è funzione dell'angolo di *scattering* θ ed è

esprimibile, se la parità del positronio vale -1, tramite la seguente relazione

$$\frac{P(\perp)}{P(\parallel)} = \frac{\left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab}^{\beta=1}\right]^2 + \left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab}^{\beta=2}\right]^2}{2\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab}^{\beta=1}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab}^{\beta=2}} = \frac{(\rho + \rho^{-1} - 2\sin^2\theta)^2 + (\rho + \rho^{-1})^2}{2(\rho + \rho^{-1} - 2\sin^2\theta)(\rho + \rho^{-1})}$$

con $\rho = 2 - \cos\theta$. Il rapporto di asimmetria ha un massimo per $\theta = 82^\circ$ e vale 2.835, tuttavia, la configurazione sperimentale disponibile (fig. 5.4) rende obbligata la scelta di $\theta = 90^\circ$, per cui tale rapporto vale 2.6 (fig. 5.3). È cruciale notare che questa è un'importante verifica del valore -1 per la parità del positronio, infatti, se avesse parità positiva, il rapporto di asimmetria varrebbe il reciproco di quello ricavato in precedenza.

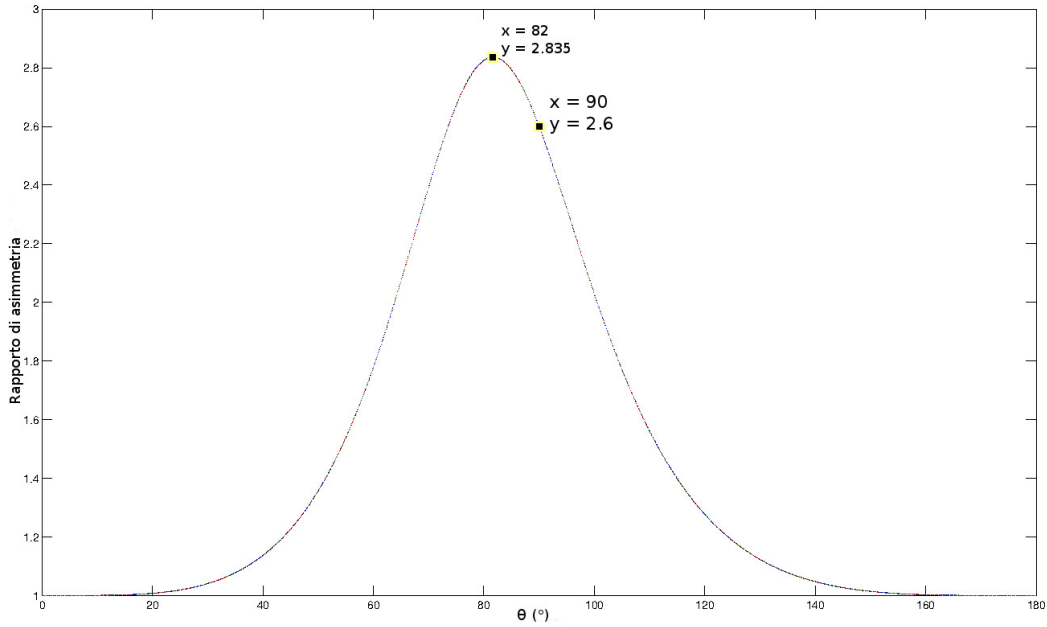


Figura (5.3). Grafico in Matlab dell'andamento del rapporto di asimmetria in funzione dell'angolo di misura.

5.4 GEOMETRIA FINITA

Per misurare sperimentalmente l'asimmetria attesa tra i conteggi ottenuti nelle due configurazioni, è necessario ampliare il calcolo della stessa al caso di estensione finita dei rivelatori a disposizione, integrando sugli angoli solidi da essi sottesi.

Nel caso di geometria finita e nell'ipotesi di rivelatori dello stesso raggio r , alla stessa distanza d dallo scatteratore e a $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla direzione dei

