

# Decadimento di muoni

J. Margutti      R. Nizzolo      A. Pini      L. Vigani

2 settembre 2012

## Abstract

Si è misurato il flusso e la distribuzione dei  $\mu$  da raggi cosmici, la vita media dei  $\mu$  (legati con carbonio, alluminio e sale da cucina) e, infine, la violazione di parità caratteristica del decadimento debole dei  $\mu$ .

## 1 Introduzione

### 1.1 Muoni e raggi cosmici

I muoni ( $\mu$ ) sono particelle elementari con carica elettrica positiva ( $\mu^+$ ) o negativa ( $\mu^-$ ), di spin  $1/2$  (i.e. fermioni) e di massa a riposo  $m_\mu = 105.7 \text{ Mev}/c^2$ , che interagiscono con le altre particelle tramite interazioni elettromagnetiche e deboli. Non sono particelle stabili, bensì decadono debolmente:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

dove  $\nu_e$  e  $\nu_\mu$  sono, rispettivamente, i neutrini elettronici e muonici, e  $\bar{\nu}_e$  e  $\bar{\nu}_\mu$  i corrispondenti antineutrini. La vita media del  $\mu$  libero è:

$$\tau = 2.197 \mu s$$

Il decadimento di una particella è un processo poissoniano, perciò, dato un  $\mu$  a riposo generato al tempo  $t = 0$ , la probabilità che sopravviva fino al tempo  $t$  è un esponenziale della forma:

$$P(t) = e^{-t/\tau}$$

Dati  $N_0$   $\mu$  al tempo  $t = 0$ , il numero di  $\mu$  in funzione del tempo è quindi:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

In questo esperimento si sono studiati i muoni prodotti dall'interazione dei raggi cosmici con l'atmosfera terrestre [1]. I raggi cosmici provenienti dall'esterno della terra sono costituiti principalmente da protoni (79%) e

	modo di decadimento	branching ratio
$K^+$	$\mu^+ + \nu_\mu$	63%
	$\pi^+ + \pi^0$	21%
	$\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	6%
$\pi^+$	$\mu^+ + \nu_\mu$	99%
$\pi^-$	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu$	99%

Tabella 1: Modi di decadimento di  $K^+$  e  $\pi^\pm$ .

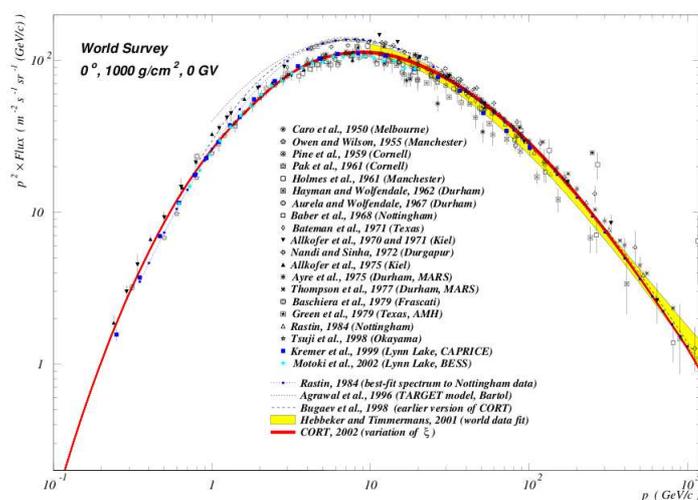


Figura 1: Spettro in energia del flusso perpendicolare alla superficie terrestre di muoni da raggi cosmici, misurato in vari esperimenti [2].

nuclei di elio ( $\sim 14\%$ ). Interagendo con gli atomi dei gas che costituiscono l'atmosfera, principalmente azoto e ossigeno, producono una grande quantità di kaoni ( $K^\pm$ ) e pioni ( $\pi^\pm$ ), che decadono soprattutto in muoni (vedi tab.1).

I  $\pi^\pm$  ed i  $K^+$  hanno vite medie di  $\approx 10$  ns; anche se ultrarelativistici, fino a  $E \approx 100$  GeV, non riescono a percorrere tutta l'atmosfera terrestre, ma decadono in volo. Ciò che osserviamo sulla superficie terrestre sono infatti i prodotti del loro decadimento, muoni (70%) ed elettroni (30%) [2]. Lo spettro in energia dei muoni è riportato in fig.6. Al livello del mare, i  $\mu$  hanno energia media di 4 GeV e flusso pari a:

$$\Phi \approx 100 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

con una distribuzione angolare che va come  $\cos^2(\alpha)$  ( $\alpha$  angolo azimutale) [13].

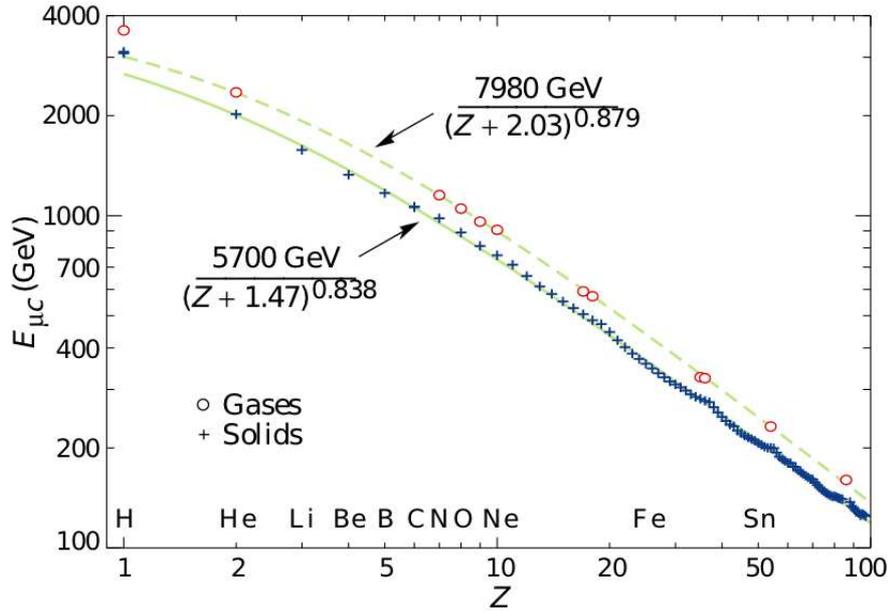


Figura 2: Energia critica dei muoni ( $E_{\mu c}$ , energia alla quale le perdite per ionizzazione e per processi radiativi si equivalgono) in funzione del numero atomico del materiale assorbente. Al di sotto della curva domina la ionizzazione, al di sopra i processi radiativi [3].

## 1.2 Interazione con la materia

I processi tramite i quali i muoni perdono energia attraversando la materia dipendono fortemente dall'energia dei muoni stessi [1]. Per energia superiore a 1 MeV, tipica dei  $\mu$  da raggi cosmici che abbiamo studiato, si tratta della ionizzazione degli atomi del materiale assorbente e dei processi radiativi (produzione di coppie  $e^+ + e^-$  e bremsstrahlung). Per determinare l'importanza relativa dei due tipi di processi, in funzione del materiale assorbente, si veda la fig.2.

Per quanto riguarda la ionizzazione, meccanismo predominante alle energie dei  $\mu$  da raggi cosmici, la perdita di energia è descritta dalla formula di Bethe:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \log \frac{2m_e \gamma^2 v^2}{I} - \beta^2 \right]$$

dove  $r_e$  e  $m_e$  sono raggio classico e massa dell'elettrone,  $N_a$  il numero di Avogadro,  $I$  il potenziale di ionizzazione medio,  $Z$ ,  $A$  e  $\rho$  la carica, il peso atomico e la densità del materiale assorbente,  $v$  la velocità dei muoni,  $\beta = v/c$  e  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

Quando i  $\mu$  rallentano a sufficienza, scendendo ad energie al di sotto di qualche keV, invece, i meccanismi di perdita di energia si differenziano a seconda della carica del  $\mu$ . Il  $\mu^-$  viene catturato da un atomo del materiale assorbitore, formando un atomo muonico, che successivamente si diseccita, tramite raggi X o elettroni Auger, fino allo stato fondamentale. A questo punto possono aver luogo due processi distinti: il  $\mu^-$  può decadere oppure essere catturato dal nucleo. In entrambi i casi, la vita media non è più quella del  $\mu^-$  libero, ma dipende dall'atomo a cui questo è legato (per una trattazione più approfondita vedi sez.4.1).

Il  $\mu^+$ , invece, può formare uno stato legato neutro con un elettrone, il *muonio*, oppure trovare una buca di potenziale nel reticolo cristallino del materiale assorbitore e lì fermarsi. In entrambi i casi, alla fine, decade, con una vita media pari a quella del decadimento del  $\mu^+$  libero.

## 2 Caratterizzazione strumenti

### 2.1 La strumentazione

L'esperimento è composto da tre scintillatori accoppiati a dei fototubi e da una catena elettronica di analisi dati.

#### 2.1.1 Gli scintillatori

L'obbiettivo è rivelare muoni atmosferici, quindi i rivelatori devono avere le seguenti caratteristiche:

- ampia superficie di rivelazione per raccogliere più eventi possibili
- alta efficienza di rivelazione di particelle cariche
- bassa efficienza di rivelazione di particelle neutre (fotoni e neutroni)
- elevata risoluzione temporale
- possibilità di discriminare tra radioattività naturale  $\gamma$  e muoni

Si sono quindi utilizzati degli scintillatori plastici, di dimensioni 80x30x3.8 cm. Nello spessore di quasi 4 cm i muoni rilasciano circa 7 MeV di energia (2 MeV/cm), quindi, anche con una bassa risoluzione energetica (caratteristica degli scintillatori plastici), è possibile discriminare fra  $\mu$  e la radioattività naturale (<3 MeV).

#### 2.1.2 I fotomoltiplicatori

È necessario raccogliere la luce di scintillazione e trasformarla in segnale di tensione. Questo compito è svolto dal fotomoltiplicatore (PMT). Il segnale uscente dal PMT è fatto da una fase di ramp up molto rapida (< 10 ns) e da

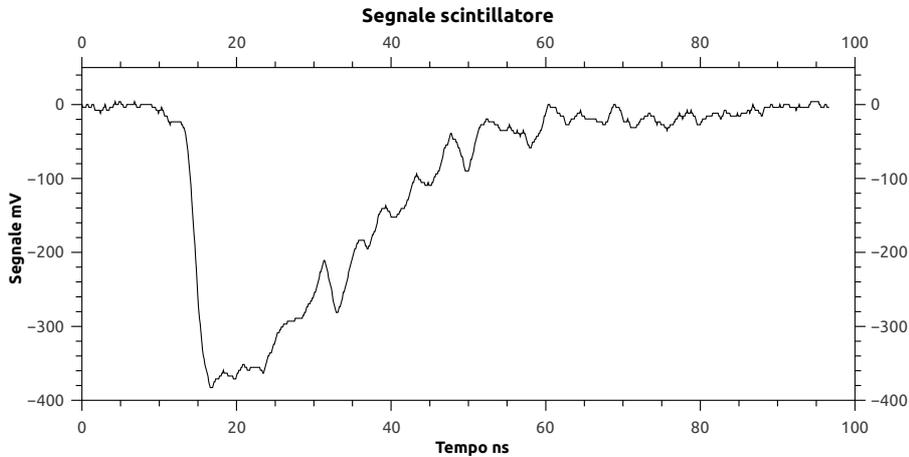


Figura 3: Segnale del passaggio di un  $\mu$  all'interno di uno scintillatore.

una fase di diseccitazione di circa 50 ns (vedi fig.3). L'ampiezza del segnale dipende sia dal numero di fotoni di scintillazione raccolti, sia dal voltaggio di alimentazione del PMT (che determina il suo guadagno).

### 2.1.3 L'elettronica

Sono stati utilizzati tre moduli, conformi allo standard NIM:

- **Discriminatore a soglia:** converte il segnale analogico in segnale logico. Se arriva in input un impulso sopra una soglia fissata emette in output un segnale.
- **Counter:** conta il numero di segnali logici che riceve in input.
- **Modulo di coincidenza:** riceve in input due segnali logici e produce un impulso in output se questi sono sovrapposti temporalmente.

