



Università degli studi Milano Bicocca
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Studio del funzionamento di un apparato *PET*

Anno Accademico 2010/2011

Alessandra Motta	matr. 703127
Alessandra Ricciardelli	matr. 071756
Lorena Venturini	matr. 072438
Giovanna Viganò	matr. 702912

Indice

Capitolo 1	Introduzione	3
1.1	Cenni teorici	3
Capitolo 2	Apparato strumentale	6
Capitolo 3	Calibrazione dell'apparato strumentale	11
3.1	Caratterizzazione del primo rivelatore	13
3.2	Caratterizzazione del secondo rivelatore	15
3.3	Calibrazione dello spettro energetico	18
3.4	Studio del rumore di fondo	19
Capitolo 4	Misure in coincidenza	20
4.1	Determinazione della posizione ottimale per la sorgente ed i rivelatori	21
4.2	Valutazione delle spurie	23
Capitolo 5	Ricostruzione della posizione della sorgente	25
5.1	Soluzione analitica	27
5.2	Simulazione Montecarlo	28
5.3	Misure in aria con posizione della sorgente incognita	30
5.3.1	Posizione incognita x_1	30
5.3.2	Posizione incognita x_2	34
5.3.3	Posizione incognita x_3	36
Capitolo 6	Conteggi con diverse schermature per la sorgente	40
6.1	Misure di riferimento	40
6.2	Misure con mezzo interferente	41
Conclusione		43
Appendice		45
Capitolo 3		45
Capitolo 4		45
Capitolo 5		45
Capitolo 6		46
Allegato		47

Capitolo 1

Introduzione

L'esperimento, condotto durante l'anno accademico, e che andremo a relazionare, è volto allo studio ed alla comprensione del funzionamento di un apparato PET (*Positron Emission Tomography*).

A tale scopo si procede in primo luogo alla costruzione dell'apparato strumentale, ossia andando a scegliere e ad assemblare le singole parti costituenti la catena elettronica. In secondo luogo si procede alla caratterizzazione di ciascuno di questi componenti, al fine di ottimizzare la risoluzione energetica. Conclusa questa prima parte di studio dell'apparato è possibile avviare le misurazioni che sono volte a:

- valutare la posizione ottimale per la collocazione della sorgente e degli scintillatori, in modo da ottenere il maggior numero di conteggi di fotoni emessi;
- studiare come varia l'intensità dello spettro energetico interponendo tra la sorgente e i rivelatori dei materiali diversi (riso, acqua, sale..);
- risalire alla posizione della sorgente emettitrice.

1.1 Cenni teorici

La **PET**, ossia la tomografia a emissione di positroni, è una tecnica di medicina nucleare e di diagnostica medica. Lo scopo principale del suo impiego consiste nella produzione di bioimmagini prettamente in ambito oncologico, al fine di ottenere rappresentazioni di tumori, ma nondimeno può essere sfruttata per ricerche cardiologiche e neurologiche. Con l'esame PET si ottengono mappe dei processi funzionali all'interno del corpo.

Esistono anche metodi d'indagine alternativi che consentono di fare imaging, come ad esempio la tomografia assiale computerizzata (TAC) o la risonanza magnetica nucleare (NMR); ad ogni modo, mentre gli altri metodi di scansione, come la TAC e la NMR permettono di identificare alterazioni organiche e anatomiche nel corpo umano, le scansioni PET sono in grado di rilevare alterazioni a livello biologico molecolare, che spesso precedono l'alterazione anatomica, attraverso l'uso di marcatori molecolari che presentano un diverso ritmo di assorbimento a seconda del tessuto interessato. Con una scansione PET è possibile visualizzare e quantificare con discreta precisione il cambio di afflusso sanguigno nelle varie strutture anatomiche (attraverso la misurazione della concentrazione dell'emettitore di positroni iniettato).

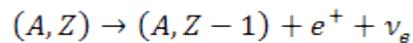
Spesso, e sempre più frequentemente, le scansioni della Tomografia a Emissione di Positroni sono raffrontate con le scansioni a Tomografia Computerizzata, fornendo informazioni sia anatomiche, sia morfologiche, sia metaboliche (in sostanza, su come il tessuto o l'organo sono conformati e su cosa stanno facendo).

Il principio di funzionamento della PET è il seguente: un isotopo tracciante con breve tempo di vita e legato ad una molecola metabolicamente attiva (in genere uno zucchero), viene iniettato (solitamente per via endovenosa) nel soggetto da esaminare. Il radiofarmaco viene assimilato dal corpo come se fosse glucosio semplice ($C_6H_{12}O_6$), concentrandosi maggiormente nelle zone che

hanno un metabolismo più accelerato (le regioni che consumano glucosio in maggior quantità sono le cellule tumorali, i reni e le zone attive del cervello).

Quando la molecola metabolicamente attiva raggiunge una determinata concentrazione all'interno del tessuto interessato, il paziente viene posizionato all'interno di uno scanner.

L'isotopo di breve vita media decade β^+ :



Il positrone emesso, dopo un percorso di pochi millimetri in cui perde energia cinetica, si annichila con un elettrone presente nella materia, dando luogo alla formazione di una coppia di fotoni γ da 511Kev ciascuno emessi back-to-back, come mostrato in Figura 1.

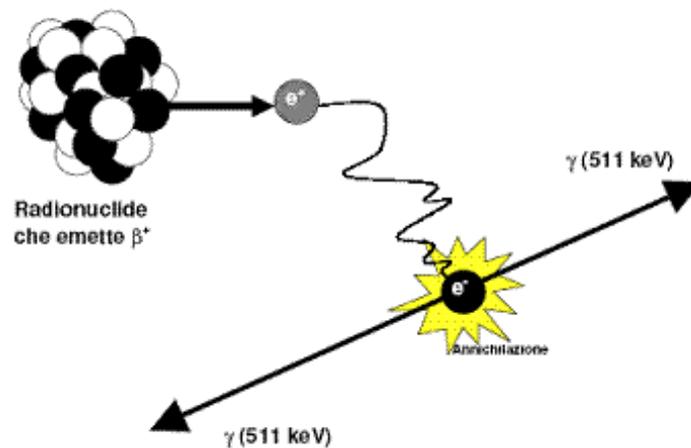


Figura 1: Rappresentazione grafica del decadimento di un isotopo radioattivo β^+ : si ha l'emissione di un positrone che annichilandosi con un elettrone presente nella materia dà luogo a due fotoni back-to-back da 511 kev.

Gli emettitori di positroni impiegati in un esame PET possiedono delle caratteristiche precise, ossia:

- poter essere prodotti in quantità utili con costi non proibitivi e con purezza idonea;
- permettere la costruzione di radiofarmaci atti a tracciare i meccanismi fisiologici e patologici d'interesse: si usano radiofarmaci differenti per sondare attività tumorali piuttosto che malattie neurologiche degenerative.