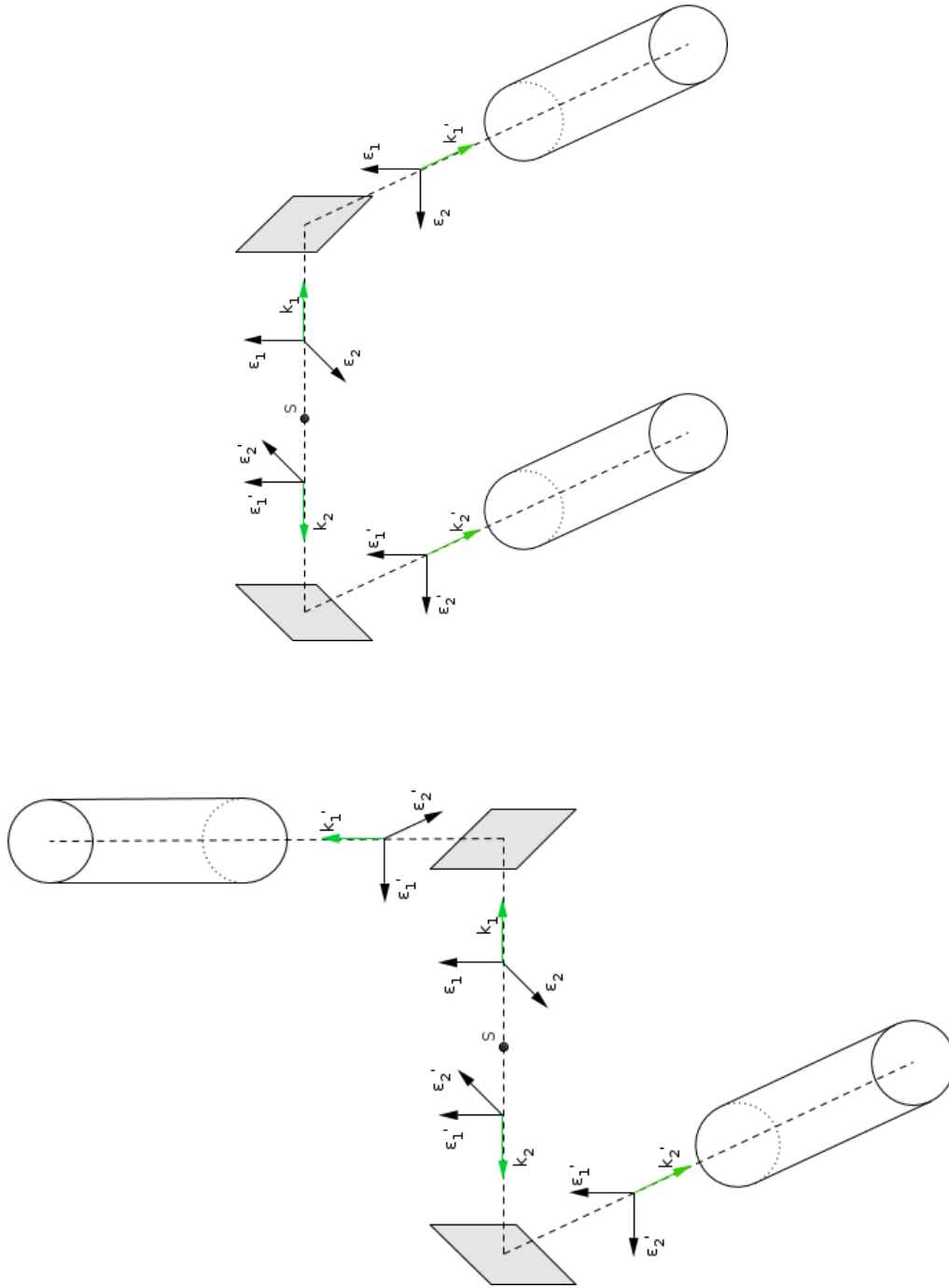


Figura (5.4). Immagini che rappresentano le configurazioni sperimentali per fotoni in coincidenza e la conservazione dell'ortogonalità tra i vettori di polarizzazione dei due fotoni.

fotoni incidenti, il rapporto di asimmetria si scrive

$$R_{\perp\parallel} = \frac{\left[\int_{\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{r}{d})}^{\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{r}{d})} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Lab}^{\beta=1} \sin\theta d\theta \right]^2 + \left[\int_{\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{r}{d})}^{\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{r}{d})} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Lab}^{\beta=2} \sin\theta d\theta \right]^2}{\left[\int_{\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{r}{d})}^{\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{r}{d})} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Lab}^{\beta=1} \sin\theta d\theta \right] \left[\int_{\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{r}{d})}^{\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{r}{d})} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Lab}^{\beta=2} \sin\theta d\theta \right]}$$

dove l'integrazione su φ dà un fattore di proporzionalità che si elide nella frazione.

La dipendenza analitica di $R_{\perp\parallel}$ da r e d si trova integrando la relazione precedente (appendice C). Il rapporto di asimmetria è massimizzato per rivelatori di piccolo raggio e posti a grandi distanze, condizione che penalizza l'efficienza. È quindi necessario trovare un ottimo che bilanci i due effetti.

Di seguito sono presentati i grafici del rapporto di asimmetria $R_{\perp\parallel}$ per r e d variabili (fig. 5.5), per r fissati a $r_1 = 1.27$ cm (fig. 5.6) e $r_2 = 2.54$ cm (fig. 5.7).

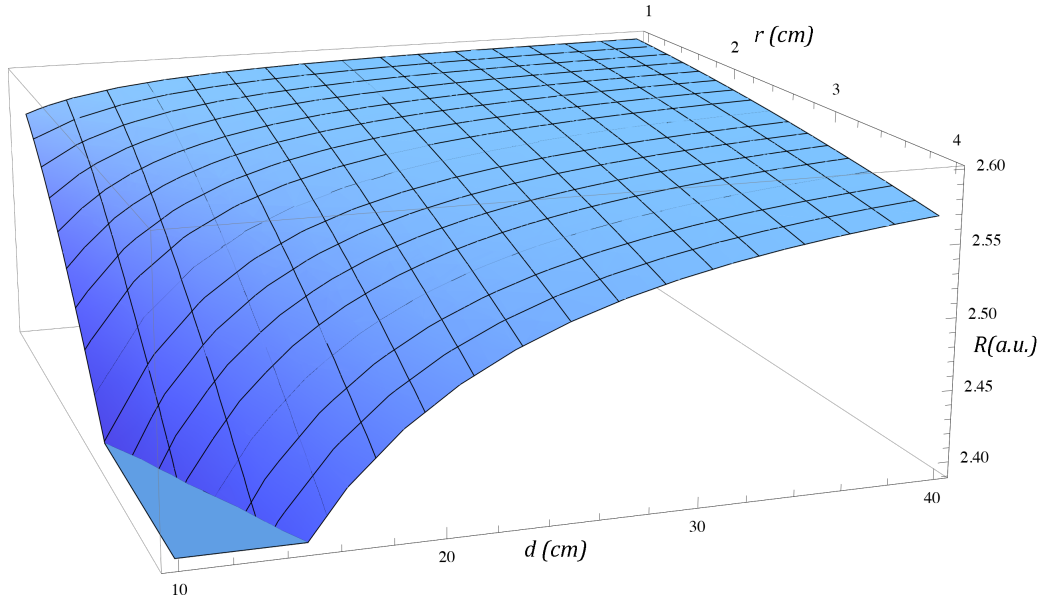


Figura (5.5). Dipendenza funzionale del rapporto di asimmetria dalla distanza d dallo scatteratore e dal raggio r dei due rivelatori.

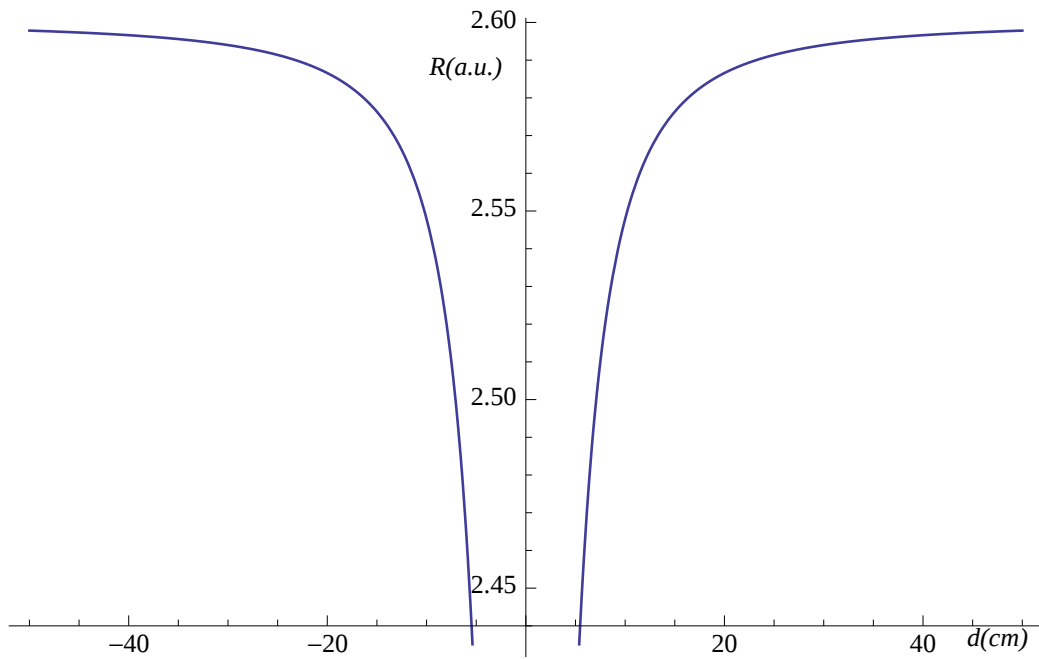


Figura (5.6). Dipendenza del rapporto tra i conteggi registrati nelle due configurazioni per due rivelatori da 1", a distanza d dagli scatteratori.