## 2.2 Alimentazione e soglia

I componenti fondamentali dell'esperimento sono tre: l'alimentatore del PMT, il PMT stesso e il discriminatore a soglia. Modificando il voltaggio di alimentazione si cambia il guadagno del PMT. Scegliendo la soglia si decide qual è l'intensità minima di un segnale perché venga trasformato in un segnale logico. Dato che la scintillazione è proporzionale all'energia depositata nel plastico, ci si aspetta che fissare soglia e alimentazione sia equivalente a fissare l'energia di taglio. Si deve quindi ottimizzare questi due parametri in base alle seguenti richieste:

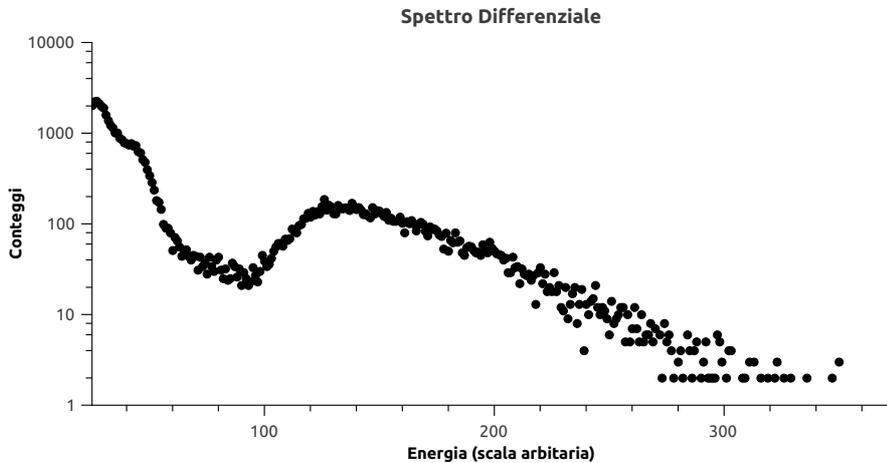
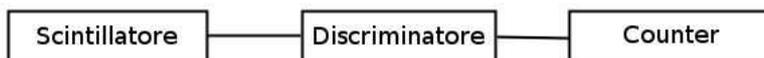


Figura 4: Spettro differenziale.

- l'alimentazione deve essere compatibile con le caratteristiche del fototubo
- il segnale uscente dal PMT deve essere processabile dal discriminatore (i.e segnali minori di 250 mV)
- tutti gli eventi di interesse devono essere raccolti (massimizzazione dell'efficienza)
- gli eventi spuri (radioattività naturale) devono essere ridotti il più possibile
- piccole variazioni nell'alimentazione o nella soglia non devono modificare in maniera consistente la risposta del sistema

Per capire come soddisfare queste richieste, si è studiata la risposta dei rivelatori con differenti configurazioni di soglia e alimentazione, all'interno dei valori ammessi dai singoli componenti.

### 2.2.1 Misure di singola



In questa configurazione i segnali logici uscenti dal discriminatore entrano direttamente nel counter, che restituisce i rate prodotti dai singoli rivelatori. Dato che i  $\mu$  rilasciano nel materiale plastico, mediamente, 2 MeV/cm e lo spessore del rivelatore è 3,8 cm, ci si aspetta un'energia depositata di circa 7-8 MeV per  $\mu$ . La radioattività naturale ha energia inferiore ai 3 MeV.

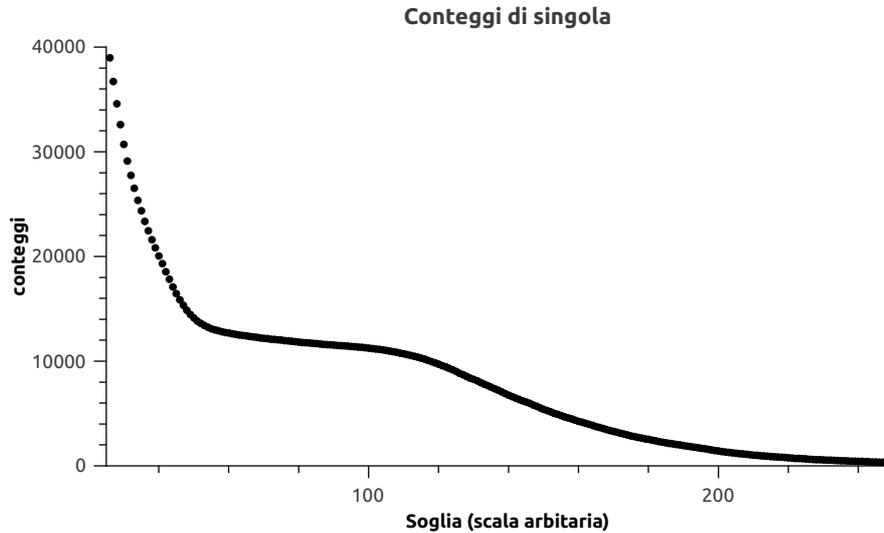


Figura 5: Spettro integrale.

Quello che ci si aspetta, quindi, è che ad energie più basse (inferiori ai 3 MeV) prevalga la radioattività naturale, che tra i 3 e i 7 MeV ci sia un numero ridotto di eventi e che, oltre questa soglia, rimangano gli eventi dovuti ai muoni. Questo andamento è confermato, seppur qualitativamente, dallo spettro misurato (fig.4), ottenuto integrando i segnali letti all'oscilloscopio (vedi sez.4.3). In mancanza di un fattore di conversione, né di una buona risoluzione energetica, non è stato possibile calibrare in energia lo strumento. L'andamento previsto è confermato anche dallo spettro integrale (fig.5).

### 2.2.2 Misure di efficienza

Mettendo tre rivelatori uno sopra l'altro, si può rivelare il passaggio dei  $\mu$ . Questi si propagano in linea retta ad una velocità prossima a quella della luce ed impiegano circa 1 ns ad attraversare i rivelatori. Vista la risoluzione temporale degli strumenti (vedi sez.2.3.1), il passaggio di un  $\mu$  viene rivelato contemporaneamente su tutti e tre gli scintillatori.

Mettendo in coincidenza i segnali in uscita dai discriminatori e misurando i relativi rate è possibile capire qual è l'efficienza di rivelazione. In particolare il rate misurato sull' $m$ -esimo rivelatore sarà:

$$R_m = \varepsilon_m R$$

con  $R_m$  il rate misurato,  $\varepsilon_m$  l'efficienza e  $R$  il rate reale di eventi. Il rate di coincidenza tra il rivelatore  $m$ -esimo ed  $n$ -esimo sarà:

$$R_{mn} = R\varepsilon_m\varepsilon_n \quad (1)$$

e il rate di tripla sarà:

$$R_{mno} = R\varepsilon_m\varepsilon_n\varepsilon_o \quad (2)$$

da cui

$$\varepsilon_n = \frac{R_{mno}}{R_{mo}} \quad (3)$$

Facendo i rapporti tra le coincidenze di tripla e le varie coincidenze di doppia, si possono ottenere le efficienze dei tre rivelatori. In realtà, in questa configurazione, il rate di coincidenza fra i rivelatori esterni è sistematicamente più basso di quello fra rivelatori contigui. Il flusso di muoni non è infatti zenitale, bensì segue una distribuzione della forma  $\cos^2(\alpha)$ : nel primo caso (rivelatori più distanti), l'angolo solido sotteso è minore che nel secondo, quindi minore è la frazione di muoni intercettati. Minore è il rate, minore l'efficienza misurata, secondo la (3). È necessario introdurre un fattore geometrico  $G$ , dipendente dalla distanza tra i rivelatori. Quindi la (1) diventa:

$$R_{mn} = RG_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n \quad (4)$$

e la (2) diventa:

$$R_{mno} = RG_{mno}\varepsilon_m\varepsilon_n\varepsilon_o \quad (5)$$

Dato che la distanza è la stessa, avremo che  $G_{13} = G_{123}$  e  $G_{12} = G_{23}$ , il che ci permette di calcolare l'efficienza del rivelatore centrale. Quindi, per analizzare l'andamento dell'efficienza a varie soglie e voltaggi, è stato necessario permutare i rivelatori, ponendo al centro quello che si voleva caratterizzare. Infine si può notare che l'errore sulle efficienze non è calcolabile con la normale propagazione degli errori poichè  $R_{13}$  e  $R_{123}$  sono misure fortemente correlate. In particolare si osserva che tutti i conteggi  $R_{123}$  sono anche  $R_{13}$ . Quindi si può scrivere:

$$R_{13} = R_{123} + \Delta$$

da cui si ricava unitamente all'espressione dell'efficienza:

$$\varepsilon_2 = \frac{R_{123}}{R_{13}} = \frac{R_{123}}{R_{123} + \Delta}$$

ora trattando  $R_{123}$  e  $\Delta$  come due variabili scorrelate e con incertezza poissoniana si può calcolare l'errore sull'efficienza:

$$\sigma(\varepsilon_2) = \left( \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{(\Delta^2 R_{123} + R_{123}^2 \Delta)^{1/2}}{R_{123} + \Delta}$$

Ritornando alle variabili di partenza otteniamo:

$$\sigma(\varepsilon_2) = \frac{\sqrt{R_{13}^2 R_{123} - R_{123}^2 R_{13}}}{R_{13}^2}$$

Quindi se l'efficienza tende a 1 l'errore sull'efficienza tende a 0.

### 2.2.3 Punti di lavoro

Andando a misurare a diversi valori di soglia e alimentazione il numero di conteggi, si è trovato, come atteso (vedi fig.5) una zona di plateau (delimitata nei grafici tra linea nera e la rossa). Si è misurato anche l'andamento dell'efficienza, verificando che rimane costante e prossima a 1 fino ad una certa energia di taglio (alimentazione-soglia), per poi scendere rapidamente. Confrontando queste due misure, si sono scelti come punti di lavoro i punti all'interno dei plateau dove l'efficienza era più alta.

Concludendo, i punti di lavoro che abbiamo trovato sono i seguenti:

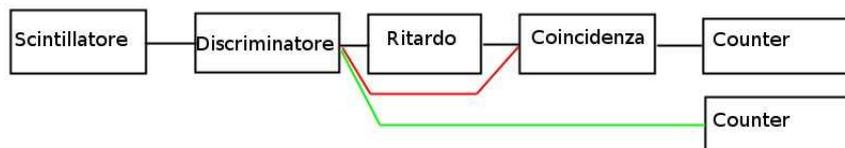
	Alimentazione (V)	Soglia (mV)	Efficienza (%)
Pi-565	950	60	$0,9984 \pm 0,0008$
Pi-566	1000	120	$0,9972 \pm 0,0010$
Pi-567	850	175	$0,9967 \pm 0,0011$

Sui punti di lavoro, ogni singolo rivelatore ha un'efficienza prossima a 1. Si può già affermare, quindi, che l'efficienza degli scintillatori non presenta grosse disomogeneità ed è pressoché costante su tutto il volume di rivelazione.

## 2.3 Caratterizzazione dell'elettronica

Dopo aver messo a punto la parte analogica, si è studiata la parte logica, cioè le risposte della catena elettronica di analisi del segnale (discriminatori e moduli di coincidenza).

### 2.3.1 Autocoincidenza (caratterizzazione dei moduli di coincidenza)



In questa misura si sono valutate la risoluzione temporale dei moduli di coincidenza e la sovrapposizione minima tra due segnali richiesta perché siano in coincidenza. Il segnale uscente da un discriminatore viene sdoppiato: una linea è ritardata e poi messa in coincidenza con l'altra. Con il counter si misura il rate prodotto dal modulo di coincidenza e con l'oscilloscopio si valuta la sovrapposizione tra i segnali. Continuando ad aumentare il ritardo il rate rimane stabile per poi crollare a 0 in un intervallo inferiore ai 0.5 ns.