Tra quelli più comunemente utilizzati si trovano: ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O , ^{18}F , ^{82}Rb , i quali possiedono le caratteristiche fisiche riportate in Tabella 1.

I fotoni d'annichilazione vengono poi rivelati per mezzo di un apparato in coincidenza temporale, che li registra come eventi *veri* solo se incidono sui due rivelatori in un range temporale così ristretto da poter considerare la rivelazione contemporanea. In genere l'intervallo di tempo è dell'ordine dei nanosecondi. I rivelatori impiegati sono degli scintillatori, che possiedono un elevato potere di arresto ed un'alta efficienza di rivelazione, permettendo di ottenere buoni risultati anche iniettando una bassa dose di isotopo nel paziente.

Radionuclide	Tempo di dimezzamento (min)	En. massima dei positroni (kev)	En. media dei positroni (kev)
^{11}C	20.4	970	390
^{13}N	9.96	1190	490
^{15}O	2.07	1720	740
^{18}F	110	635	250
^{82}Rb	1.25	3356	1532

Tabella 1: Caratteristiche fisiche degli emettitori di positroni generalmente impiegati.

Una volta raggiunti gli scintillatori posti attorno al paziente in modo concentrico (come mostrato in Figura 2), i fotoni danno luogo a scintillazione, che viene rivelata attraverso dei tubi fotomoltiplicatori. Un evento di questo tipo consente d'individuare una linea lungo la quale si trova il nucleo emettitore del positrone, ossia una linea di proiezione lungo cui è possibile retroproiettare l'evento. In questo modo, acquisendo dati per un numero di linee di retroproiezione sufficientemente elevato da poter campionare adeguatamente la regione spaziale d'interesse, si riescono a ricostruire le immagini della distribuzione del radionuclide emettitore di positroni, determinando inoltre l'attività e l'utilizzo, all'interno delle parti del corpo investigate, della molecola metabolicamente attiva.

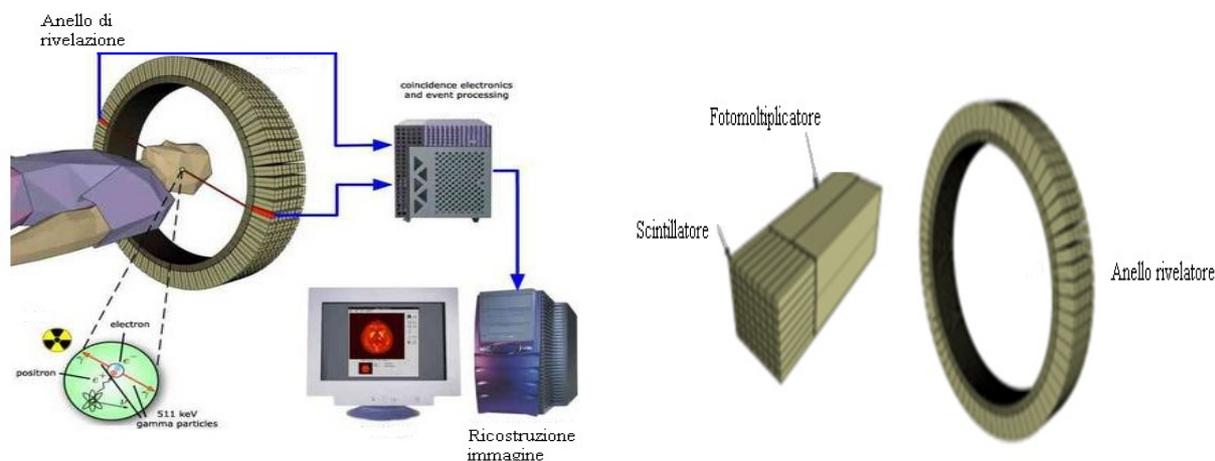


Figura 2: Schema di un processo di acquisizione PET.

Capitolo 2

Apparato strumentale

Gli strumenti necessari per la conduzione dell'esperimento sono:

- sorgente radioattiva (^{22}Na);
- rivelatori con cristalli NaI(Tl), PMT e preamplificatori incorporati;
- amplificatori, uno dei quali con SCA incorporato;
- generatore di tensione;
- ADC/MCA, all'interno un'apposita architettura del PC;
- calcolatore con software Maestro.

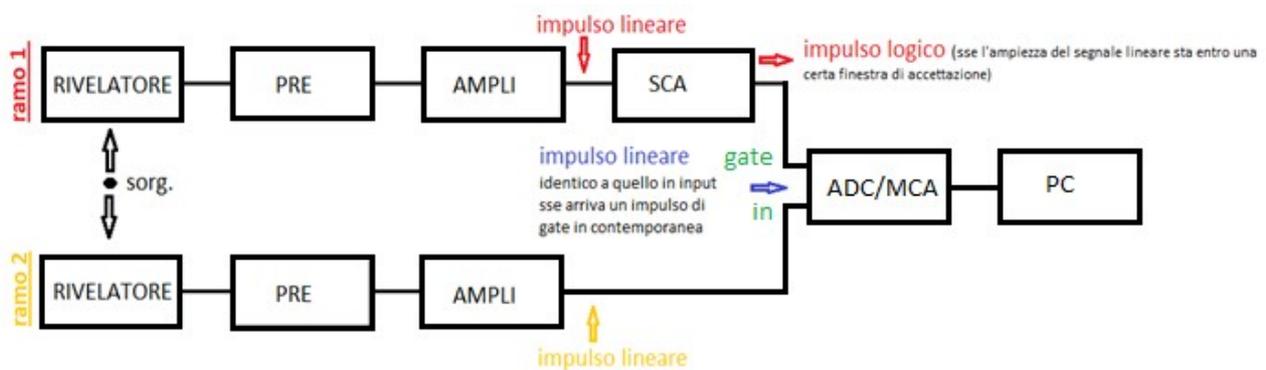


Figura 3: diagramma a blocchi della catena elettronica complessiva.



Figura 4: apparecchiatura a disposizione.

I **rivelatori** sono costituiti da due blocchi:

- il blocco anteriore racchiude in sé un cristallo scintillatore e un tubo fotomoltiplicatore;
- il blocco posteriore è formato dal preamplificatore.