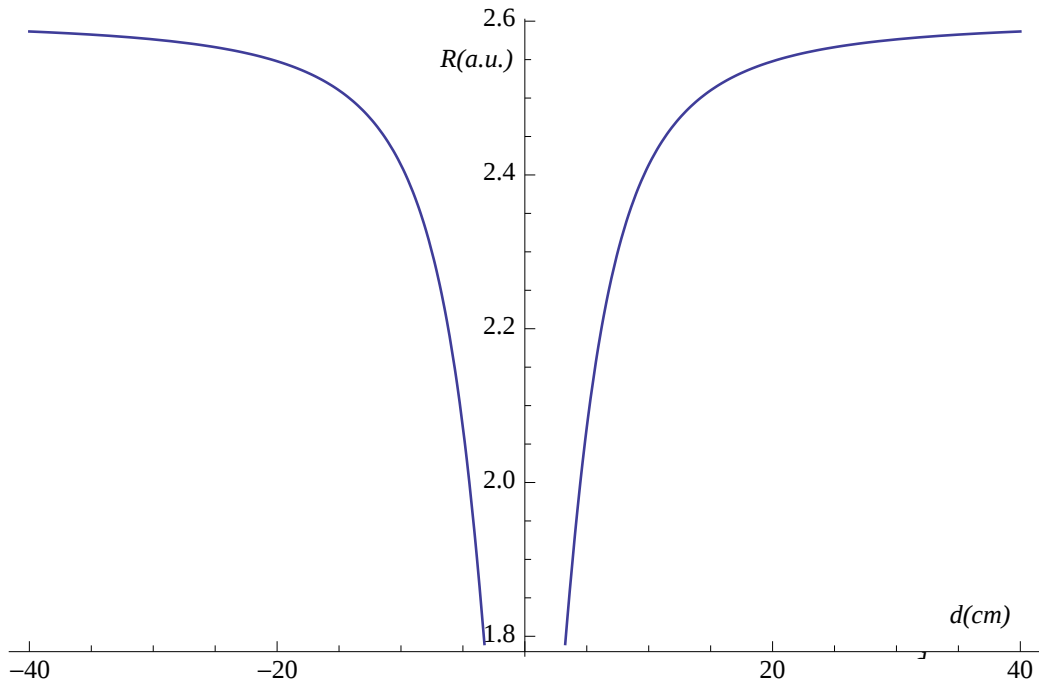


Figura (5.7). Dipendenza del rapporto tra i conteggi registrati nelle due configurazioni da due rivelatori da 2" a distanza d dagli scatteratori.

I rivelatori a disposizione hanno raggi diversi e sono stati posti alle distanze che ne ottimizzano l'efficienza. La stima di $R_{\perp\parallel}$ per r e d diversi è stata ricavata numericamente e vale $R_{\perp\parallel}=2.57633$. I codici di integrazione numerica sono riportati in appendice C.

5.5 STUDIO DELL'MDA

Nel caso in cui il fondo fosse molto maggiore del segnale, è possibile applicare modelli statistici che pongano dei limiti di rilevabilità sul segnale in esame. Il picco atteso dallo studio della parità del positronio in entrambe le configurazioni, è molto inferiore rispetto al fondo, avendo energia di 256 keV ed essendo nella regione di continuo Compton. Il calcolo del *Minimum Detectable Amount* è un metodo per stimare il numero minimo di eventi da sorgente necessari per garantire un tasso di falsi negativi non superiore al 5% in un rivelatore che opera sotto ad un livello critico L_C , che garantisce un tasso di falsi positivi inferiore al 5%.

Definendo N_S il numero di eventi da sorgente, N_B il numero di eventi di fondo, N_T il numero totale di eventi ed N_D il numero minimo di conteggi, è possibile, avendo una statistica sufficiente ($N_T, N_S > 30$), ricavare il MDA come segue.

In generale si ha che

$$N_S = N_T - N_B$$

e, quindi, per il modello statistico considerato

$$\sigma_S^2 = \sigma_T^2 + \sigma_B^2.$$

Nel caso di non contaminazione da parte della sorgente $\langle N_T \rangle = \langle N_B \rangle$ e $\langle N_S \rangle = 0$, da cui

$$\sigma_T = \sigma_B = \sqrt{N_B}$$

e

$$\sigma_S = \sqrt{2N_B}$$

allora si ottiene

$$L_C = 1.645\sigma_S = 2.326\sigma_B$$

e se $N_D = L_C$ è possibile concludere che i falsi positivi sono meno del 5%.

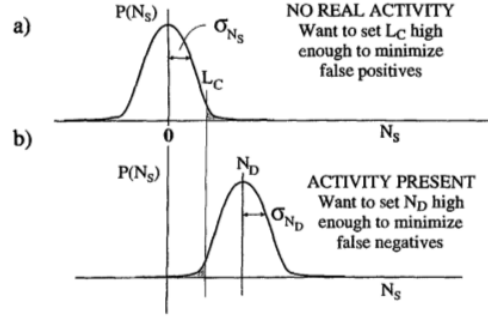


Figura (5.8). Distribuzioni statistiche nei diversi casi, senza reale contaminazione e con reale contaminazione.

Nel caso di reale contaminazione, invece, questo livello critico garantirebbe il 50% di falsi negativi (fig. 5.8) quindi

$$\begin{aligned}
 \sigma_D &= \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_T^2} \\
 &= \sqrt{N_B + N_T} = \sqrt{N_B + N_B + N_D} \\
 &= \sqrt{2N_B + N_D} \approx \sqrt{2N_B} \quad (N_B \gg N_S)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 L_C &= 1.645\sigma_S \\
 &= 1.645\sqrt{2N_B}
 \end{aligned}$$

che sostituendo nell'espressione precedente, danno

$$\begin{aligned}
 N_D &= L_C + 1.645\sigma_D \\
 &= 1.645(\sqrt{2N_B} + \sqrt{N_D + 2N_B}) \\
 &= 4.653\sqrt{N_B} + 2.706
 \end{aligned}$$

questa è l'equazione di Currie per il numero minimo di conteggi. A questo punto è possibile esplicitare il MDA secondo la definizione di Currie come

$$\alpha = \frac{N_D}{f\epsilon t}$$

dove f è il *radiation yield per disintegration*, ϵ l'efficienza dell'apparato sperimentale e t il tempo di misura.

Nell'esperimento in esame l'apparato è strutturato per misure in coincidenza quindi

$$\epsilon = \epsilon_{INT}^{(2)} \epsilon_{INT}^{(1)} \frac{\Omega_1}{4\pi}$$

poichè l'apparato è vincolato geometricamente dal rivelatore 1", essendo quello di *gate*, mentre una volta aperto il *gate* dell'MCA il rivelatore spettroscopico non ha vincoli geometrici. Il tempo di misura è invece $t = 1101600$ s e il *radiation yield per disintegration* è pari al *rate* di fotoni emessi all'energia d'interesse (511 keV) quindi è pari a $f = 2Br = 1.7968$.