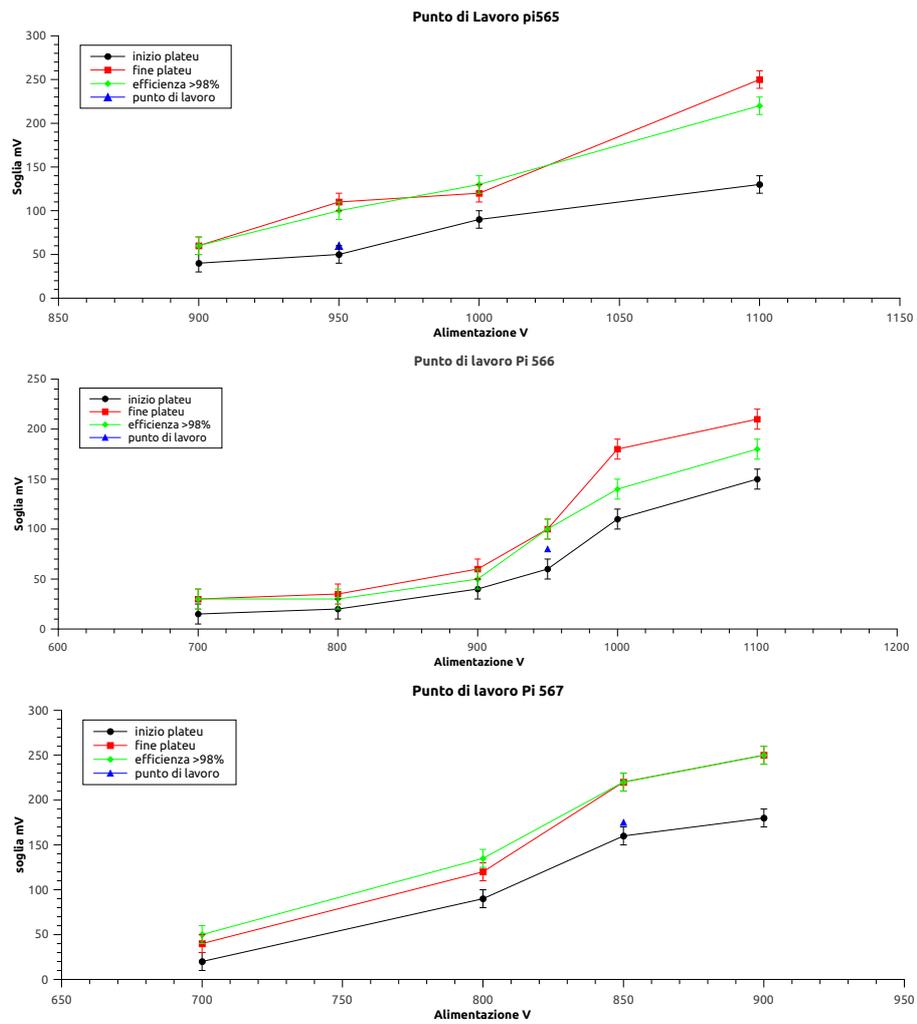
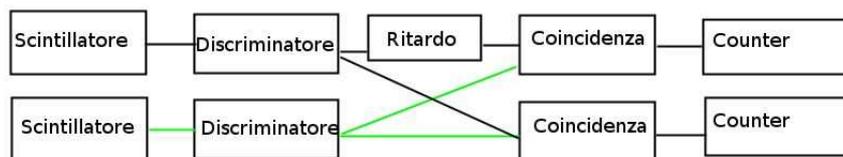


Figura 6: Punti di lavoro dei tre scintillatori. I plateau nei conteggi di singola sono compresi tra la linea nera e la rossa, mentre l'efficienza è maggiore del 98% al di sotto della linea verde.

Modulo	Risoluzione temporale	Sovrapposizione minima
caen n405	< 0.5 ns	10.0 ns
Phillips 755	< 0.5 ns	2.5 ns

La risoluzione temporale del modulo é quindi minore del minimo ritardo che si può imporre (0.5 ns). In conclusione, l'incertezza sulla misura temporale del segnale è determinata da altre cause (vedi sez. successiva).

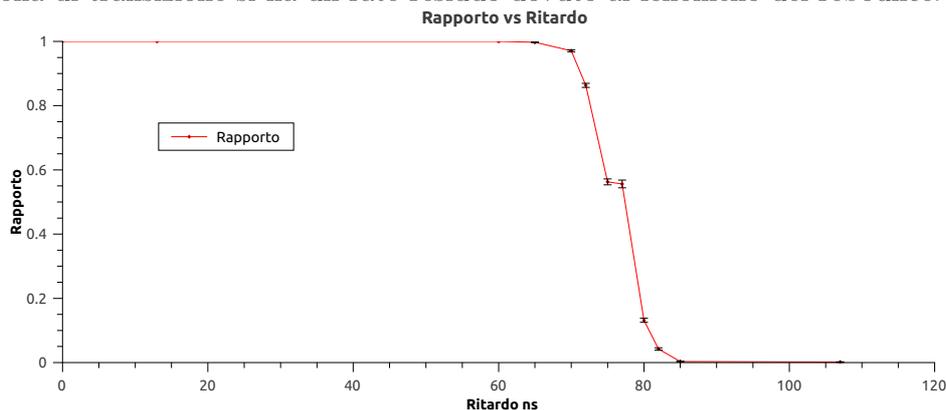
### 2.3.2 Coincidenze ritardate (caratterizzazione del discriminatore)



L'obbiettivo di questa misura è fare una valutazione di due effetti:

- **Time jitter:** l'oscillazione temporale del segnale attorno al suo valore reale dovuta alla presenza di rumore elettronico.
- **Rebounce:** un singolo segnale che viene computato dal discriminatore come doppio, poiché una piccola fluttuazione risale sopra soglia durante la fase di diseccitazione (discesa del segnale).

Misurando il rapporto tra il rate di coincidenza e il rate di coincidenza ritardata, si ottiene un valore pari a 1 finché il ritardo non porta fuori coincidenza il secondo segnale. Si ha quindi una zona di transizione in cui questo rapporto scende verso 0, di larghezza dipendente dal time jitter. Superata questa zona di transizione si ha un rate residuo dovuto al fenomeno del rebound.



Come si può vedere dal grafico, la zona di transizione è di 20 ns, il che implica che l'incertezza temporale sul segnale dovuta al time jitter è di circa 10 ns. Si è anche stimata la frazione di eventi di rebound sugli eventi totali, misurando il rate residuo con ritardo >90 ns: circa 1/300.

### 3 Flusso e distribuzione angolare dei muoni cosmici

L'obiettivo di questa parte dell'esperimento è misurare il flusso dei muoni e verificare che la distribuzione angolare vada come  $\cos^2(\alpha)$ , dove  $\alpha$  è l'angolo zenitale.

#### 3.1 Fattore geometrico

Allontanando i rivelatori si ha una riduzione del rate di coincidenza, mentre i rate dei singoli rivelatori restano invariati. Questo effetto è dovuto al fatto che i muoni non provengono da una sorgente collimata e, allontanando i rivelatori, diminuisce l'angolo solido sotteso. Questo è ciò che ci ha portato ad introdurre, nelle misure di efficienza, il fattore geometrico, che vogliamo ora valutare esplicitamente. Per far ciò ci sono tre possibili vie:

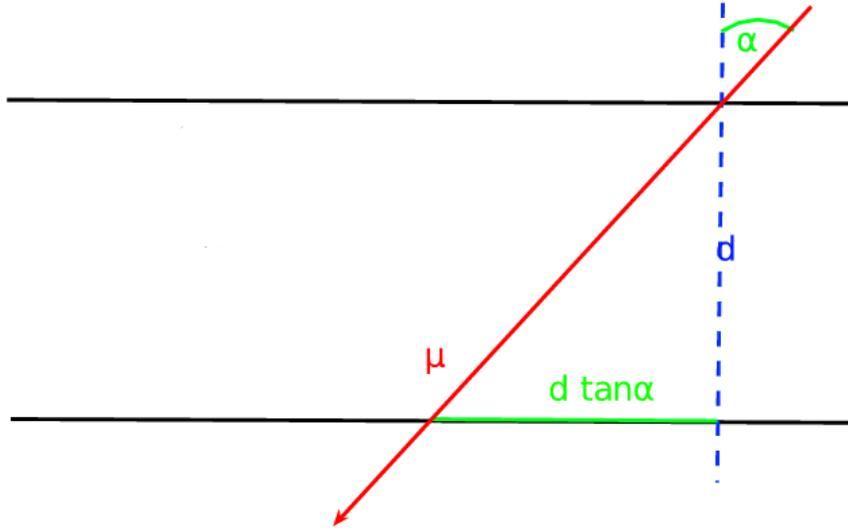
- Simulazione montecarlo
- Risoluzione numerica del problema
- Risoluzione analitica, applicando delle semplificazioni

Si è scelto il terzo metodo, poiché permette, attraverso un'espressione analitica, di ricavare la misura del flusso di muoni e verificarne la distribuzione angolare.

##### 3.1.1 Problema monodimensionale

Dati due rivelatori filiformi con efficienza 1, la probabilità che un muone incidente con angolo  $\alpha$  sul primo rivelatore incida anche sul secondo è:

$$P(\alpha) = \begin{cases} 1 - \frac{d \tan(\alpha)}{l} & \alpha < \arctan(l/d) \\ 0 & \alpha > \arctan(l/d) \end{cases}$$

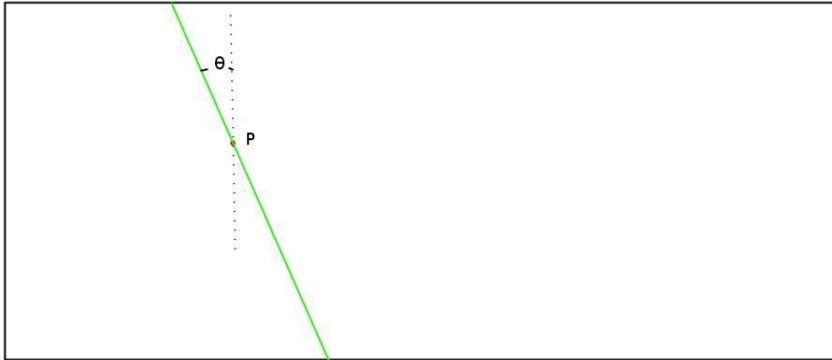


dove  $d$  è la distanza tra i rivelatori ed  $l$  la lunghezza dei rivelatori. Ipotizzando che la distribuzione di muoni cosmici sia  $\cos^2(\alpha)$ , si può calcolare il fattore geometrico  $G$ :

$$G = \frac{4}{\pi} \int_0^{\arctan(l/d)} \cos^2(\alpha) \left(1 - \frac{d \tan(\alpha)}{l}\right) d\alpha = \frac{1}{\pi} \left[ 2 \arctan(l/d) - \frac{l/d}{(l/d)^2 + 1} \right]$$

### 3.1.2 Problema piano

Per passare al modello di un rivelatore piano bisogna fare alcune considerazioni.



Un muone che incide sul rivelatore in un punto  $P$  e con un angolo  $\theta$  individua un rivelatore filiforme di lunghezza  $l(P, \theta)$ . La distribuzione di probabilità che un muone passi per entrambi i rivelatori, ora, è una funzione  $\tilde{P}(\alpha, l)$ . Assumendo che valga il teorema di Fubini (integrabile fattorizzabile) e il teorema della media integrale e che la distribuzione sia normalizzata, abbiamo:

$$P(\alpha) = \int_0^{l_{max}} \tilde{P}(\alpha, l) dl = 1 - \frac{d \tan(\alpha)}{L}$$

Dove  $L$  è la lunghezza media delle intersezioni tra il rivelatore e rette complanari ad esso.

Quindi il rate di coincidenza  $R$  (in funzione della distanza fra i rivelatori) è:

$$R = \frac{R_0}{\pi} \left[ 2 \arctan(L/d) - \frac{L/d}{(L/d)^2 + 1} \right] \quad (6)$$

dove  $R_0$  è il rate reale di muoni e  $d$  la distanza tra i rivelatori.

### 3.2 Analisi dati

Abbiamo calcolato, tramite un codice montecarlo, la lunghezza media  $L$  prevista per un rettangolo di 80x30 cm:

$$L_{montecarlo} = 43.797 \pm 0.004 \text{ cm}$$

Abbiamo poi misurato i rate di coincidenza ponendo i rivelatori a differenti distanze ed eseguito un fit con la (6), tenendo come parametri liberi  $L$  e il flusso di muoni  $\Phi$ , con risultato (fig.7):

$$L = 43.22 \pm 0.41 \text{ cm}$$

$$\Phi = \frac{N}{tS\varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{16222}{600 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,994} = 113,32 \pm 0,104 \mu m^{-2} s^{-1}$$

Compatibile con quanto previsto,  $\Phi \approx 100 m^{-2} s^{-1} sr^{-1}$  [13]. Vista la bontà del fit, si può accettare anche l'ipotesi che la distribuzione angolare dei muoni cosmici vada come  $\cos^2(\alpha)$ .