Lo **scintillatore** consiste in un cristallo di ioduro di sodio drogato con Tallio (NaI(Tl)) di 2''x 2'' contenuto in un cilindro d'alluminio. Nel momento in cui i fotoni da 511 KeV emessi dal ^{22}Na incidono sul cristallo, comportano una transizione degli elettroni dalla banda di valenza alla banda di conduzione. Poiché nei cristalli puri il processo di diseccitazione, che vede il ritorno

dell'elettrone nella banda di valenza, è accompagnato dall'emissione di un fotone che generalmente non è nel range del visibile, si inseriscono delle impurezze nei cristalli, dette attivatori, che comportano la formazione di stati intermedi nella banda proibita presente tra quella di valenza e quella di conduzione. L'elettrone durante il processo di diseccitazione può così passare attraverso tali stati intermedi per ritornare nella banda di valenza, e dal momento che l'energia di tali stati è inferiore rispetto all'energia complessiva della banda proibita, la transizione dell'elettrone può dar luogo all'emissione di un fotone visibile, utilizzabile per il processo di scintillazione.

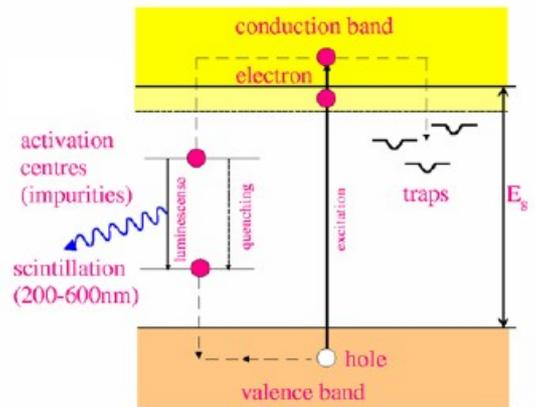


Figura 5: meccanismo di scintillazione dei cristalli inorganici.

L'onda di luce in uscita dagli scintillatori deve essere convertita in un corrispondente segnale di corrente. A tale scopo viene impiegato un **tubo fotomoltiplicatore**, la cui struttura è rappresentata in Figura 6.

Il fotomoltiplicatore consiste in due parti principali:

- fotocatodo;
- moltiplicatore di elettroni.

Il **fotocatodo** permette di convertire i fotoni di luce incidenti in elettroni a bassa energia. In realtà questo passaggio può essere descritto più nel dettaglio, come conseguenza di tre step:

- assorbimento del fotone incidente e trasferimento dell'energia ad un elettrone del materiale fotoemissivo;
- migrazione dell'elettrone verso la superficie del fotocatodo;
- fuga dell'elettrone dalla superficie del fotocatodo.

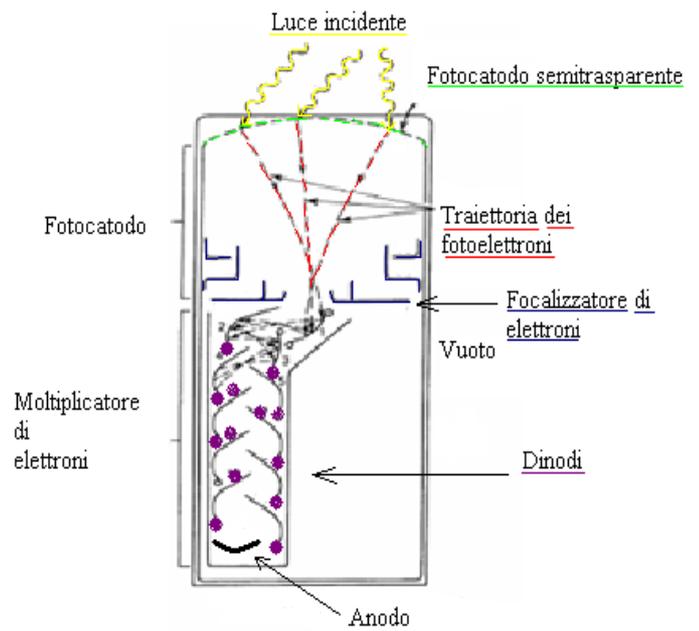


Figura 6: struttura di un tubo fotomoltiplicatore.

L'energia trasferita dal fotone di luce incidente (proveniente dallo scintillatore) all'elettrone, nel primo punto, viene persa in parte nelle collisioni tra i vari elettroni durante il seguente processo di migrazione. Nell'ultimo step, l'energia posseduta dall'elettrone deve essere sufficientemente elevata per poter superare la barriera di potenziale presente nell'interfaccia tra il materiale del fotocatodo e il vuoto presente nella seconda parte del tubo fotomoltiplicatore; la condizione di vuoto è necessaria per agevolare l'accelerazione degli elettroni a bassa energia verso i dinodi. Generalmente la barriera di potenziale finita presenta un valore di circa 3 eV / 4 eV per i metalli, ma può essere anche più bassa, circa 1.5 eV / 2 eV , per alcuni semiconduttori. La presenza della

barriera di potenziale perciò impone un'energia minima per i fotoni di luce incidenti, il che implica che tutti i fotocatodi presentino una soglia di cut-off per la lunghezza d'onda (in genere interessa la porzione di spettro elettromagnetico del rosso/vicino infrarosso). Perciò l'elettrone sfugge dalla superficie del fotocatodo se e solo se:

$$E_y > W$$

dove W = barriera di potenziale o lavoro di estrazione.

La parte del tubo fotomoltiplicatore in cui avviene la moltiplicazione degli elettroni, e che sfrutta il processo di emissione secondaria di elettroni, è il **moltiplicatore di elettroni**.

Queste particelle che, avendo energia sufficientemente alta nonostante le perdite energetiche dovute alle collisioni durante il processo di migrazione, riescono ad oltrepassare la barriera di potenziale e ad uscire dal fotocatodo, vengono accelerati e portati ad urtare la superficie di un elettrodo detto **dinodo**.

Gli elettroni provenienti dal fotocatodo vengono attratti verso il primo dinodo con un'accelerazione data dal potenziale (positivo) a cui questo si trova. La differenza di potenziale viene creata mediante un **generatore di tensione** con il quale vengono alimentati i fotomoltiplicatori. In genere il valore ideale di tensione da fornire è di circa 800 Volt, ma dal momento che a seconda del generatore in dotazione tale valore può cambiare, prima di iniziare con le misurazioni andremo a stimarlo sperimentalmente.

Il fattore di moltiplicazione del singolo dinodo può essere definito come:

$$\delta = \frac{\text{numero di elettroni secondari emessi}}{\text{numero di elettroni primari incidenti}}$$

ed è circa del 20% - 30%. Gli elettroni secondari prodotti presso la superficie del primo dinodo, possiedono ancora un'energia bassa, tipicamente di pochi eV. Risulta abbastanza semplice indirizzarli per mezzo di un campo elettrico statico presente tra i vari dinodi, presso il dinodo successivo. Questo processo si ripete più volte, finché dopo N passaggi, tutti gli elettroni secondari prodotti vengono raccolti presso l'**anodo**. Il guadagno complessivo del fotomoltiplicatore è dato da:

$$G_{tot} = \alpha \delta^n$$

dove α è la frazione di fotoelettroni raccolti dalla struttura del moltiplicatore (~ 1 per i dinodi), ed in genere per i dinodi $\delta = 5$.