Dall'ultima misura eseguita si stima un'area di fondo pari a $N_B = 3850$ (fig. 5.10) e quindi un MDA pari a

$$\alpha = 2.83 \text{ Bq.}$$

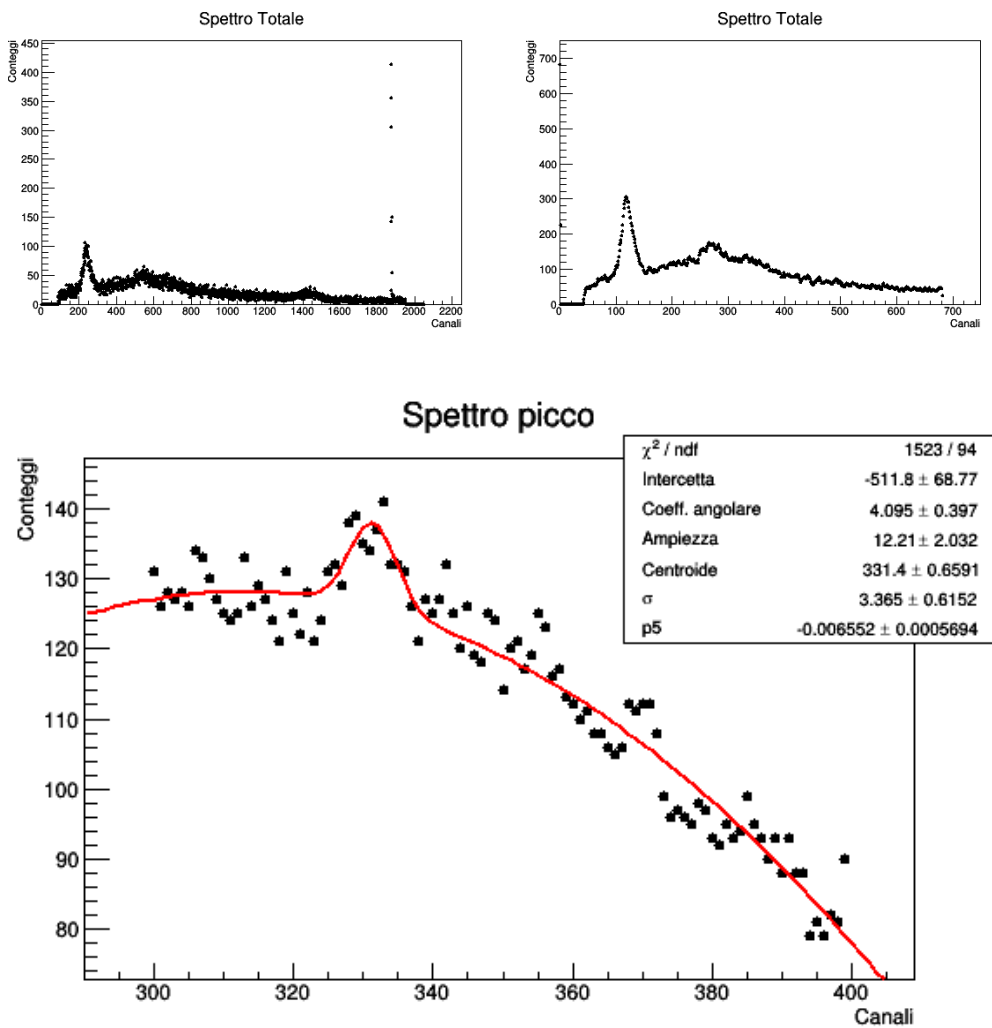


Figura (5.10). Grafici che mostrano lo spettro totale di partenza, lo spettro ottenuto dopo aver effettuato il *binning* e lo *smoothing* e l'interpolazione del picco d'interesse con fondo parabolico.

Sono state inoltre effettuate due misure per le coincidenze casuali (fig. 5.11), seguendo il metodo descritto nel par. 3.4.1. Anche in questo caso, non si notano conteggi eccessivi.

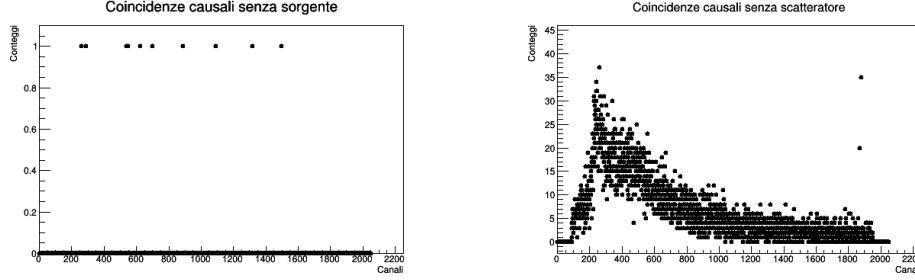


Figura (5.11). Studio delle coincidenze casuali nel caso del positronio.

5.6 CONCLUSIONI

La stima dell'MDA è stata ottenuta con uno spettro parziale, in quanto il picco atteso non risulta chiaramente visibile. Si nota infatti che il picco di misura è poco risolto rispetto al picco di *backscattering*, facilmente individuabile grazie alla relazione

$$\begin{aligned} h\nu'(\theta = \pi) &= \frac{h\nu}{1 + 2\frac{h\nu}{m_e c^2}} \\ &= 170.3 \text{ keV} \\ &= 477.52 \text{ ch.} \end{aligned}$$

I problemi avuti con questa misura sono dovuti anche ad alcune caratteristiche dell'apparato, che possono essere migliorate con le seguenti tecniche [20]:

- uso di strutture di Piombo per collimare il più possibile l'emissione *back-to-back* dalla sorgente;
- usare un diffusore in Alluminio poiché presenta sezione d'urto Compton ($\sigma_C = 0.06787 \text{ g/cm}^2$) maggiore rispetto a quella del Piombo ($\sigma_C = 0.06734 \text{ g/cm}^2$) per fotoni incidenti di 511 keV [6];
- posizionare i rivelatori per avere angoli di diffusione pari a 82° e a distanze opportune, in modo da massimizzare il rapporto di asimmetria;
- utilizzare rivelatori con la stessa superficie attiva per massimizzare il numero di eventi, tenendo conto della dipendenza del rapporto di asimmetria dai diversi angoli solidi sottesi dai rivelatori (fig. 5.5);

- usare una struttura che permetta di ruotare agevolmente i rivelatori, in modo da aumentare le possibili configurazioni, migliorare la sensibilità sulle misure angolari e garantire una migliore collinearità degli elementi;
- utilizzare rivelatori più prestanti in risoluzione.