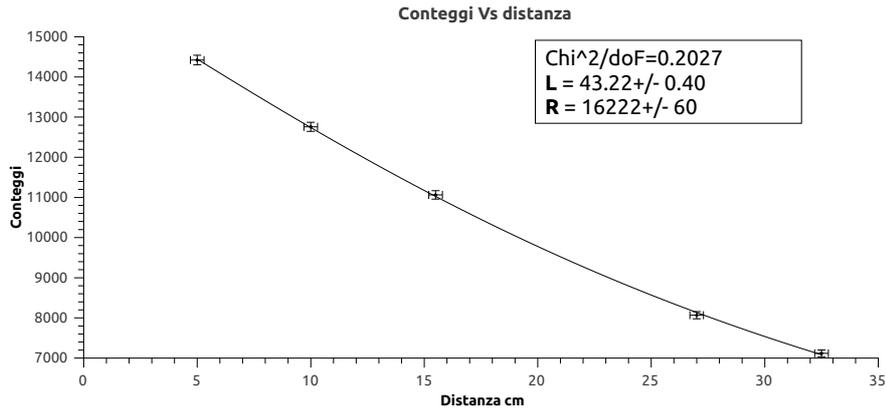


Figura 7: Conteggi in coincidenza in funzione della distanza fra i due rivelatori.

## 4 Misura di vita media

### 4.1 Introduzione

Abbiamo quindi misurato la vita media dei  $\mu$ , cioè l'intervallo temporale medio fra la loro cattura all'interno del rivelatore (o di un particolare materiale assorbente) e la rivelazione dei prodotti del loro decadimento.

Secondo la descrizione del decadimento del  $\mu$  data dalla teoria quantistica del campo elettrodebole (vedi app.6.1), questo ha vita media libera pari a:

$$\tau = \frac{192\pi^3}{G^2(m_\mu c^2)^5} = 2197ns \quad (7)$$

Dove  $m_\mu$  è la massa del muone e  $G$  la costante di Fermi. In realtà, quando il  $\mu^-$  a riposo si lega con un atomo del materiale assorbente, la sua vita media varia considerevolmente.

#### 4.1.1 Decadimento in stato legato

Il  $\mu^-$  in stato legato si disintegra velocemente fino al livello energetico più basso, dove, nel semplice modello atomico di Bohr, ha energia di legame:

$$E = Z^2 \frac{m_\mu e^4}{2\hbar} \quad (8)$$

e raggio medio:

$$\hat{r} = \frac{1}{Z} \frac{\hbar^2}{m_\mu e^2} \quad (9)$$

dove  $m_\mu$  ed  $e$  sono massa e carica del  $\mu$ ,  $Z$  è il numero atomico dell'atomo legante. Nel caso di un atomo di idrogeno ( $Z = 1$ ), per esempio, valgono  $E = 2.72$  KeV e  $\hat{r} = 0.26$  pm.

In questo stato, il  $\mu^-$  risente di almeno tre effetti [4]:

- Riduzione dello spazio fasi accessibile ai prodotti del decadimento, per compensare l'energia di legame. Dato che però questi si dividono 105 MeV, per atomi leggeri ( $Z < 20$ ) l'effetto è trascurabile: dalla (8) abbiamo  $E < 1$  MeV.
- Dilatazione del tempo del muone, che si muove relativisticamente attorno al nucleo [5]:

$$dt_\mu = \gamma dt \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \hat{v}^2/c^2}}$$

Nel modello atomico di Bohr l'elettrone si muove su un'orbita circolare attorno al nucleo. La forza centripeta è pari alla forza di Coulomb:

$$\frac{m\hat{v}^2}{\hat{r}} = \frac{Ze^2}{\hat{r}^2}$$

Dalla (9), otteniamo:

$$\hat{v}^2/c^2 = (Z\alpha)^2$$

e quindi il tempo del  $\mu$  si dilata di un fattore:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (Z\alpha)^2}}$$

- L'effetto del potenziale elettrostatico  $V(r)$  del nucleo, che cambia la vita media del  $\mu$  di un fattore [8]:

$$b = 1 + V(r)/mc^2$$

Nel nostro caso, dalla (9):

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{\hat{r}} = -(Z\alpha)^2 mc^2$$

e quindi:

$$b = 1 - (Z\alpha)^2$$

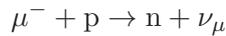
Complessivamente, la vita media  $\tau_b$  del  $\mu^-$  legato, in funzione della carica dell'atomo legante, va come [8]:

$$\tau_b = b\gamma \tau = \frac{1 - (Z\alpha)^2}{\sqrt{1 - (Z\alpha)^2}} \tau = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2} \tau \quad (10)$$

Dove  $\tau$  è la vita media del  $\mu$  libero. La (10), come è mostrato in fig.8, è in ottimo accordo con i dati sperimentali.

#### 4.1.2 Cattura nucleare

La cattura nucleare è una reazione della forma:



dove p e n sono protone e neutrone. Nel caso in cui questi siano parte di un nucleo con più nucleoni, l'energia del neutrone finale può determinarne l'espulsione dal nucleo o essere trasferita agli altri nucleoni, eccitando il nucleo. Il nucleo eccitato può a sua volta diseccitarsi attraverso l'emissione di un  $\gamma$  o decadimento  $\beta$ .

Il primo modello descrittivo del fenomeno è stato fornito da [9], secondo il quale la probabilità di cattura da parte di un atomo di idrogeno è data da:

$$\Lambda(H_1^1) = \frac{1}{2\pi} \frac{m_\mu^5 g_w^2 c^4}{137^3 \hbar^7} \left( \frac{p_\nu}{m_\mu c} \right)^2 \left( 1 + \frac{m_\mu}{m_p} \right)^{-4} = 169 s^{-1}$$

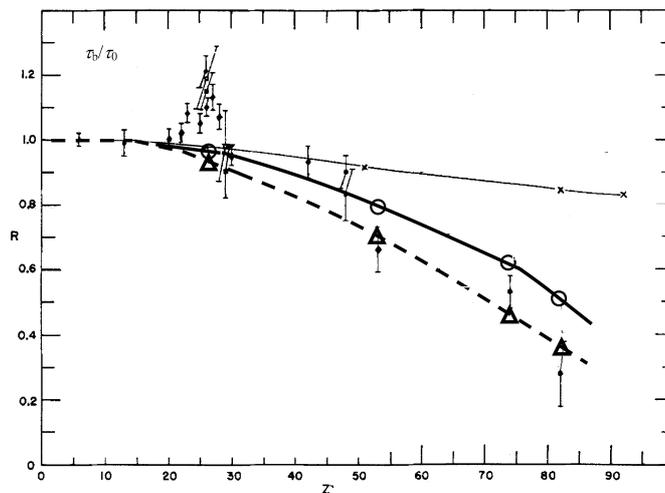


Figura 8: Rapporto tra vita media dei  $\mu$  in stato legato ( $\tau_b$ ) e liberi ( $\tau_0$ ), in funzione del numero atomico  $Z$  dell'atomo legante. Le curve mostrano i valori teorici previsti da [5] ( $\circ$ ) e [8] ( $\triangle$ ), i punti sono i dati sperimentali di [6]. NB: In tutti gli esperimenti successivi, ad es. [7], non si è misurato il picco vicino a  $Z = 26$ .

con  $m_\mu$  e  $m_p$  massa, rispettivamente, del muone e del protone,  $g_w$  costante di accoppiamento debole e  $p_\nu$  momento del neutrino prodotto. Per atomi più complessi è stata proposta la cosiddetta **formula di Primakoff** [9]:

$$\Lambda(Z) \approx Z_{eff}^4 X_1 \left( 1 - X_2 \frac{A - Z}{2A} \right) \quad (11)$$

$X_1 = \Lambda(H_1^1)$  è la probabilità di cattura nucleare da parte di un atomo di H ( $Z=1$ ) e  $X_2$  è un parametro riguardante una correzione dovuta al principio di esclusione di Pauli; attraverso il fit con un gran numero di dati sperimentali [12], risultano essere:

$$X_1 = 169 \text{ s}^{-1} \quad X_2 = 3.125$$

$Z_{eff}$ , invece, è la carica nucleare effettiva, i.e. quella percepita dal muone considerati gli effetti di schermatura degli elettroni. Questa dipende da  $Z$  secondo [10]:

$$Z_{eff} = Z \left[ 1 + \left( \frac{Z}{42} \right)^{1.47} \right]^{-0.68} \quad (12)$$

La costante di decadimento dei  $\mu^-$  in stato legato, in totale, sarà la somma delle probabilità di decadimento ( $\Gamma_d$ ) e di cattura ( $\Gamma_c$ ):

$$\Gamma_{tot} = \Gamma_d + \Gamma_c$$

El.	Z	$\tau_m$ (ns) [12]	$\tau_{tot}$ (ns) (13)	$\tau_d$ (ns) (10)	$\tau_c$ (ns) (11)	$BR_d$ (14)
C	6	2026.3 $\pm$ 1.5	2013.0	2194.9	24283.6	92 %
Na	11	1190 $\pm$ 20	1196	2190	2636	55 %
Al	13	864.0 $\pm$ 1.0	882.7	2187.1	1480.1	40 %
Cl	17	540 $\pm$ 20	520	2180	683	24 %
Pb	82	75.4 $\pm$ 1.0	72.7	1760.0	75.8	4 %

Tabella 2: Vite medie di  $\mu^-$  con diversi materiali assorbitori.

e così la vita media sarà pari a:

$$\frac{1}{\tau_{tot}} = \frac{1}{\tau_d} + \frac{1}{\tau_c} \quad (13)$$

Inserendo i valori previsti di  $\tau_d$  dalla (10) e di  $\tau_c$  dalla (11), si ricava  $\tau_{tot}$ . In tab.2 si sono comparati i valori di  $\tau_{tot}$  così ottenuti con le vite medie misurate ( $\tau_m$ ) in diversi esperimenti [12], per i diversi materiali utilizzati nell'esperimento.

Per le caratteristiche dei rivelatori e la configurazione dell'elettronica, nell'esperimento si rivelano soltanto prodotti carichi del decadimento del  $\mu$  e non si è perciò in grado di rivelarne la cattura nucleare, che produce principalmente  $\gamma$  e neutroni. Quindi, all'aumentare della probabilità di cattura nucleare, diminuirà la statistica raccolta. In particolare, la frazione di eventi rilevabili sugli eventi totali sarà pari al branching ratio del decadimento:

$$BR_d = \frac{\Gamma_d}{\Gamma_{tot}} = \frac{\tau_{tot}}{\tau_d} \quad (14)$$

I valori di branching ratio relativi ai materiali utilizzati nell'esperimento sono riportati in tab.2.

## 4.2 Configurazione

Scelti i voltaggi e le soglie ottimali, si pongono gli scintillatori uno sopra l'altro, come nelle misure di efficienza, con il materiale assorbitore posto tra SC2 e SC3. La cattura di un  $\mu$  è rivelata tramite un segnale su CH1 e CH2 a cui non segue un segnale su CH3 (il che lo discrimina dagli altri muoni passanti); l'elettrone (o positrone) prodotto dal suo decadimento, a seconda della direzione di emissione, può dare segnale su CH1 e non su CH3 o viceversa. Con queste due signature si identificano rispettivamente la cattura di un  $\mu$ , che nel seguito è chiamato segnale di START, e il successivo decadimento, il segnale di STOP. Tramite un'opportuna catena elettronica, si fornisce all'oscilloscopio un trigger che scatta quando ad un segnale di START ne segue uno di STOP. L'oscilloscopio acquisisce quindi il segnale di

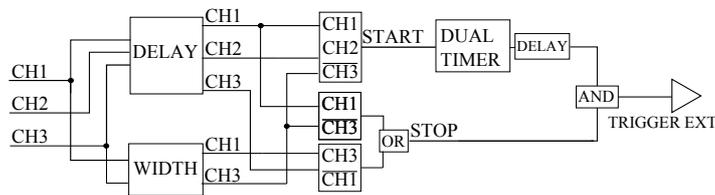


Figura 9: Configurazione della catena elettronica per le misure di vita media

$CH1$  e  $CH3$  ed è possibile misurare l'intervallo temporale tra la cattura ed il decadimento. Raccogliendo abbastanza eventi, si ricostruisce così la curva di decadimento, da cui estrapolare la vita media. Per avere un opportuno trigger sull'oscilloscopio, si è configurata l'elettronica in questo modo (vedi fig.9):

1. I segnali provenienti dai canali vanno in un FAN-IN/FAN-OUT e vengono sdoppiati.
2. Di ogni coppia, un segnale viene ritardato, facendolo passare per un'unità di DELAY, l'altro allungato, facendolo passare per un'unità con WIDTH (larghezza temporale del segnale in uscita) regolabile.
3. Si mettono i segnali in anticoincidenza. Per fare ciò, l'unità genera il segnale complementare di uno dei due INPUT, i.e. a partire un segnale sempre nullo e negativo in presenza di un evento, dà un segnale sempre negativo che si annulla quando c'è un evento. Indicheremo il segnale complementare con  $\overline{CH}$ . Dopodiché l'unità fa coincidenza fra  $CH$  e  $\overline{CH}$ : questa è l'anticoincidenza. Per evitare segnali spuri dovuti a time jitter, si utilizza come  $\overline{CH}$  il segnale lungo e come  $CH$  quello ritardato (vedi fig.10). In totale, quindi, si fa coincidenza fra  $CH1$ ,  $CH2$  e  $\overline{CH3}$  (segnale di START), fra  $CH1$  e  $\overline{CH3}$  e fra  $\overline{CH1}$  e  $CH3$  (segnali di STOP).
4. Il segnale di START va in un DUAL TIMER, che lo allunga fino a 5 volte la vita media da misurare, poi viene messo in coincidenza con lo STOP. Dato che  $CH1$   $\overline{CH3}$  è sia il segnale di START che uno di quelli di STOP, è necessario ritardare lo START rispetto allo STOP prima del DUAL TIMER, per evitare che lo stesso segnale di START o eventuali rebounde (vedi sez.2.3) facciano scattare il trigger.