Il segnale in uscita dal fotomoltiplicatore, in pratica, è una carica complessiva Q che risulta ancora troppo piccola per poter ricavare direttamente da questa un impulso di tensione senza effettuare un passaggio intermedio di amplificazione: pertanto, è necessario utilizzare un **preamplificatore** che svolga la funzione d'interfaccia tra il rivelatore ed il resto della catena elettronica.

Nel nostro caso il preamplificatore è già incorporato nel rivelatore in dotazione. Il segnale di tensione in uscita dal preamplificatore risulta proporzionale alle carica liberata dalla radiazione incidente.

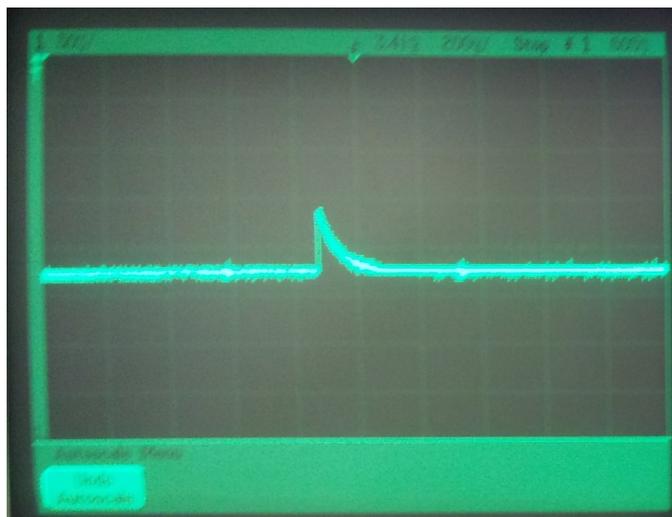


Figura 7: segnale in uscita dal preamplificatore, osservato all'oscilloscopio.

Essendo tale segnale ancora troppo piccolo per poter essere conteggiato, deve essere fatto passare attraverso un **amplificatore lineare**, il quale provvede a due mansioni:

- formatura dell'impulso;
- amplificazione.

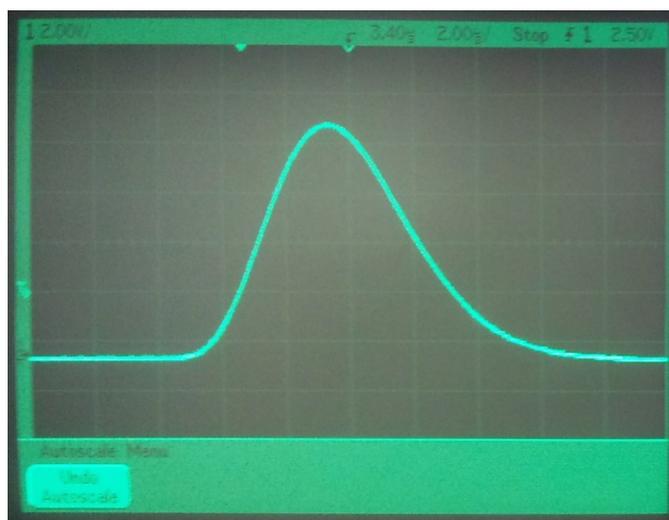


Figura 8: segnale in uscita dall'amplificatore, osservato all'oscilloscopio.

Le componenti fino ad ora descritte, come si può vedere in Figura 3, sono comuni ad entrambi i rami della catena elettronica. A questo punto, poiché l'ADC richiede in entrata un segnale di gate e un input lineare andremo a differenziare i due rami della catena.

Nel *ramo₁*, l'**impulso lineare** (che porta informazioni attraverso la sua ampiezza o attraverso la sua forma) in uscita dall'amplificatore viene trasformato in un **impulso logico** (che ha forma e ampiezza standard, e porta informazioni attraverso la sua presenza o la sua assenza); nel *ramo₂*, il segnale passa inalterato all'ADC.

Il componente della catena elettronica che permette la conversione lineare-logico è il **discriminante differenziale**, anche detto **SCA** (*Single Channel Analyzer*). Nel nostro caso lo SCA è incorporato nell'amplificatore lineare collegato ad uno dei due rivelatori. Lo SCA realizza la

conversione dell'impulso, se e solo se il segnale in uscita dall'amplificatore possiede un'ampiezza compresa tra due livelli precisi, ossia tra il LLD (*Lower Level Discriminator*) e l'ULD (*Upper Level Discriminator*), così che vengono selezionati solo gli impulsi che rientrano in un preciso range d'ampiezza.

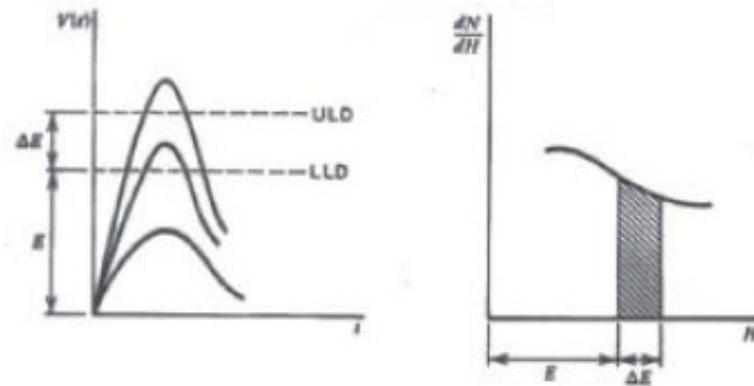


Figura 9: selezione dell'impulso nello SCA.

Attraverso lo SCA, quindi, si seleziona un range energetico che servirà da gate nella scheda di acquisizione ADC/MCA.

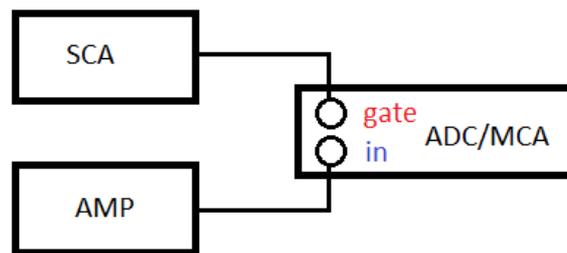


Figura 10: particolare della catena elettronica, ingresso ADC/MCA.

Il segnale di tensione $V(t)$, proveniente dal ramo₂ della catena, viene acquisito e digitalizzato dall'ADC (*Analogical to Digital Converter*) se e solo se è presente il segnale di gate.