Vi è anche una possibile ottimizzazione dei conteggi raggiungibile nel caso in cui il tempo di misura del fondo senza la sorgente è pari al tempo della misura stessa: $T_{S+B} = T_B$ nel caso di $N_B \gg N_S$ [3].

APPENDICE A

CALCOLO DEGLI ERRORI

A.1 RISOLUZIONE

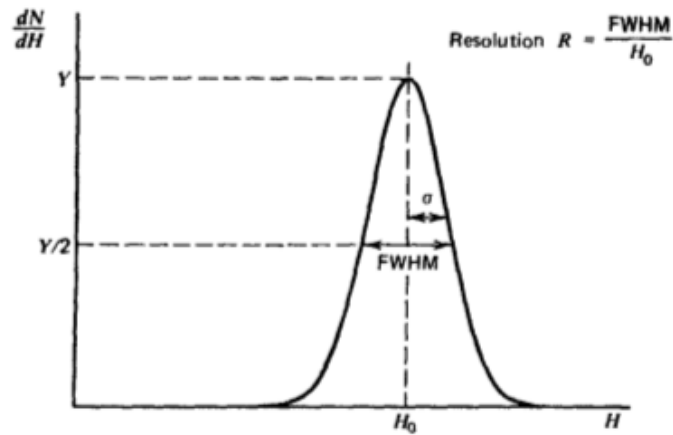


Figura (A.1). Immagine esplicativa della differenza tra $FWHM$ e σ .

La risoluzione è definita, per uno spettro a picchi, come

$$R = \frac{FWHM}{E} = \frac{2.35\sigma}{E}$$

dove $FWHM$ è la larghezza a mezza altezza ed E l'energia della centroide del picco in esame, mentre σ la deviazione standard della gaussiana, fig. A.1, usata nell'interpolazione del picco [3].

L'errore associato alla risoluzione σ_R è calcolato, per propagazione degli errori, come

$$\begin{aligned}
\sigma_R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial \sigma}\right)^2 \sigma_\sigma^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial E}\right)^2 \sigma_E^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{2.35}{E}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left(-\frac{2.35\sigma}{E^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{2.35\sigma}{E\sqrt{N}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{E^2}\right)} \\
&= \frac{R}{\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{1}{E^2}}
\end{aligned}$$

dove sono state introdotte le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}
\sigma_\sigma &= \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
\sigma_E &= \frac{1}{\sqrt{N}}
\end{aligned}$$

con N conteggi sotto il picco in esame [3].

A.2 EFFICIENZA

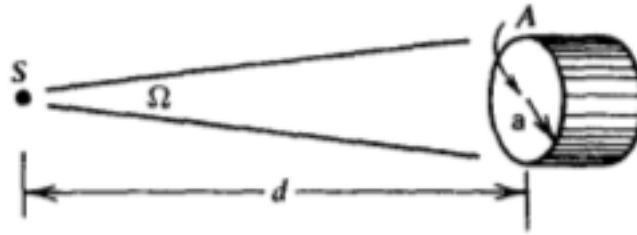


Figura (A.2). Schema dell'angolo sotteso dalla sorgente, nell'ipotesi di sorgente puntiforme e rivelatore cilindrico.

L'efficienza assoluta di un rivelatore è defina come

$$\epsilon_{ABS} = \frac{\text{numero di eventi registrati}}{\text{numero di quanti emessi}}$$

avendo calcolato l'attività della sorgente A e conoscendo il suo *branching ratio* Br è possibile riscrivere l'efficienza assoluta come

$$\epsilon_{ABS} = \frac{N}{2ABr\Delta t}$$

dove

$N = \text{numero di eventi registrati}$

$2ABr\Delta t = \text{numero di quanti emessi}$

e Δt è il tempo di misura. Il fattore 2 è necessario in quanto il *branching ratio* si riferisce al decadimento β^+ , par. 2.1, ma vengono rivelati i fotoni. L'efficienza assoluta è affetta da una forte dipendenza dalla geometria dell'esperimento quindi si definisce l'efficienza intrinseca di un rivelatore come

$$\epsilon_{INT} = \frac{\epsilon_{ABS}}{G}$$

ove $G = \frac{4\pi}{\Omega}$ è il fattore geometrico dipendente dall'angolo solido Ω sotteso dalla sorgente. L'angolo solido può essere stimato per una configurazione con rivelatore cilindrico e sorgente puntiforme (fig. A.2) come segue

$$\Omega = \int \frac{\cos \alpha}{d^2} ds = 2\pi \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)$$

che nell'approssimazione di $d \gg a$ diventa

$$\Omega = \pi \frac{a^2}{d^2}.$$

Nell'esperimento in esame, tuttavia, non è stata introdotta questa approssimazione per maggior generalità ed accuratezza.

Con le relazioni appena calcolate è possibile riscrivere l'efficienza lineare secondo l'espressione

$$\epsilon_{INT} = \frac{N}{ABr\Delta t} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)^{-1}$$

e questa relazione può essere linearizzata, per meglio estrapolare l'efficienza lineare dai dati, come segue

$$\underbrace{\frac{N}{\Delta t}}_y = \underbrace{\epsilon_{INT}}_m \underbrace{ABr \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)}_x.$$

Gli errori associati a ciascuna delle ridefinizioni di efficienza sono stati calcolati per propagazione degli errori e sono rispettivamente

$$\begin{aligned}
\sigma_{ABS} &= \frac{\partial \epsilon_{ABS}}{\partial N} \sigma_N \\
&= \frac{\sigma_N}{2ABr\Delta t} \\
&= \frac{1}{2ABr\Delta t} \frac{FWHM_{fit}}{\sqrt{N}} \\
\sigma_{INT} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \epsilon_{INT}}{\partial N}\right)^2 \sigma_N^2 + \left(\frac{\partial \epsilon_{INT}}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2} \\
&= \frac{1}{2ABr\Delta t} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}}\right)^{-1} \sqrt{\sigma_N^2 + \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}}\right)^{-2} \frac{(a^2 - d^2)^2}{(a^2 + d^2)^3} \sigma_d^2} \\
\sigma_x &= \frac{\partial x}{\partial d} \sigma_d \\
&= ABr \frac{a^2 - d^2}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \sigma_d
\end{aligned}$$

dove è stata utilizzata l'uguaglianza

$$\sigma_N = \frac{FWHM_{fit}}{\sqrt{N}}$$

con $FWHM_{fit}$ larghezza mezza altezza da interpolazione gaussiana del picco [3].