Il ritardo da imporre al segnale di START è stato valutato tenendo conto della larghezza temporale dei segnali logici (50 ns), del time jitter (10-20 ns) e della larghezza temporale dei segnali originali (80 ns, vedi fig.11): in totale, 150 ns.

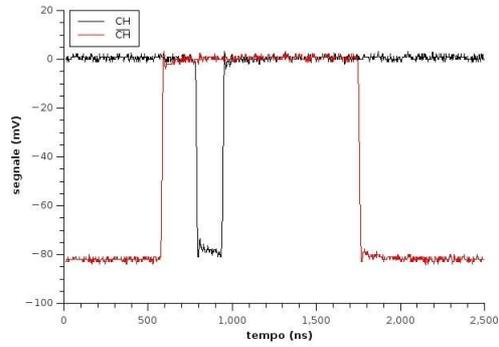


Figura 10: Anticoincidenza tra un segnale ritardato ed uno allungato. NB: la dimensione temporale dei segnali non è quella effettivamente utilizzata nell'esperimento.

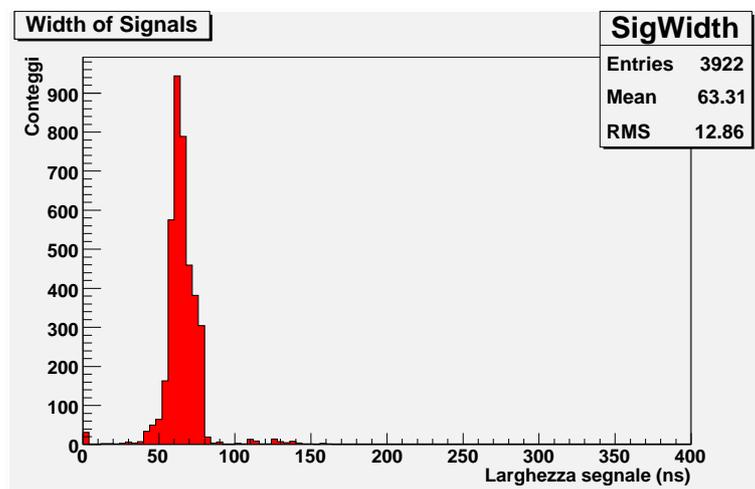


Figura 11: Distribuzione della larghezza temporale dei segnali da *CH1*. Entro gli 80 ns è compreso il 98% dei segnali.

### 4.3 Analisi dati

Per l'analisi dati sono stati utilizzati i pacchetti di programmazione di ROOT, sviluppati al CERN. Il campionamento è avvenuto attraverso l'oscilloscopio e il computer di laboratorio, che, grazie al software della Tektronic, campiona i segnali (misurati in mV) su un intervallo temporale fissato e salva i risultati in un file di testo. Dopo la loro ricostruzione, la selezione e l'analisi sono state eseguite offline.

Per quanto riguarda il decadimento l'obiettivo è campionare in un istogramma il tempo trascorso tra i segnali di START e quelli di STOP. Sullo sciloscopio il canale 1 è collegato a SC1, lo scintillatore in alto: registra sempre il segnale di START, mentre registra il segnale di STOP quando il decadimento avviene verso l'alto ( $CH1 \overline{CH3}$ , sulla catena elettronica). Il canale 2 dell'oscilloscopio è collegato a SC3, lo scintillatore in basso: rivela segnali di STOP quando il decadimento avviene verso il basso ( $CH3 \overline{CH1}$ , sulla catena elettronica). Esempi di forme d'onda di entrambi i casi sono riportati in figura 12. Come si può notare, il primo segnale (quello di START) si trova sempre sul canale 1, mentre il secondo (quello di STOP) si può trovare in entrambi, in base alla direzione dei prodotti di decadimento.

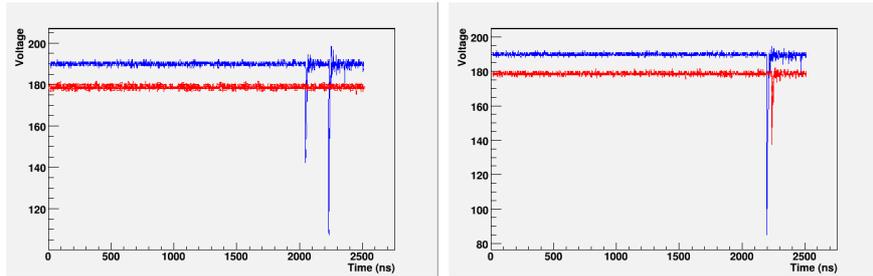


Figura 12: Esempi di segnali da oscilloscopio: a sinistra il caso in cui channel 1 è sia start che stop, a destra lo stop è dato da channel 2

Una volta campionati i tempi di decadimento, si costruisce l'istogramma e si procede con l'analisi dati. Si esegue un fit dell'istogramma con una funzione della forma:

$$Ae^{-\Gamma t}$$

e si ricava il parametro  $\Gamma$ ; il suo inverso è esattamente la vita media, la cui misura è lo scopo dell'esperimento. I  $\mu$  possono in realtà fermarsi nei rivelatori o nel materiale assorbitore, il che comporta vite medie diverse. Il metodo utilizzato per valutare i vari contributi sarà spiegato caso per caso.

In tutti gli istogrammi, fino a circa 150 ns, il numero di eventi raccolti è fortemente abbattuto. Ritardando il segnale di START rispetto a quello di STOP (vedi sez.4.2), infatti, il trigger non scatta per tutti i decadimenti che

avvengono entro il ritardo fissato (circa 150 ns) e perciò questi non vengono registrati.

#### 4.3.1 Decadimento in carbonio

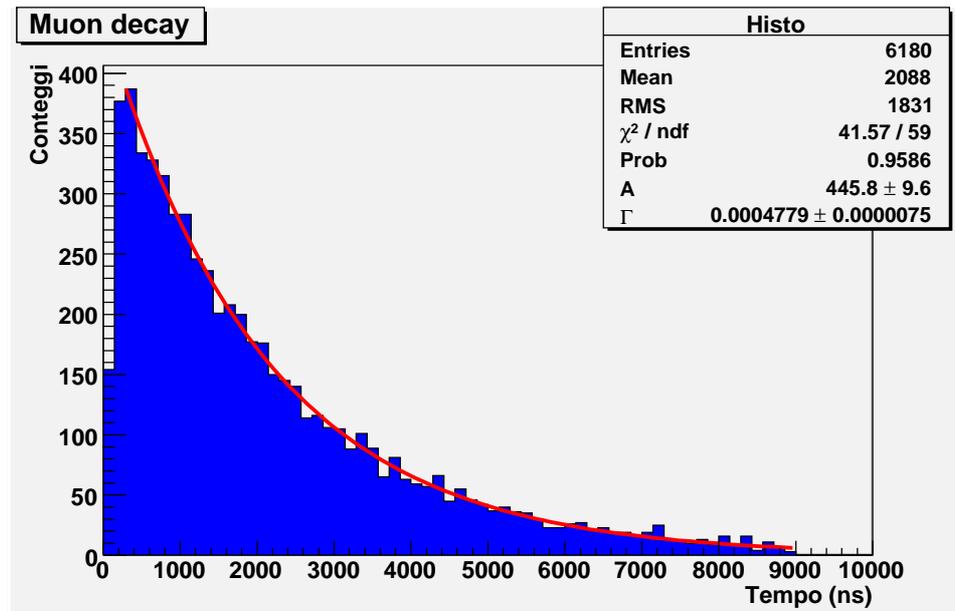


Figura 13: Istogramma del decadimento in carbonio.

Come prima configurazione abbiamo disposto i rivelatori senza materiale assorbente. Possiamo quindi rivelare i  $\mu$  che decadono all'interno dei rivelatori, legati agli atomi di carbonio.

I dati sono stati campionati in un istogramma con bins larghi circa 35 ns. Tale larghezza è stato il frutto di un compromesso tra la risoluzione temporale dell'oscilloscopio (10 ns) e la statistica raccolta, troppo esigua per un binnaggio così stretto. Si esegue un fit sull'istogramma, con un esponenziale semplice, che restituisce un valore della vita media pari a  $(2092 \pm 33)$  ns. Tale valore è compreso fra la vita media dei  $\mu^-$  in stato legato col carbonio,  $(2026.3 \pm 1.5)$  ns, e quella dei  $\mu^+$ , pari a 2197 ns (decadimento libero) anche all'interno degli scintillatori (vedi sez.1.2). Il tutto è mostrato in fig.13.

Nei fit successivi, si assumerà questa vita media come caratteristica del fondo di  $\mu$  che decadono negli scintillatori.

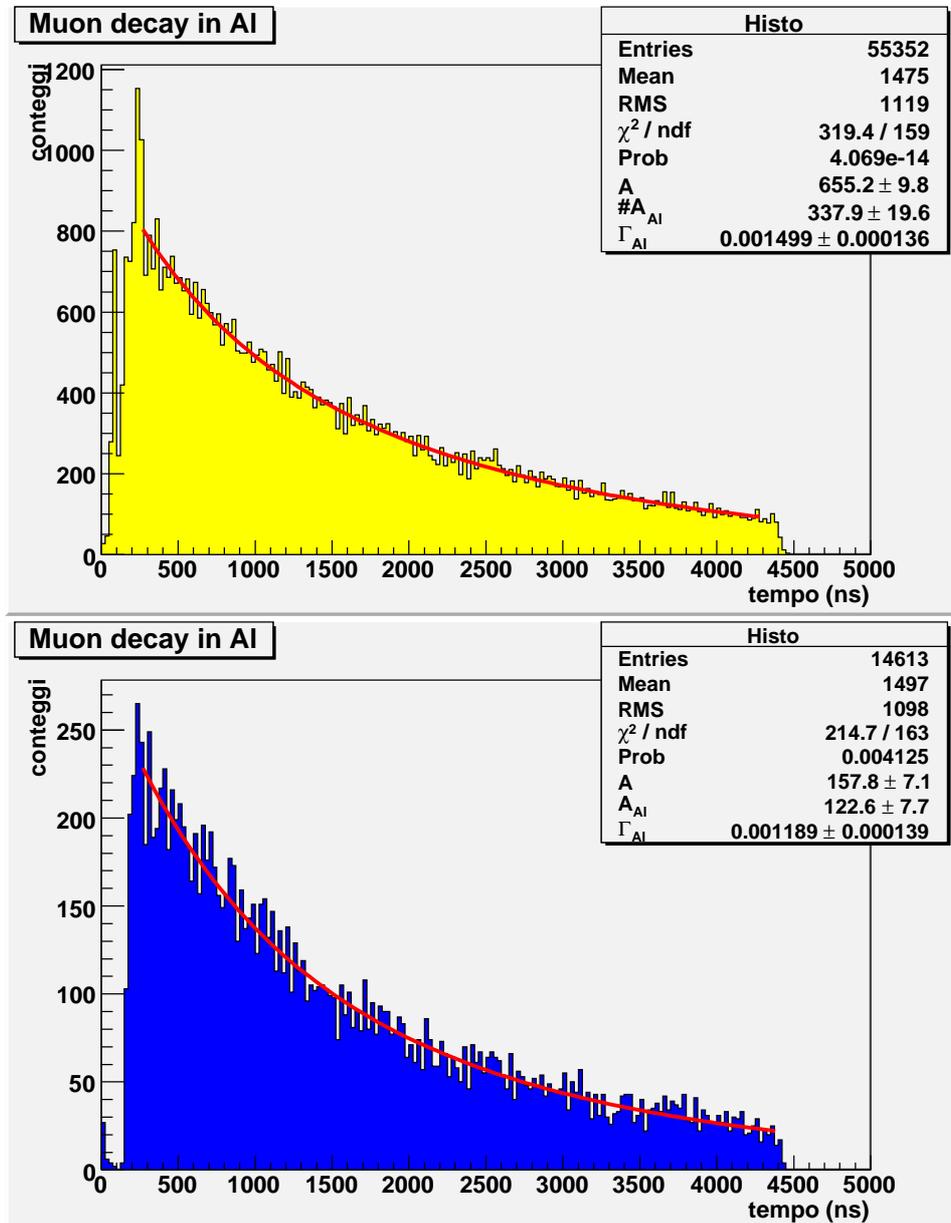


Figura 14: Istogramma del decadimento in alluminio, con entrambi i canali (sopra) e con il solo canale 2 (sotto).