L'ADC permette quindi la digitalizzazione dell'impulso, trasformando l'ampiezza H in un numero compreso tra 1 e 2^n (ossia il numero di bit dell'ADC). L'MCA (*Multi-channel Analyzer*) provvederà poi a distribuire i numeri forniti dall'ADC nei 2^n canali, dove ciascun canale rappresenta l'intervallo minimo ΔH , in cui si contano gli impulsi.

Capitolo 3

Calibrazione dell'apparato strumentale

L'esperimento condotto è finalizzato allo studio del funzionamento di un apparato PET, cioè è volto alla comprensione di come sia possibile risalire alla posizione di emissione dei fotoni d'annichilazione originati in seguito all'interazione dei positroni, generati dal decadimento del radiofarmaco iniettato nel corpo del paziente, con la materia. Quello che è necessario fare è ottenere spettri che forniscano informazioni sulla distribuzione energetica della radiazione incidente proveniente dalle diverse posizioni. A tale scopo risulta fondamentale avere una buona risoluzione energetica, ossia ottenere uno spettro energetico con un picco che sia il più stretto possibile, il che sta ad indicare che particelle della radiazione incidente con la medesima energia vengono registrate tutte in un canale energetico ben preciso. Purtroppo i rivelatori, non essendo ideali, non possiedono una risoluzione infinita, il che implica che il picco dello spettro presenta un certo allargamento come mostrato in Figura 11.

Questo è dovuto principalmente al **rumore statistico** ed al **rumore elettronico**, che rappresentano la principale fonte di deterioramento della risoluzione energetica.

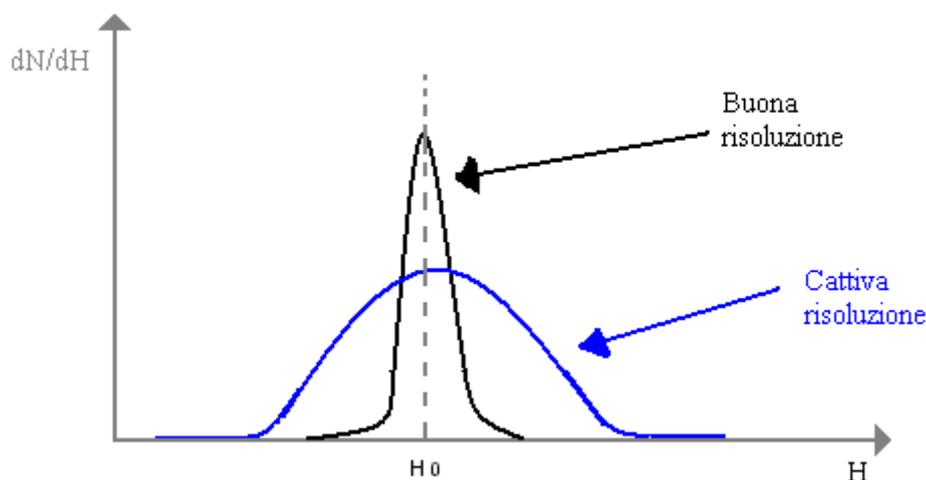


Figura 11: tipiche forme del picco dello spettro energetico, rispettivamente per una buona o cattiva risoluzione energetica.

Perciò prima di procedere con le misurazioni volte allo studio della posizione migliore ove collocare la sorgente radioattiva e alla distanza a cui disporre il rivelatore mobile per ottenere un buon numero di conteggi, risulta fondamentale attuare una caratterizzazione per entrambi i rivelatori in dotazione, al fine di porsi nella condizione di lavoro ottimale, che permetta di avere una buona risoluzione energetica.

I parametri che sono strettamente legati al rumore elettronico e statistico, e che quindi influiscono sulla risoluzione energetica, sono lo **shaping time** (tempo di formatura dell'impulso) e la **tensione** fornita ai fotomoltiplicatori. La relazione che intercorre tra shaping time e andamento della risoluzione energetica presenta dipendenza da due tipi di rumori elettronici:

- **rumore in serie:** include il rumore associato alla resistenza in serie e il rumore termico presso l'input del preamplificatore, e diminuisce all'aumentare del tempo di formatura del segnale;
- **rumore in parallelo:** include le fluttuazioni legate alla perdita di corrente all'interno del rivelatore e presso l'input del preamplificatore, e aumenta all'aumentare del tempo di formatura del segnale.

Poiché esiste un valore minimo per la combinazione del rumore in serie e in parallelo in funzione dello shaping time, come mostrato in Figura 12, cerchiamo di stimare il valore per il tempo di formatura che minimizza il rumore in serie e quello in parallelo, permettendo una risoluzione energetica migliore.

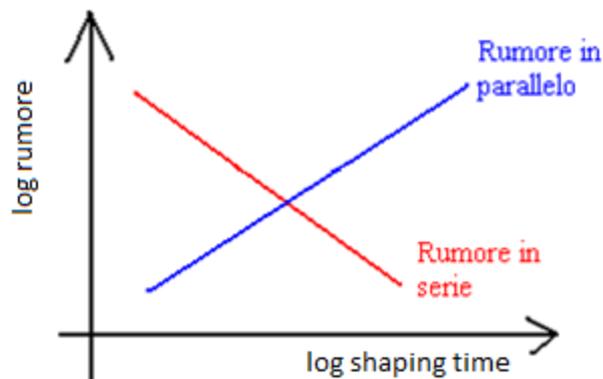


Figura 12: dipendenza della risoluzione energetica dallo shaping time.

La risoluzione energetica è influenzata anche dal **rumore statistico**. Questo deriva dal fatto che la carica Q generata all'interno del rivelatore, non è una variabile continua, ma è un numero discreto di portatori di carica. Dal momento che il processo di formazione dei portatori di carica è un processo statistico, è possibile utilizzare la statistica di Poisson per definire la risoluzione energetica. Se N è il numero complessivo di portatori di carica generati in media, le fluttuazioni statistiche su N saranno date dalla deviazione standard $\sigma = \sqrt{N}$, mentre l'ampiezza media dell'impulso risulta pari ad $H_0 = KN$, dove K è una costante di proporzionalità.