A.3 RELAZIONE COMPTON

Per la relazione Compton i dati sono stati ottenuti da interpolazione dei picchi, da cui si è ricavato

$$E'_{EXP} = \frac{C}{b}$$

dove C è la centroide del picco espressa in canali e b è il fattore di conversione energia-canali. Con l'espressione precedente è stato calcolato un errore sulla relazione Compton pari a

$$\frac{E'_{EXP}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

pari a

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\frac{E'_{EXP}}{E}\right) &= \sigma\left(\frac{E'_{EXP}}{511 \text{ keV}}\right) \\
&= \frac{\sigma(E'_{EXP})}{511 \text{ keV}}
\end{aligned}$$

dove $\sigma(E'_{EXP})$ è esprimibile come

$$\begin{aligned}\sigma(E'_{EXP}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial E'_{EXP}}{\partial C}\right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{\partial E'_{EXP}}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{C}{b^2}\right)^2 \sigma_b^2}\end{aligned}$$

da cui si conclude che

$$\sigma\left(\frac{E'_{EXP}}{E}\right) = \frac{1}{511 \text{ keV}} \sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{C}{b^2}\right)^2 \sigma_b^2}$$

a questo valore è stato sommato in quadratura un errore sistematico pari al 3%. L'origine di questo errore sistematico è da ricercare nell'incertezza sugli angoli relativi tra i vari strumenti e di posizionamento del diffusore. Contribuiscono inoltre, in minima parte, l'ipotesi di considerare costante nel tempo l'attività della sorgente, la non perfetta schermatura delle possibili coincidenze casuali dovute alla geometria dell'apparato e le funzioni dei interpolazioni usate per analizzare gli spettri e per ricavare il coefficiente b (appendice C).

A.4 SEZIONE D'URTO KLEIN-NISHINA

Nel calcolo dell'errore relativo ai dati sulla sezione d'urto Klein-Nishina, si è tenuto conto delle incertezze dovute a tasso di conteggio R , alle efficienze dei rivelatori $\epsilon_{ABS}^{(1)}$ e $\epsilon_{INT}^{(2)}$, allo spessore del diffusore t e al suo angolo di orientazione ψ .

I calcoli sono riportati in seguito

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_C^{EXP}}{\partial R} \sigma(R) &= \frac{\sin \psi M}{t \rho_{Pb} N_A Z} \frac{1}{2 \epsilon_{ABS}^{(1)} \epsilon_{INT}^{(2)} - R} \left(\frac{\sigma_N}{\Delta t} \right) \\ \frac{\partial \sigma_C^{EXP}}{\partial \epsilon_{ABS}^{(1)}} \sigma(\epsilon_{ABS}^{(1)}) &= - \frac{\sin \psi M}{t \rho_{Pb} N_A Z} \frac{1}{2 \epsilon_{ABS}^{(1)} \epsilon_{INT}^{(2)} - R} \frac{1}{\epsilon_{ABS}^{(1)}} (1.05 \cdot 10^{-6}) \\ \frac{\partial \sigma_C^{EXP}}{\partial \epsilon_{INT}^{(2)}} \sigma(\epsilon_{INT}^{(2)}) &= - \frac{\sin \psi M}{t \rho_{Pb} N_A Z} \frac{1}{2 \epsilon_{ABS}^{(1)} \epsilon_{INT}^{(2)} - R} \frac{1}{\epsilon_{INT}^{(2)}} (0.0012) \\ \frac{\partial \sigma_C^{EXP}}{\partial t} \sigma(t) &= - \frac{\sigma_C^{EXP}}{t} (0.02 \text{ cm}) \\ \frac{\partial \sigma_C^{EXP}}{\partial \psi} \sigma(\psi) &= \frac{\sigma_C^{EXP}}{\tan \psi} (2^\circ \cdot 3.14 / 180^\circ)\end{aligned}$$

ed i termini sono sommati in quadratura per ottenere l'errore totale. Anche in questo in caso, come riportato nel paragrafo precedente, è stato considerato un errore sistematico pari al 3%.

APPENDICE B

ARGOMENTI COMPLEMENTARI

B.1 STIMA DELLA PRONFONDITÀ DI ATTENUAZIONE

La legge di attenuazione di un fascio di fotoni per un esperimento di trasmissione è

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

dove I è l'intensità del fascio trasmesso dallo scatteratore, I_0 l'intensità del fascio senza scatteratore, μ il coefficiente di attenuazione lineare del fascio ed x lo spessore dello scatteratore. Il coefficiente di attenuazione lineare è dato da

$$\mu = \tau + \sigma + \kappa$$

dove gli addendi sono rispettivamente le sezioni d'urto per effetto fotoelettrico, diffusione Compton e produzione di coppie.

È possibile definire il coefficiente di attenuazione massico come

$$\mu' = \frac{\mu}{\rho}$$

che risulta meno legato alla variazione di densità dello scatteratore rispetto al coefficiente di attenuazione lineare. In termini di μ' la legge di attenuazione dell'intensità del fascio assume la forma

$$I = I_0 e^{-\mu' t}$$

dove $t = \rho x$ è lo spessore massico.

Nel caso del Piombo: $\mu' = 0.1613 \text{ g/cm}^2$, $\sigma = 0.06734 \text{ g/cm}^2$, $\rho = 11.34 \text{ g/cm}^3$ [6]. La profondità di decimazione del fascio é quindi:

$$\begin{aligned}\frac{I}{I_0} &= \frac{1}{10} = e^{-\mu\rho x} \\ \ln \frac{1}{10} &= -\mu'\rho x \\ x &= \frac{\ln 10}{\mu'\rho}\end{aligned}$$

che sostituendo i valori fornisce una profondità di attenuazione pari a 1.26 cm o pari a 3.02 cm in caso di sola interazione Compton ($\mu' = \sigma$).

B.2 STUDIO DEL COEFFICIENTE RISOLUZIONE - ENERGIA

L'andamento della risoluzione del rivelatore 2" in funzione dell'energia al picco è esprimibile con la nota relazione

$$R = \frac{FWHM}{E_{picco}}$$

ma anche come

$$R = \frac{k}{\sqrt{E_{picco}}}$$

dove k è una costante [3]. L'uguaglianza tra le due relazioni precedenti, noto k, permette di esprimere la FWHM del rivelatore 2" in funzione della $\sqrt{E_{picco}}$ come:

$$FWHM = k\sqrt{E_{picco}}.$$

Il valore di k è ricavato tramite interpolazione lineare, utilizzando l'espressione

$$\underbrace{\ln(R)}_y = \underbrace{-\frac{1}{2}}_m \underbrace{\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}_x + \underbrace{\ln\left(\frac{k}{\sqrt{E_0}}\right)}_q$$

dove è stata introdotta una scala $E_0 = 511 \text{ keV}$ per rendere adimensionato l'argomento del logaritmo di $\ln E$.

Utilizzando una prima calibrazione del rivelatore spettroscopico con diverse sorgenti (^{57}Co , ^{22}Na e ^{228}Th), si ricava il valore di k dall'interpolazione mostrata in fig. B.1.

Il contributo di ΔE , sommato in quadratura alla $FWHM$ ottenuta dall'interpolazione in fig. B.1, permette di stimare la $FWHM_{STAT}$ del picco Compton atteso ai diversi θ .