### 4.3.2 Decadimento in alluminio

Successivamente si è misurato il tempo di decadimento dei  $\mu^-$  in diversi materiali, a cominciare dall'alluminio, ponendo semplicemente una lastra di tale materiale tra SC2 e SC3. In questo caso, c'è un fondo di  $\mu^-$  che decadono in SC2 (decadimento in carbonio). Selezionando solo i decadimenti verso il basso (segnale di stop sul canale 2 dell'oscilloscopio), possiamo sfruttare l'effetto di schermatura dell'alluminio. Infatti l'alluminio assorbe 9.6 MeV/cm e le lastre sono alte 3 cm: gli elettroni meno energetici di 30 MeV vengono fermati. Così facendo il fondo è quantomeno ridotto.

Il fit è stato quindi eseguito con una somma di due esponenziali:

$$Ae^{-\Gamma t} + A_{Al}e^{-\Gamma_{Al}t}$$

$\Gamma$  è fissato al valore ottenuto dal decadimento in carbonio; il primo termine, quindi, è relativo al fondo, il secondo è relativo al decadimento del  $\mu^-$  in alluminio. Aspettandoci un tempo di decadimento più breve, si è raccolta più statistica e ridotta la larghezza dei bin a 25 ns. Il risultato, riportato in fig.14, è pari a  $(841 \pm 98)$  ns, compatibile con il valore delle precedenti misure,  $(864.0 \pm 1.0)$  ns. Confrontando i risultati dei fit tra le figure 14 si può ottenere un riscontro di quanto sia efficace la selezione di eventi con decadimento verso il basso: si nota infatti che il parametro di scala dell'esponenziale di decadimento libero ( $A$ ) rispetto a quello legato ( $A_{Al}$ ) per entrambi i canali dell'oscilloscopio è molto più alto che per il solo canale 2.

### 4.3.3 Decadimento nel sale da cucina

In maniera del tutto analoga al caso precedente, si è misurato il tempo di decadimento nel sale da cucina. La risoluzione è mantenuta a 25 ns. Il risultato è di  $(762 \pm 114)$  ns, e si pone nel mezzo tra il tempo di decadimento nel sodio,  $(1190 \pm 20)$  ns, e quello nel cloro,  $(540 \pm 20)$  ns, elementi di cui è appunto costituito il sale da cucina (vedi fig.15).

Se si considera che un  $\mu^-$  entrante nel sale ha una probabilità di essere catturato da un atomo di cloro pari a  $P_{Cl}$  e quella di essere catturato da un atomo di sodio pari a  $P_{Na}$ , allora, note le probabilità di decadimento per i singoli elementi, pari all'inverso dei rispettivi tempi di decadimento, la probabilità combinata è pari a:

$$\Gamma_{tot} = \Gamma_{Cl} \cdot p_{Cl} + \Gamma_{Na} \cdot p_{Na} \quad (15)$$

Dal valore di  $\Gamma_{tot}$  ottenuto dal fit e dai valori di  $\Gamma_{Cl}$  e  $\Gamma_{Na}$  tabulati, si ricavano le seguenti probabilità parziali:

$$p_{Cl} = 0.53 \pm 0.07 \quad p_{Na} = 0.47 \pm 0.06$$

Da cosa può essere determinata questa differenza nelle probabilità? I  $\mu^-$  non sostituiscono gli elettroni dell'atomo, perché non condividono gli stessi

orbitali. La probabilità di cattura dipenderà, in un modello molto semplice, dalla carica del nucleo considerato, opportunamente schermata dagli elettroni esterni, cioè dalla  $Z_{eff}$ . Pertanto si avrà:

$$P_{Cl} = \frac{Z_{effCl}}{Z_{effCl} + Z_{effNa}} \quad (16)$$

e similmente per il sodio. Inserendo i valori della  $Z_{eff}$  dalla (12), si ricava che  $P_{Cl} = 0.59$  e  $P_{Na} = 0.41$ , valori consistenti con quelli misurati precedentemente. Non solo: partecipando ad un legame ionico, gli atomi di Na e Cl sono ionizzati,  $Na^+$  e  $Cl^-$ , il che comporta un valore di  $Z_{eff}$  rispettivamente maggiore e minore, quindi delle probabilità parziali più vicine a quelle misurate. Non essendoci calcoli più precisi di tale correzione, si può solo ipotizzare che spieghi i risultati.

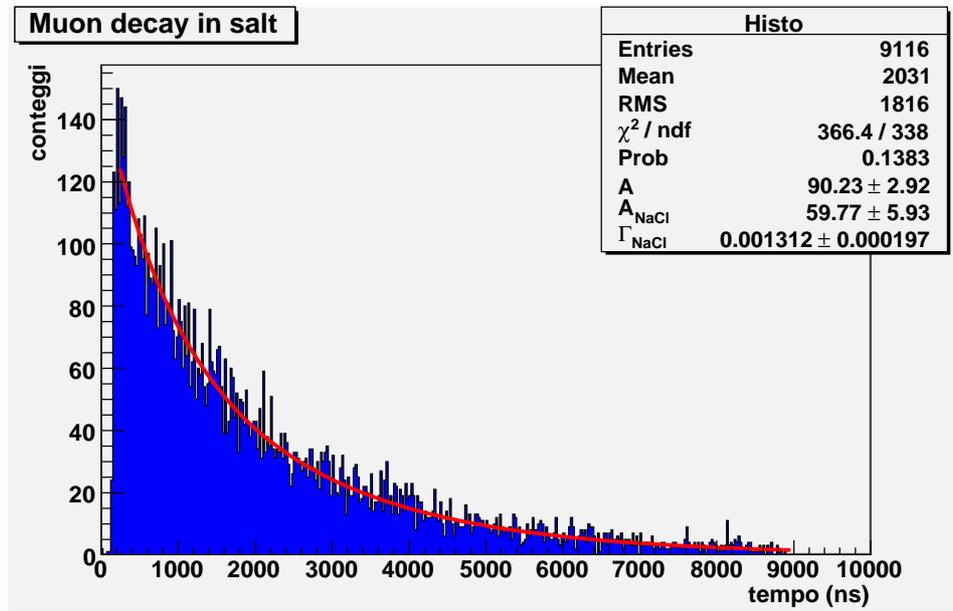


Figura 15: Istogramma per il decadimento nel sale.

## 5 Asimmetria

### 5.1 Introduzione

In questa parte dell'esperimento, si è misurata un'asimmetria nella distribuzione spaziale dei prodotti del decadimento dei  $\mu$ , legata alla particolare dipendenza del processo dallo spin dei  $\mu$  stessi. Si parla, in questi casi, di *violazione di parità*, caratteristica delle interazioni deboli attraverso cui decadono i  $\mu$ .

In particolare, si è sfruttata la polarizzazione dei  $\mu$  da raggi cosmici, che sono composti da  $\mu^-$  *right-handed* (spin parallelo alla direzione di propagazione) e  $\mu^+$  *left-handed* (spin antiparallelo) al  $35 \pm 2\%$  [13].

I processi di interazione dei  $\mu$  con la materia (ionizzazione e processi radiativi) non coinvolgono lo spin dei  $\mu$  stessi, perciò questi si fermano nel rivelatore ancora polarizzati. A seconda se siano  $\mu^+$  o  $\mu^-$ , polarizzati, rispettivamente, verso l'alto o il basso (nel sistema di riferimento del laboratorio), avranno un tasso di decadimento (vedi app.6.2):

$$\frac{d\Gamma_{\pm}}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\tau} \left(1 \pm \frac{\xi}{3} \cos\theta\right)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra lo spin del  $\mu$  e la direzione di emissione dell' $e^{\pm}$  dal decadimento, mentre  $\xi$  è la polarizzazione dei  $\mu$ . Se, all'interno del rivelatore, è presente un campo magnetico di intensità  $B$ , lo spin dei  $\mu$  ruota attorno la direzione del campo magnetico, con una frequenza:

$$\omega = \frac{eB}{mc} \quad (17)$$

dove  $e$  è la carica elettrica del  $\mu$  e  $m$  la sua massa. Il tasso di decadimento dei  $\mu^{\pm}$  è allora:

$$\frac{d\Gamma_{\pm}}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\tau} \left(1 \pm \frac{\xi}{3} \cos\theta \cos\omega t\right)$$

Visto come si è definito  $\theta$ , per calcolare il tasso di decadimento nell'emisfero superiore si deve integrare, nel caso del  $\mu^+$ , polarizzato verso l'alto, tra  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , per l'emisfero inferiore, invece, tra  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ; nel caso del  $\mu^-$ , polarizzato verso il basso, al contrario. Dato che tasso di decadimento  $\Gamma$  e numero di eventi di decadimento  $N(t)$  sono legati da  $N(t) = N_0\Gamma e^{-\Gamma t}$ , il numero di eventi atteso nell'emisfero superiore  $N_{up}(t)$  è quindi, sia per  $\mu^+$  che per  $\mu^-$ :

$$N_{up}(t) = \frac{N_0}{2\tau} \left(1 + \frac{\xi}{6} \cos\omega t\right) e^{-t/\tau}$$

mentre nell'emisfero inferiore:

$$N_{down}(t) = \frac{N_0}{2\tau} \left(1 - \frac{\xi}{6} \cos\omega t\right) e^{-t/\tau}$$

Le oscillazioni nella curva di decadimento dovute alla precessione dello spin del  $\mu$  sono piccole: per i  $\mu$  da raggi cosmici ( $\xi = 0.35$ ), al massimo  $\pm \frac{\xi}{6} \approx 0.06$  (6%). Ciò che si è misurato è in realtà una grandezza più sensibile all'oscillazione, l'asimmetria  $A$ , definita come:

$$A(t) = \frac{N_{up}(t) - N_{down}(t)}{N_{up}(t) + N_{down}(t)} = \frac{\xi}{6} \cos\omega t \quad (18)$$

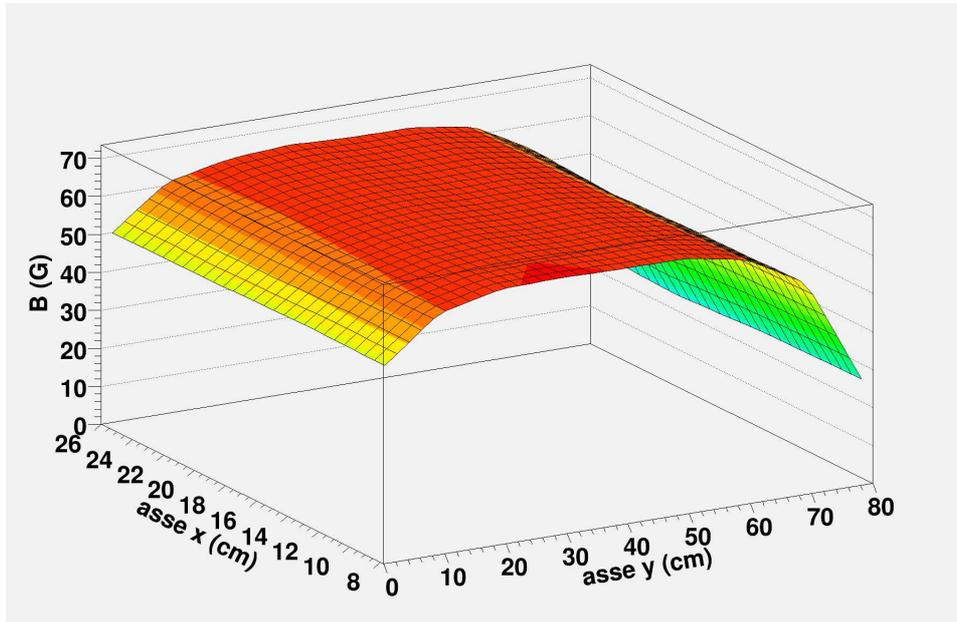


Figura 16: Campo magnetico all'interno del solenoide

## 5.2 Campo magnetico

Per misurare l'asimmetria, serve, prima di tutto, un campo magnetico da applicare ad uno dei rivelatori. Si è utilizzato, a tal fine, un solenoide alimentato da un generatore, dentro il quale è inserito il rivelatore. Per assicurarci che il campo magnetico all'interno del solenoide sia uniforme, ne abbiamo misurato l'intensità con delle sonde a effetto Hall (vedi fig.16).