Poiché abbiamo che:

$$\sigma_H = K\sqrt{N}$$

e

$$FWHM = 2.35 \sigma_H = 2.35 K\sqrt{N}$$

la risoluzione energetica avrà come limite massimo:

$$R = \frac{FWHM}{H_0} = \frac{2.35K\sqrt{N}}{KN} = \frac{2.35}{\sqrt{N}}$$

da cui si evince che il valore di **R** dipende dal numero di portatori di carica **N**. La risoluzione perciò migliora se N aumenta. Risulta quindi conveniente aumentare il valore della **tensione applicata** ai capi del fotomoltiplicatore, in quanto ciò comporta una maggiore accelerazione degli elettroni che migrano dalla superficie del fotocatodo, e conseguentemente una maggiore possibilità di moltiplicare *a valanga* il loro numero. Per quanto appena visto, un maggior numero di elettroni secondari raccolti all'anodo comporta una **migliore statistica di conteggio**, il che giustifica perché aumentando la tensione fornita ai fotomoltiplicatori, si avrà una **risoluzione energetica migliore**. Esiste però un valore limite per la tensione massima applicabile, oltre il quale la risoluzione energetica non migliora più. Quello che faremo quindi sarà stimare anche il valore ottimale di tensione da fornire ad entrambi i fotomoltiplicatori.

3.1 Caratterizzazione del primo rivelatore

Per stimare lo shaping time corrispondente al rumore minimo, impostiamo arbitrariamente il potenziale applicato ai capi del fotomoltiplicatore su un valore che manterremo costante (**700 Volt**), e variamo di volta in volta il valore dello shaping time. Le misurazioni sono effettuate presso il picco più marcato dello spettro che teoricamente corrisponde a quello dei fotoni da 511 keV emessi dal ²²Na, ma che per il momento non coincide numericamente con tale valore poichè non è stata ancora effettuata la calibrazione dello spettro energetico.

Shaping time (µs)	FWHM (keV)	Ris %
0.5	37.19	7.35
1	43.83	7.33
2	46.80	7.25
3	47.39	7.39
6	49.70	7.56
10	48.71	7.60

Tabella 2: valutazione dello shaping time a potenziale costante pari a 700 Volt.

La risoluzione riportata in Tabella 2 è stata calcolata come:

$$Ris = \frac{FWHM}{E}$$

dove FWHM ed E rappresentano rispettivamente la larghezza a metà altezza dei picchi gaussiani e la posizione in cui è centrato del picco.

Ponendo in grafico i dati riportati in Tabella 2, si ottiene l'andamento mostrato in Grafico 1.

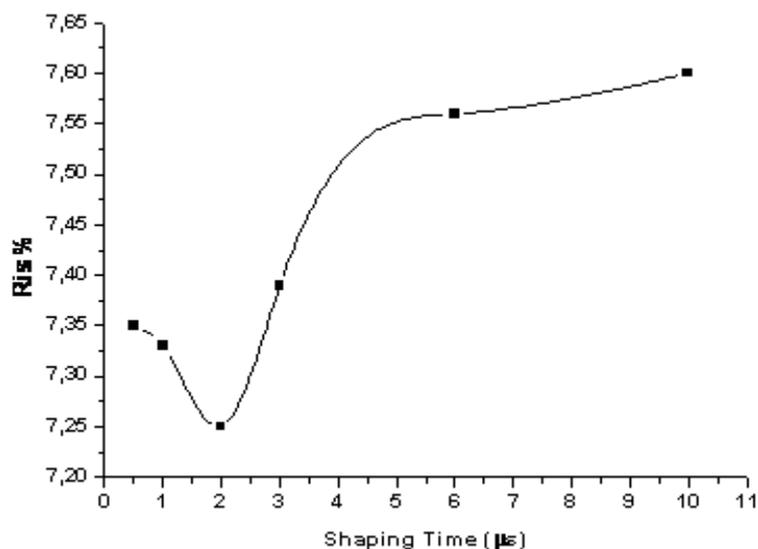


Grafico 1: andamento della risoluzione energetica in funzione dello shaping time.

Dal grafico riscontriamo che la risoluzione energetica migliore si presenta per un valore di shaping time pari a **2 μs**.

Passando alla stima del valore del potenziale idoneo per avere la migliore risoluzione energetica, si procede mantenendo costante lo shaping time (**2μs**) e variando di volta in volta la tensione applicata ai capi del fotomoltiplicatore, partendo da un valore minimo di 500 Volt sino ad un valore massimo di 900 Volt.

Volt	FWHM (keV)	Ris%
500	6.63	9.22
550	11.03	7.78
600	19.06	7.61
650	30.47	7.32
700	47.19	7.14
750	70.18	7.00
800	106.34	7.01
850	155.15	7.05
900	210.83	6.77

Tabella 3: Valutazione del potenziale a shaping time costante pari a 2 μs.

Grafichiamo i valori riportati in Tabella 3.

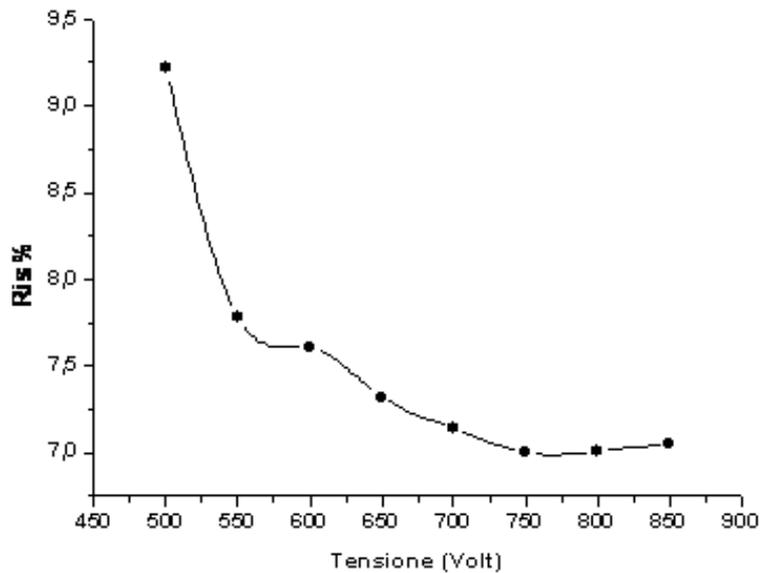


Grafico 2: andamento della risoluzione energetica in funzione del potenziale applicato.

Dal Grafico 2, si evince che la risoluzione migliore si riscontra per una tensione pari a **750 Volt**.

La calibrazione effettuata sul **primo rivelatore** perciò ha mostrato che i valori ottimali, che permettono di ottenere la risoluzione energetica migliore, sono: shaping time pari a **2 μ s** e potenziale pari a **750 Volt**.

3.2 Caratterizzazione del secondo rivelatore

Si procede in modo analogo a quello adottato per la calibrazione del primo rivelatore. I dati ottenuti sono i seguenti:

Shaping Time (μ s)	FWHM (keV)	Ris %
0.5	33.36	7.61
1	35.36	7.29
2	39.82	7.11
3	40.55	7.43
6	39.65	7.43
10	39.07	7.44

Tabella 4: valutazione dello shaping time a potenziale costante pari a 700 Volt.