L'errore su $\ln R$ è stato calcolato come

$$\sigma_{\ln R} = \sqrt{\frac{\sigma_{\sigma}^2}{\sigma} - \frac{\sigma_{E_0}^2}{E_0}}.$$

Da questo studio si ricava il valore $k = 1.86713 \text{ keV}^{-1/2}$. Non è stato possibile procedere all'analisi della relazione canonica [3]

$$R = \frac{\sqrt{\alpha + \beta E}}{E}$$

poiché non era sufficiente il numero di sorgenti a disposizione per un'interpolazione quadratica adeguata.

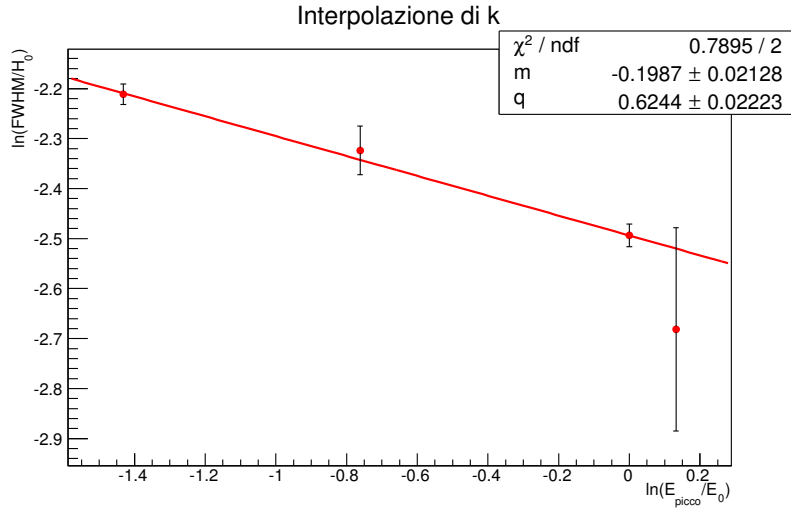


Figura (B.1). Interpolazione del valore di k.

APPENDICE C

SCRIPT E PROGRAMMI

Per maggior completezza, sono di seguito riportate le parti principali dei codici usati per acquisire ed analizzare i dati.

C.1 JOB PER MAESTRO

```
SET_DETECTOR 1
SET_PRESET_CLEAR
SET_PRESET_LIVE 21600
LOOP 20
CLEAR
START
WAIT
SAVE "C:\Documents and Settings\1\Desktop\
    Gruppo GDJ\Compton 70 deg\70deg_???.Spe"
WAIT 1
END_LOOP
```

C.2 PROGRAMMI ROOT PER L'ANALISI DEGLI SPETTRI

```
for (int a = 0; a <= numero_punti_bin; a++)
{
    y_bin[a] = y[2*a] + y[2*a+1];
    x_bin[a] = x[a];
}

y_smooth[0] = y_bin[0];
y_smooth[numero_punti_bin-1] = y_b[numero_punti_bin-1];
y_smooth[1] = y_b[1];
y_smooth[numero_punti_bin-2] = y_b[numero_punti_bin-2];
```

```

for (int d = 2; d <= numero_punti_bin - 2; d++)
{
    y_smooth[d] = (y_bin[d-2] + y_bin[d-1]
        + y_bin[d] + y_bin[d+1] + y_bin[d+2])/3;
}

```

```

TF1* fit1 = new TF1 ("fit1", "[0]+x*[1] +
    [2]*exp(-0.5*(([3]-x)/[4])^2) +
    [5]*x^2", x_min, x_max);
fit1->SetParName(0, "Intercetta");
fit1->SetParName(1, "Coeff. angolare");
fit1->SetParName(2, "Ampiezza");
fit1->SetParName(3, "Centroide");
fit1->SetParName(4, "#sigma");
double q = y[x_min];
double m = (y[x_min]-y[x_max])/(x_min-x_max);

```

C.3 SCRIPT DI MATHEMATICA PER IL CALCOLO DI σ_C^{TH} E PER $R_{\perp}$

Per il calcolo della sezione d'urto Klein-Nishina:

```
const = (137.0359991)^(-2) * (0.51099893)^-2 * (197.326972)^2 * 10^(-30)
```

```
7.940787620845668*^-30
```

$r = 2.54$

2.54

$d = 30$

30

$\theta_m = \text{Pi}/6$

$\frac{\pi}{6}$

$$\text{const} * 2 \text{ArcTan}[r/d] *$$

$$\text{NIntegrate}[(2 - \text{Cos}[x])^(-2) * (2 - \text{Cos}[x] + (2 - \text{Cos}[x])^ - 1 - 2(\text{Sin}[x])^ (2)) *$$

$$\text{Sin}[x], \{x, \theta_m - \text{ArcTan}[r/d], \theta_m + \text{ArcTan}[r/d]\}$$

$$1.32425209475748^{*^{\wedge}}-31$$

Per l'integrazione del rapporto di asimmetria:

$$\theta$$

$$\theta$$

$$\rho = 2 - \text{Cos}[\theta]$$

$$2 - \text{Cos}[\theta]$$

$$\beta_1 = (\rho + \rho^{\wedge} - 1 - 2(\text{Sin}[\theta])^2)\text{Sin}[\theta]$$

$$\text{Sin}[\theta] \left(2 + \frac{1}{2 - \text{Cos}[\theta]} - \text{Cos}[\theta] - 2\text{Sin}[\theta]^2 \right)$$

$$\beta_2 = (\rho + \rho^{\wedge} - 1)\text{Sin}[\theta]$$

$$\left(2 + \frac{1}{2 - \text{Cos}[\theta]} - \text{Cos}[\theta] \right) \text{Sin}[\theta]$$

$$r$$

$$r$$

$$d$$

d

$$a = \text{ArcTan}[r/d]$$

$$\text{ArcTan}\left[\frac{r}{d}\right]$$

$$n = \text{Integrate}[\beta_1, \{\theta, \text{Pi}/2 - a, \text{Pi}/2 + a\}]$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{4dr^3\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2+r^2)^2} + 2\text{ArcCoth}\left[\frac{2d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{r}\right], -2 \leq \text{Re}\left[\frac{r}{d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}\right] \leq 2\right]$$

$$m = \text{Integrate}[\beta_2, \{\theta, \text{Pi}/2 - a, \text{Pi}/2 + a\}]$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{4r}{d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth}\left[\frac{2d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{r}\right], -2 \leq \text{Re}\left[\frac{r}{d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}\right] \leq 2\right]$$

$$z = (n * n + m * m)/(2 * n * m)$$

$$\begin{aligned} & \text{ConditionalExpression}\left[\frac{\left(\frac{4r}{d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth}\left[\frac{2d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{r}\right]\right)^2 + \left(\frac{4dr^3\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2+r^2)^2} + 2\text{ArcCoth}\left[\frac{2d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{r}\right]\right)^2}{2\left(\frac{4r}{d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth}\left[\frac{2d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{r}\right]\right)\left(\frac{4dr^3\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2+r^2)^2} + 2\text{ArcCoth}\left[\frac{2d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}{r}\right]\right)}, \right. \\ & \left. -2 \leq \text{Re}\left[\frac{r}{d\sqrt{1+\frac{r^2}{d^2}}}\right] \leq 2\right] \end{aligned}$$