Le dimensioni della sonda non hanno permesso misure lungo lo spessore (l'asse z) del solenoide, ma solo lungo i suoi lati (assi x e y). L'intensità media all'interno del solenoide è:

$$B = 57.23 \pm 0.17 \text{ G}$$

La frequenza di precessione dei  $\mu$  prevista dalla (17) è quindi:

$$\omega = 4.88 \pm 0.01 \text{ MHz}$$

## 5.3 Analisi dati

Una volta installato il campo magnetico e terminata la presa dati necessaria per l'accumulo di una buona statistica, i dati sono stati inizialmente processati come in precedenza, per confermare i tempi di decadimento già misurati e quindi escludere eventuali compromissioni dell'apparato dovute alla nuova configurazione. Si è poi proceduto con l'analisi dell'oscillazione. I tempi di

decadimento sono stati campionati con binnaggio molto ampio, di 260 ns, poiché risulta essere un buon compromesso tra la necessità di accumulare una buona statistica per ogni punto (la qual cosa è favorita da un binnaggio largo) e il fatto che per riuscire a individuare correttamente un'oscillazione servono diversi punti in ogni periodo (per cui invece si necessita un binnaggio stretto). Dopodiché per ogni bin è stata calcolata l'asimmetria  $A$ , cioè, secondo la (18):

$$A = \frac{N_{up} - N_{down}}{N_{up} + N_{down}} \quad (19)$$

Una correzione è stata però necessaria: la distanza tra lo scintillatore inferiore e quello centrale, per ragioni di economia di spazi, era diversa dalla distanza tra quello centrale e quello superiore, per cui il fattore geometrico tra i due è differente. Avendo già affrontato tale discorso in precedenza, si è semplicemente ricorretta la formula per includere questa differenza. Il rapporto tra i due fattori geometrici è equivalente al rapporto tra i conteggi totali nelle due direzioni. Allora, considerando  $R = N_{tot\ down}/N_{tot\ up}$ , la (19) diventa:

$$A = \frac{N_{up} - R N_{down}}{N_{up} + R N_{down}} \quad (20)$$

Il grafico così ricavato è stato fittato con una funzione del tipo:

$$A \cos \omega t$$

dove  $A$  è un fattore di scala arbitrario e  $\omega$  è la frequenza di Larmor (17).

Il risultato è mostrato in figura 17. La misura restituisce un valore di  $\omega$  di  $4.97 \pm 0.13$  MHz, mentre il risultato teorico previsto, mediando sul campo magnetico dell'intero apparato, è  $4.88 \pm 0.01$  MHz, in buon accordo con i dati.

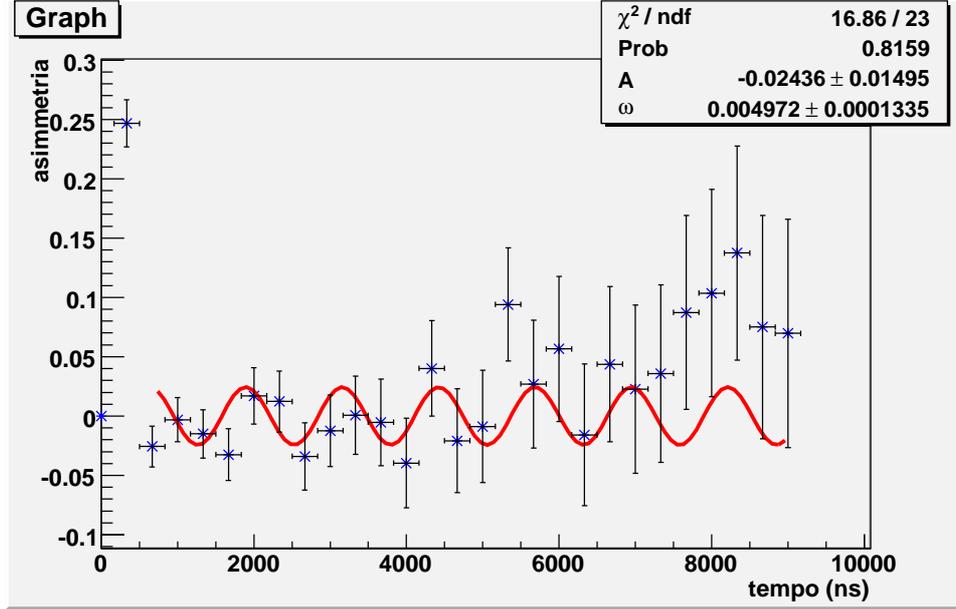


Figura 17: Oscillazione del parametro di asimmetria nel tempo.

## 6 Appendici

### 6.1 Decadimento del muone libero

Si usa la seguente notazione, per indicare i quadrimomenti delle particelle coinvolte:

$$p_{e^-} = p_2, q_{\bar{\nu}_{e^-}} = q_2, q_{\nu_\mu} = q_1, p_\mu = p_1.$$

L'ampiezza di decadimento differenziale per il processo considerato è data da:

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q_2 + q_1 - p_1) \frac{1}{2E_\mu} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_{e^-}} \cdot \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_{e^-}}} \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\mu}} \sum_{r,r',s,s'} |M|^2 2m_{e^-} 2m_{\bar{\nu}_{e^-}} 2m_{\nu_\mu} 2m_\mu \quad (21)$$

L'ampiezza di Feynman  $M$  per il processo si ricava dal diagramma corrispondente (fig.18) e risulta essere uguale a:

$$\bar{u}_{r'}(q_1) \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\mu (1-\gamma_5) u_r(p_1) \frac{i \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \right)}{k^2 - M_W^2 - i\epsilon} \bar{u}_s(p_2) \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\nu (1-\gamma_5) v_{s'}(q_2) \quad (22)$$

Si suppone che l'energia del processo sia molto minore dell'energia di massa del bosone W, cioè  $k^2 \ll M_W^2$ . In tal caso l'espressione del propagatore si

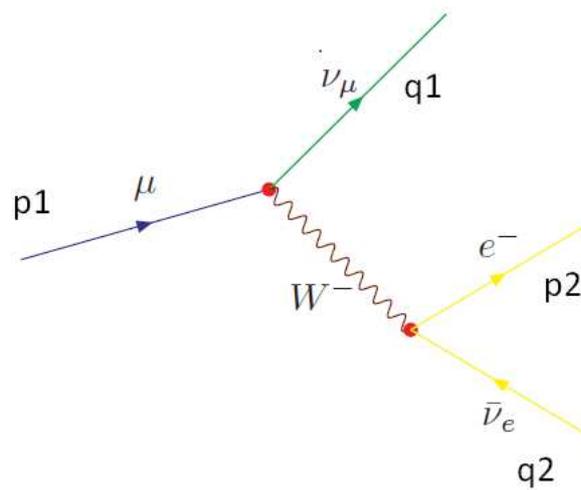


Figura 18: Diagramma di Feynman del decadimento del  $\mu$

semplifica e diventa:

$$\frac{i \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \right)}{k^2 - M_W^2 - i\epsilon} \mapsto \frac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2} \quad (23)$$

Conseguentemente l'espressione (22) per l'ampiezza di Feynman risulta essere:

$$\bar{u}_{r'}(q_1) \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_r(p_1) \frac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2} \bar{u}_s(p_2) \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) v_{s'}(q_2) \quad (24)$$

Per ricavare l'ampiezza  $M$  non polarizzata si media sugli stati di polarizzazione iniziale del muone e si somma sui possibili valori delle polarizzazioni delle particelle prodotte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r,r',s,s'} |M|^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2\sqrt{2}M_W} \right)^4 Tr \left[ \frac{\not{q}_1 + m_{\nu_\mu}}{2m_{\nu_\mu}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_1 + m_\mu}{2m_\mu} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \right] \cdot \\ &\quad \cdot Tr \left[ \frac{\not{p}_2 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{q}_2 + m_{\bar{\nu}_{e^-}}}{2m_{\bar{\nu}_{e^-}}} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Si noti che le masse al denominatore presenti nei vari termini della traccia si cancellano con quelle contenute nell'ampiezza (21). Inoltre si trascurano, rispetto a quella del muone, le masse a riposo dei due neutrini. In totale, l'espressione per l'ampiezza non polarizzata si compone del prodotto di due tracce, di cui la prima:

$$\begin{aligned} Tr [\not{q}_1 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] &= Tr [\not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)^2] = \\ 2Tr [\not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] &= 2Tr [\not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] - 2Tr [\not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \gamma_5] = \\ 8q_{1\alpha} p_{1\beta} (g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) &+ 8i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} q_{1\alpha} p_{1\beta} \end{aligned} \quad (26)$$

In modo analogo per il secondo fattore si ottiene:

$$\begin{aligned} Tr [\not{p}_2 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{q}_2 \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] &= \\ = p_2^\sigma q_2^\tau (g_{\sigma\mu} g_{\tau\nu} - g_{\sigma\tau} g_{\mu\nu} + g_{\sigma\nu} g_{\mu\tau}) &+ 8i\varepsilon_{\sigma\mu\tau\nu} p_2^\sigma q_2^\tau \end{aligned} \quad (27)$$

Dato che la contrazione di un tensore simmetrico con uno antisimmetrico dà un risultato nullo, ci si limita a valutare solo due prodotti:

1. La contrazione dei due tensori antisimmetrici di Levi-Civita:

$$\begin{aligned} (8i)^2 \varepsilon_{\sigma\mu\tau\nu} p_2^\sigma q_2^\tau \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} q_{1\alpha} p_{1\beta} &= -64 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} q_{1\alpha} p_{1\beta} p_2^\sigma q_2^\tau = \\ 132(g_\sigma^\alpha g_\tau^\beta - g_\tau^\alpha g_\sigma^\beta) q_{1\alpha} p_{1\beta} p_2^\sigma q_2^\tau &= 132(q_1 p_2)(p_1 q_2) - 132(q_1 q_2)(p_1 p_2) \end{aligned} \quad (28)$$

2. La contrazione di:

$$\begin{aligned}
& q_{1\alpha} p_{1\beta} (g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) p_2^\sigma q_2^\tau (g_{\sigma\mu} g_{\tau\nu} - g_{\sigma\tau} g_{\mu\nu} + g_{\sigma\nu} g_{\mu\tau}) = \\
& = (q_1^\mu p_1^\nu - (q_1 p_1) g^{\mu\nu} + q_1^\nu p_1^\mu) (p_{2\mu} q_{2\nu} - (p_2 q_2) g_{\mu\nu} + p_{2\nu} q_{2\mu}) = \\
& (q_1 p_2) (p_1 q_2) - (q_1 p_1) (p_2 q_2) + (q_1 q_2) (p_1 p_2) - (p_2 q_2) (q_1 p_1) + 4(q_1 p_1) \\
& (p_2 q_2) - (q_1 p_1) (p_2 q_2) + (q_1 q_2) (p_1 p_2) - (p_2 q_2) (q_1 p_1) + (q_1 p_2) (p_1 q_2) = \\
& 2(q_1 p_2) (p_1 q_2) + 2(q_1 q_2) (p_1 p_2)
\end{aligned} \tag{29}$$

Sommando i due contributi calcolati sopra si ottiene:

$$\begin{aligned}
& 64 \cdot (2(q_1 p_2) (p_1 q_2) + 2(q_1 q_2) (p_1 p_2) - 2(q_1 q_2) (p_1 p_2) + \\
& + 2(q_1 p_2) (p_1 q_2)) = 4 \cdot 64 (q_1 p_2) (p_1 q_2)
\end{aligned} \tag{30}$$

Conseguentemente, inserendo il valore del modulo quadro dell'ampiezza, l'equazione (21) per il tasso differenziale di decadimento non polarizzato diventa:

$$d\Gamma = \frac{4G^2 (q_1 p_2) (p_1 q_2)}{(2\pi)^5 E_\mu} \delta^4(p_2 + q_2 + q_1 - p_1) \frac{d^3 p_2}{E_{e^-}} \frac{d^3 q_1}{E_{\bar{\nu}_{e^-}}} \frac{d^3 q_2}{E_{\nu_\mu}} \tag{31}$$

Si deve ora valutare l'integrale sullo spazio delle fasi. Per farlo s'incomincia con integrare sui momenti dei due neutrini definendo:

$$I^{\mu\nu}(b) = \int d^3 q_1 d^3 q_2 \frac{q_1^\mu q_2^\nu}{E_{\bar{\nu}_{e^-}} E_{\nu_\mu}} \delta^4(q_1 + q_2 - b) \tag{32}$$

Dove  $b = p_1 - p_2$ .