Grafichiamo i valori riportati in Tabella 4.

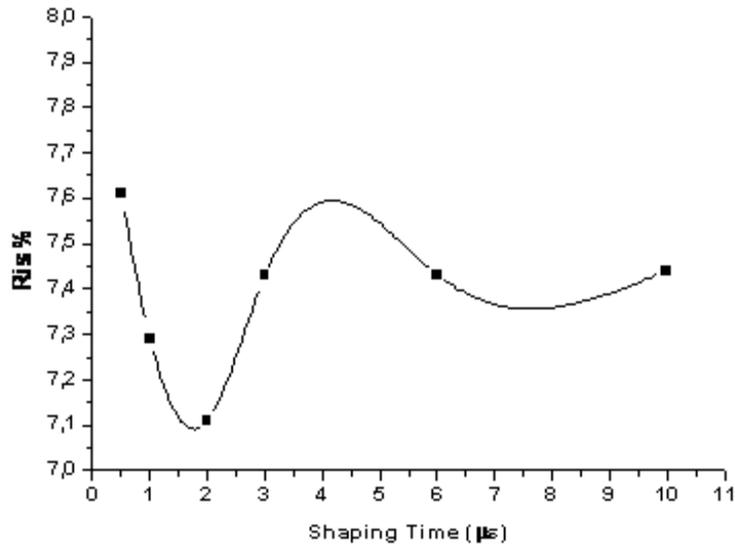


Grafico 3: andamento della risoluzione energetica in funzione dello shaping time.

Come per il rivelatore precedente, troviamo che lo **shaping time ottimale** corrisponde a **2μs**.

Passiamo ora alla stima del potenziale da applicare ai capi del fotomoltiplicatore per ottenere la migliore risoluzione energetica.

Volt	FWHM (keV)	Ris %
500	5.55	13.48
550	12.51	9.15
600	16.51	7.44
650	26.60	7.41
700	41.41	7.40
750	62.04	7.36
800	90.10	7.21
850	133.77	7.37
900	182.83	7.10

Tabella 5: Valutazione del potenziale a shaping time costante pari a 2μs.

Grafichiamo i valori riportati in Tabella 5.

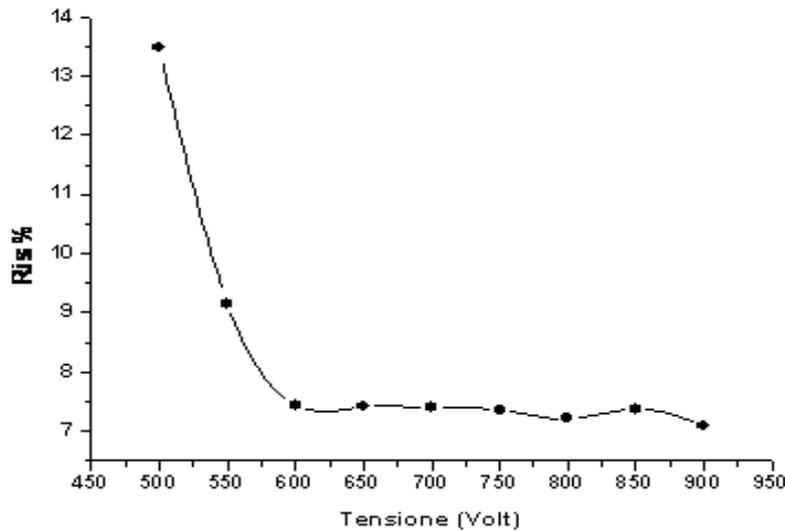


Grafico 4: Andamento della risoluzione energetica in funzione del potenziale applicato.

Per il secondo rivelatore riscontriamo che il potenziale da applicare per ottenere la migliore risoluzione energetica è pari ad **800 Volt**.

Riportiamo ora parte dei dati già presentati in Tabella 5, inserendo questa volta anche il valore del tempo di acquisizione degli impulsi da parte del rivelatore ed i rispettivi conteggi, con l'intento di constatare e mostrare che, mantenendo un tempo di acquisizione dati pressoché invariato, il numero di conteggi registrati risulta praticamente costante.

Volt	Ris%	tempo _{acq} (sec)	conteggi al sec. (c/s)
500	13.48	300.66	599.27
550	9.15	300.76	605.78
600	7.44	300.84	600.32
650	7.41	301.04	603.05
700	7.40	300.08	604.55
750	7.36	301.12	600.70
800	7.21	300.16	600.51
850	7.37	300.22	589.34
900	7.10	300.74	585.34

Tabella 6: Valutazione del potenziale a shaping time costante pari a $2\mu s$, con tempo di acquisizione e conteggi per secondo.

3.3 Calibrazione dello spettro energetico

Prima di procedere con le misure in coincidenza risulta necessario effettuare un ulteriore passaggio, ossia calibrare lo spettro energetico: infatti ciascun canale in cui viene collocato il segnale digitalizzato uscente dall'ADC non corrisponde al *vero* valore energetico.

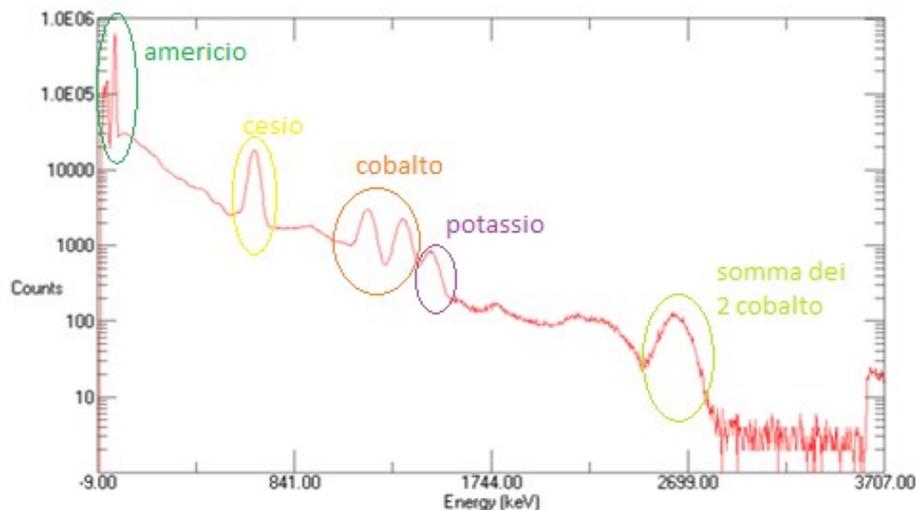
Una modalità che consente di realizzare la calibrazione dello spettro energetico consiste nell'utilizzare una sorgente multigamma di cui sono noti a priori i valori energetici dei γ emessi. Una volta registrato lo spettro energetico, visualizzeremo dei picchi e, conoscendo a quali γ corrispondono, sarà possibile settare i canali con i valori energetici corretti.