$$r = 1.27$$

$$1.27$$

$$\begin{aligned} & \text{Plot}\left[\left(\left(\frac{5.08}{\sqrt{1+\frac{1.6129}{d^2}}d} + 2\text{ArcCoth}\left[1.5748\sqrt{1+\frac{1.6129}{d^2}}d\right]\right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{2.73118\sqrt{1+\frac{1.6129}{d^2}}d}{(1.6129+d^2)^2} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\text{ArcCoth} \left[\left(\left(1.5748 \sqrt{1 + \frac{1.6129}{d^2}} d \right)^2 \right) / \right. \\
& \left(2 \left(\frac{5.08}{\sqrt{1 + \frac{1.6129}{d^2}} d} + 2\text{ArcCoth} \left[1.5748 \sqrt{1 + \frac{1.6129}{d^2}} d \right] \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{2.73118 \sqrt{1 + \frac{1.6129}{d^2}} d}{(1.6129 + d^2)^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\text{ArcCoth} \left[1.5748 \sqrt{1 + \frac{1.6129}{d^2}} d \right] \right) \right], \{d, -50, 50\}
\end{aligned}$$

$$r = 2.54$$

$$2.54$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2 + \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2 \\
& \frac{\left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2 + \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2}{2 \left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right) \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)} \\
& \text{Plot} \left[\frac{\left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2 + \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2}{2 \left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right) \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)}, \right. \\
& \left. \{d, -40, 40\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2 + \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2}{2 \left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right) \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)} \\
& \text{Plot3D} \left[\frac{\left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2 + \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)^2}{2 \left(\frac{4r}{d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right) \left(\frac{4dr^3\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{3(d^2 + r^2)^2} + 2\text{ArcCoth} \left[\frac{2d\sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}}}{r} \right] \right)}, \right. \\
& \left. \{r, 1, 4\}, \{d, 10, 40\} \right]
\end{aligned}$$

Per l'integrazione numerica del rapporto di asimmetria per la geometria dell'esperimento di esame:

$$\theta$$

$$\theta$$

$$\rho = 2 - \text{Cos}[\theta]$$

$$2 - \text{Cos}[\theta]$$

$$\beta_1 = (\rho + \rho^{\wedge} - 1 - 2(\text{Sin}[\theta])^2)$$

$$2 + \frac{1}{2 - \text{Cos}[\theta]} - \text{Cos}[\theta] - 2\text{Sin}[\theta]^2$$

$$\beta_2 = (\rho + \rho^{\wedge} - 1)$$

$$2 + \frac{1}{2 - \text{Cos}[\theta]} - \text{Cos}[\theta]$$

$$r_1 = 1.27$$

$$1.27$$

$$r_2 = 2.54$$

$$2.54$$

$$d_1 = 15$$

$$15$$

$$d_2 = 30$$

$$30$$

$$a_1 = \text{ArcTan}[r_1/d_1]$$

$$0.0844652$$

$$a_2 = \text{ArcTan}[r_2/d_2]$$

$$0.0844652$$

$$n_1 = \text{NIntegrate}[\beta_1, \{\theta, \text{Pi}/2 - a_1, \text{Pi}/2 + a_1\}]$$

$$0.0853178$$

$$n_2 = \text{NIntegrate}[\beta_1, \{\theta, \text{Pi}/2 - a_2, \text{Pi}/2 + a_2\}]$$

$$0.0853178$$

$$m_1 = \text{NIntegrate}[\beta_2, \{\theta, \text{Pi}/2 - a_1, \text{Pi}/2 + a_1\}]$$

$$0.422376$$

$$m_2 = \text{NIntegrate}[\beta_2, \{\theta, \text{Pi}/2 - a_2, \text{Pi}/2 + a_2\}]$$

$$0.422376$$

$$z = (n_1 n_2 + m_1 m_2) / (n_1 m_2 + m_1 n_2)$$

$$2.57631$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. H. Compton, *The spectrum of scattered X-rays*, in "Physical Review", 2nd Series, Vol. 22 No. 5, *Novembre 1923*.
- [2] A. H. Compton, *X-ray as a branch of optics*, in "Nobel Lecture", 12 *Dicembre 1927*.
- [3] G. F. Knoll, *Radiation Detection and Measurement*, Wiley, 4th Edition.
- [4] G. Gilmore, *Practical Gamma-ray Spectroscopy*, Wiley, 2nd Edition.
- [5] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 2th Edition.
- [6] Calcolo delle sezioni d'urto dei vari materiali: <http://physics.nist.gov/>
- [7] Tavola dei nuclidi <http://ie.lbl.gov/education/isotopes.htm>
- [8] *ORTEC Detectors catalogue*, catalogo dei rivelatori a cura dell'azienda ORTEC.
- [9] *ORTEC Modular electronics catalogue*, catalogo dei moduli elettronici a cura dell'azienda ORTEC.
- [10] *RG 58/U Type*, catalogo dei cavi coassiali a cura dell'azienda General Cable.
- [11] *Moldel 276 Photomultiplier Base, Operating and Service Manual*, manuale dei preamplificatori e dei fototubi a cura dell'azienda ORTEC.
- [12] *N1470 Programmable HV Power Supply, Technical Information Manual*, catalogo dell'alimentatore a cura dell'azienda CAEN.
- [13] *Model 572 Spectroscopy Amplifier and Pile-Up Rejector, Operating and Service Manual*, manuale dell'amplificatore a cura dell'azienda ORTEC.
- [14] *Amplifier/TiSCA Mod. 7616, Users' Guide*, manuale del TiSCA a cura dell'azienda SILENA.

- [15] *TRUMP-PCI-8K, TRUMP-PCI-2K Multichannel Buffer Card, Hardware Manual*, manuale dell'MC a cura dell'azienda Pekin Elmer Instruments.
- [16] R. Jenkins, R. W. Gould, D. A. Gedcke *Quantitative X-ray Spectrometry*, Marcel Dekker, New York, 1981.
- [17] D. A. Gedcke, R. M. Keyser, T. R. Twomey, *A New Method for Counting Loss Correction with Uncertainty in Gamma Spectroscopy Applications* ORTEC, PerkinElmer Instruments, Inc.
- [18] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw Hill Book Co.
- [19] J. J. Sakurai, J. J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, Pearson New International Edition, 2nd Edition.
- [20] C. S. Wu, L. Shakhnov, *Angular Correlation of Scattered Annihilation Radiation*, in "Physical Review", Vol. 77 No. 1, 1 Gennaio 1950.
- [21] H. S. Snyder, S. Pasternack, J. Hornbostel, *Angular Correlation of Scattered Annihilation Radiation*, in "Physical Review", Vol. 73 No. 5, 1 Marzo 1948.