Dal vincolo dato dall'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz, segue che la forma più generale possibile con cui può essere scritto  $I^{\mu\nu}$  è:

$$I^{\mu\nu}(b) = g^{\mu\nu} A(b^2) + b^\mu b^\nu B(b^2) \tag{33}$$

Da cui si ricava il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = 4A(b^2) + b^2 B(b^2) \\ b_\mu b_\nu I^{\mu\nu} = b^2 A(b^2) + (b^2)^2 B(b^2) \end{cases}$$

I due scalari a sinistra dell'uguale possono essere calcolati esplicitamente, ottenendo:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = \pi b^2 \\ b_\mu b_\nu I^{\mu\nu} = \frac{(b^2)^2 \pi}{2} \end{cases}$$

Da cui si ricavano, risolvendo il sistema, i valori di  $A(b^2)$  e  $B(b^2)$ :

$$\begin{cases} A(b^2) = \frac{1}{6} \pi b^2 \\ B(b^2) = \frac{2\pi}{6} \end{cases}$$

Conseguentemente si ricava che:

$$I^{\mu\nu} = \frac{\pi}{6}(g^{\mu\nu}b^2 + 2b^\mu b^\nu) \quad (34)$$

Inserendo tale risultato nella (31) si ottiene:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{4G^2}{(2\pi)^5 E_\mu} \frac{\pi}{6} (p_{1\mu} p_{2\nu} g^{\mu\nu} b^2 + 2p_{1\mu} p_{2\nu} b^\mu b^\nu) \frac{d^3 p_2}{E_{e^-}} = \\ &= \frac{2\pi}{3} \frac{4G^2}{(2\pi)^5 E_\mu} \frac{d^3 p_2}{E_{e^-}} ((p_1 p_2) b^2 + 2(p_1 b)(p_2 b)) \end{aligned} \quad (35)$$

Rimane da integrare sui possibili valori di momento dell'elettrone uscente. Per un muone che decade a riposo, il quadrimomento  $p_1$  e il quadrivettore  $b$ , assumono i seguenti valori:

$$p_1 = (m_\mu, \vec{0}), b^0 = m_\mu - E_{e^-}, \vec{b} = -\vec{p}_2 \quad (36)$$

L'ampiezza di decadimento, dopo aver trascurato termini proporzionali a  $(m_{e^-}/m_\mu)^2$  ed aver espresso la misura d'integrazione, come  $d^3 p_2 = |p_2| E_2 dE_2 d\Omega_2$  (dove  $E_2$  è l'energia dell'elettrone), diviene:

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{3} \frac{G^2}{(2\pi)^5} m_\mu E_2^2 (3m_\mu - 4E_2) dE_2 d\Omega_1 \quad (37)$$

Integrando su tutto l'angolo solido e sull'intervallo d'energia permessa per gli elettroni uscenti  $0 \leq E_2 \leq \frac{1}{2}m_\mu$  si ottiene il tasso di decadimento:

$$\Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (38)$$

Da cui si ricava la vita media:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{192\pi^3}{G^2 m_\mu^5} \approx 2,2 \mu s \quad (39)$$

Per migliorare il risultato ottenuto si dovrebbero includere anche i termini proporzionali a  $\left(\frac{m_{e^-}}{m_\mu}\right)^2$  e correzioni radiative di Q.E.D. al processo, date dall'emissione e riassorbimento di fotoni virtuali. In tal caso, si può dimostrare che la (38) diventa [15]:

$$\Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left( 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left( \pi^2 - \frac{25}{4} \right) + O(\alpha^2) \right) \quad (40)$$

Dove  $\alpha$  è la costante di struttura fine.

## 6.2 Decadimento di un muone polarizzato

Per un fermione di Dirac con quadrimomento  $p^\mu$  e massa  $m$  si definisce l'operatore di elicità come :

$$\sigma_p = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \quad (41)$$

Gli operatori di proiezione su stati ad elicità positiva e negativa, invece sono dati da:

$$\Pi^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_p) \quad (42)$$

Per una particella a massa nulla si può dimostrare che diventano:

$$\Pi^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \quad (43)$$

Per un fermione di Dirac la componente dello spin in una direzione arbitraria è un buon numero quantico solo nel sistema di riferimento a riposo. Si possono definire degli operatori di proiezione di spin lungo un qualsiasi asse in modo covariante nel sistema di riferimento a riposo. Compiendo poi una trasformazione di Lorentz, si possono definire tali operatori in ogni sistema di riferimento inerziale. Si denota con  $\vec{n}$  l'asse su cui si proietta lo spin nel sistema di riferimento solidale con la particella. Si definisce il quadrivettore  $n^\mu$ , che nel sistema di riferimento solidale con la particella è dato da  $n^\mu = (0, \vec{n})$ .

Inoltre le quantità  $n^2 = -1$  e  $np = 0$ , dove  $p$  è il quadrimomento della particella nel sistema di riferimento a riposo, assumeranno lo stesso valore per tutti gli osservatori. Si dimostra [15] che gli operatori di proiezione di spin sono dati da:

$$\Pi^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5 \not{n}) \quad (44)$$

Conseguentemente, prendendo in considerazione il caso di un muone polarizzato lungo una direzione individuata dal versore  $\vec{n}$ , l'ampiezza di Feynman data dall'equazione (24) diventa:

$$\bar{u}_{r'}(q_1) \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5 \not{n}) u(p_1) \frac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2} \bar{u}_s(p_2) \left( \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) v_{s'}(q_2) \quad (45)$$

Per ricavare l'ampiezza non polarizzata si somma sulle polarizzazioni degli stati finali:

$$\sum_{r',s,s'} |M|^2 = \left( \frac{g}{2\sqrt{2}M_W} \right)^4 Tr \left[ \frac{\not{q}_1 + m_{\nu_\mu}}{2m_{\nu_\mu}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_1 + m_\mu}{2m_\mu} \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5 \not{n}) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \right] \cdot Tr \left[ \frac{\not{p}_2 + m_{e^-}}{2m_{e^-}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{\not{q}_2 + m_{\bar{\nu}_{e^-}}}{2m_{\bar{\nu}_{e^-}}} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \right] \quad (46)$$

Si noti che l'unica differenza con il caso precedente è costituita dalla prima traccia, in cui compare il proiettore di spin. Si valuta allora:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma_5)(\not{p}_1 + m_\mu)(1 \pm \gamma_5 \not{h})\gamma^\nu(1 - \gamma_5) &= \\ = (1 - \gamma_5)(\not{p}_1 + m_\mu \pm \not{p}_1\gamma_5 \not{h} \pm m_\mu\gamma_5 \not{h})(1 + \gamma_5)\gamma^\nu & \end{aligned} \quad (47)$$

Dato che:

$$(1 - \gamma_5)(m_\mu + \not{p}_1\gamma_5 \not{h})(1 + \gamma_5) = 0 \quad (48)$$

Tali termini non saranno più considerati nel seguito. Conseguentemente la prima traccia diventa:

$$\frac{1}{2}Tr \left[ \frac{\not{h}_1 + m_{\nu_\mu}}{2m_{\nu_\mu}}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\frac{\not{p}_1 \pm m_\mu \not{h}}{2m_\mu}\gamma^\nu(1 - \gamma_5) \right] \quad (49)$$

Perciò, quello che si sta svolgendo, è lo stesso conto del caso di un muone non polarizzato in cui si è compiuta la sostituzione:

$$p_1 + m_\mu \longrightarrow p_1 \pm m_\mu \not{h} \quad (50)$$

Ripetendo gli stessi passaggi del caso precedente si ottiene:

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{3(2\pi)^5} \frac{1}{E_\mu} \frac{d^3p_2}{E_e} \left[ (p_1 \cdot p_2)b^2 + 2(bp_1)(bp_2) - m_\mu(b^2(p_2 \cdot n) \pm 2(bn)(bp_2)) \right] \quad (51)$$

Dove  $b = p_1 - p_2$ .

Svolgendo i conti, trascurando come prima la massa a riposo dell'elettrone rispetto a quella del muone, si ricava l'ampiezza di decadimento differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\Omega dx} &= \frac{G^2 m_\mu^5}{384\pi^4} [(3 - 2x) \pm \vec{n} \cdot \hat{v}_e(1 - 2x)] x^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi\tau} [(3 - 2x) \pm \vec{n} \cdot \hat{v}_e(1 - 2x)] x^2 \end{aligned} \quad (52)$$

Dove  $x = \frac{2E_e}{m_\mu}$  e  $\hat{v}_e$  è un versore orientato lungo la stessa direzione e verso della velocità dell'elettrone uscente, mentre  $\tau$  è la vita media libera del muone calcolata precedentemente.

Integrando sull'angolo  $\phi \in [0, 2\pi]$  e sui possibili valori di  $x \in [0, 1]$ , dato che  $\vec{n} \cdot \hat{v}_e = |\vec{n}| \cdot |\hat{v}_e| \cos\theta = \cos\theta$ , si ottiene:

$$\frac{d\Gamma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\tau} \left[ 1 + \frac{1}{3}\cos\theta \right] \quad (53)$$

Nel caso dei muoni carichi positivamente.

Mentre si ottiene:

$$\frac{d\Gamma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\tau} \left[ 1 - \frac{1}{3}\cos\theta \right] \quad (54)$$

Nel caso dei muoni carichi negativamente.

Nel caso in cui i muoni polarizzati siano, mediamente, una frazione  $\xi$  del totale, l'espressione precedente diventa:

$$\frac{d\Gamma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\tau} \left[ 1 \pm \frac{\xi}{3} \cos\theta \right] \quad (55)$$

## Riferimenti bibliografici

- [1] K. Nagamine, *Introductory Muon Science*, Cambridge University Press (2003)
- [2] V. A. Naumov, *Atmospheric muons and neutrinos*, Proceedings of the 2nd Workshop on Methodical Aspects of Underwater/Ice Neutrino Telescopes, edited by R. Wischnewski (2001)
- [3] D.E. Groom, N.V. Mokhov, S.I. Striganov, *Muon stopping-power and range tables: 10 MeV–100 TeV* Atomic Data and Nuclear Data Tables 78, p. 183–356 (2001)
- [4] A.O. Weissenberg, *Muons*, North-Holland Publishing Company (1967)
- [5] R.W. Huff, *Annals of Physics*, v. 16, p. 288 (1961)
- [6] D.D. Yovanovitch, *Physical Review*, v. 117, p. 1580 (1950)
- [7] I.M. Blair, H. Muirhead, T. Woodhead, J.N. Woulds, *Proceedings of the Physical Society*, v. 80, p. 938 (1962)
- [8] T. Yarman, A.L. Kholmetskii, O.V. Missevitch, *International Journal of Theoretical Physics*, v. 50, p. 1407–1416 (2011)
- [9] H. Primakoff, *Reviews of Modern Physics*, v. 31, p. 802 (1959)
- [10] A.M. Hillas, *Tesi di laurea*, University of leeds (1958)
- [11] A. Grossheim et al. (TWIST collaboration), *Decay of negative muons bound in  $^{27}\text{Al}$* , *Physical Review D*, v. 80 (2009)
- [12] T. Suzuki, D.F. Measday, J.P. Roalsvig, *Total nuclear capture rates for negative muons*, *Physical Review C*, v. 35, n. 6 (1987)
- [13] J. Beringer et al. (Particle Data Group), *Physical Review D*, v. 86 (2012)
- [14] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley-Interscience Publication (1993)
- [15] L.B. Okun, *Leptons and Quarks*, Elsevier Science Publishers (1982)