Gli isotopi radioattivi costituenti la sorgente multigamma utilizzata sono: ^{241}Am , ^{137}Cs , ^{60}Co e ^{40}K .

isotopo	E_γ (keV)
^{241}Am	59.54
^{137}Cs	662
^{60}Co	1173/ 1332
^{40}K	1405

Tabella 8: isotopo e corrispondente energia del γ prodotto

Essendo note a priori le energie dei gamma emessi, risulta possibile calibrare correttamente lo spettro energetico.



Spettro 1: Spettro per calibrazione, ovvero spettro energetico della sorgente multigamma.

Operativamente la calibrazione consiste nell'imporre l'energia corretta ad almeno 2 canali, così che *Maestro* di conseguenza setterà gli altri.

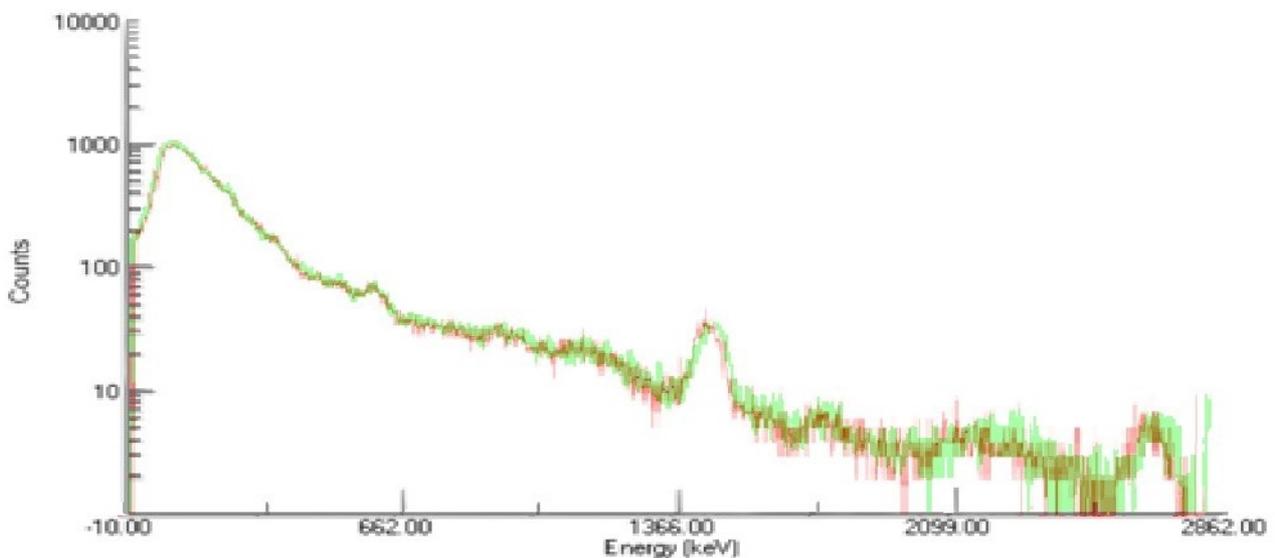
Nel nostro caso sono stati fissati i canali corrispondenti ai picchi più vicini a quello da 511 keV (ossia come riferimento sono stati imposti i picchi del cesio e del cobalto).

3.4 Studio del rumore di fondo

Si definisce **rumore** una qualsiasi fluttuazione indesiderata sovrapposta ad un segnale. Già in precedenza abbiamo visto che le misure sono affette da distorsioni dovute al **rumore statistico** ed al **rumore elettronico**. Un'altra tipologia di rumore che inevitabilmente influisce sulle misurazioni è il **rumore dovuto all'ambiente esterno**. Questo si genera nel primo step nella catena elettronica insieme al segnale e viene poi amplificato con questo, a differenza del rumore generato negli step successivi della catena di lettura (come il rumore in serie ed il rumore in parallelo) che risulta in genere molto più piccolo. Il rumore ambientale può derivare dai fotoni degli elementi radioattivi (naturalmente presenti in aria) che decadono (^{40}K ad esempio), o dai raggi cosmici che, direttamente o dopo aver fatto scattering Compton, vengono deviati verso il rivelatore e registrati come eventi *veri*. Risulta importante stimare quanto il rumore di fondo pesi sulle misure che andremo ad effettuare nei prossimi passaggi.

A tale proposito lasciamo acquisire i dati all'apparato di rivelazione, senza la presenza della sorgente, per un tempo sufficientemente lungo, in modo tale da ottenere spettri energetici che siano indice dell'influenza dovuta al rumore di fondo ambientale.

Abbiamo programmato *Maestro*^[1] con un ciclo tale da creare spettri in successione dopo aver acquisito conteggi per 3600 secondi. Lo scopo è vedere se e come varia il fondo ambientale durante l'arco della giornata e se viene influenzato da fattori meteorologici.



Spettro 2: sovrapposizione di due spettri ambientali raccolti in momenti diversi della giornata.

Dal confronto tra gli spettri ottenuti non sono state riscontrate differenze significative, pertanto si può affermare che il fondo rimane pressoché invariato.

Inoltre il risultato ottenuto mostra come, quantitativamente, tutte le misure che andremo a realizzare successivamente saranno influenzate dalle fluttuazioni dovute al rumore di fondo.

Capitolo 4

Misure in coincidenza

Per procedere con le misure in coincidenza è necessario fissare gli estremi della finestra energetica in modo da selezionare i fotoni con energia pari a 511 keV . Tale regolazione è stata fatta collegando l'output dell' Amp_1 e quello dello SCA all'oscilloscopio, per verificare che l'impulso logico includesse pienamente quello lineare. Fatto ciò, l'uscita dell'amplificatore è stata utilizzata come input nell'ADC/MCA mentre lo SCA fungeva da gate, ed è stata selezionata manualmente^[1] la soglia energetica minima di accettazione (lower energy level) e perciò la finestra stessa. Idealmente sarebbe ottimale che la finestra energetica fosse la più stretta possibile per includere nei conteggi solo i γ di 511 keV, tuttavia la conclusione sperimentale a cui si giunge è il valore adatto per la finestra energetica corrisponde a $\Delta E = [385 \text{ keV} - 610 \text{ keV}]$.

Si nota che tale finestra è stata scelta sufficientemente larga poiché un range ristretto comporterebbe una perdita nei conteggi, che influisce sulla risoluzione energetica peggiorandola.

Il passaggio successivo consiste nel sovrapporre temporalmente l'output lineare dell'amplificatore Amp_2 con quello logico dello SCA, che segue l' Amp_1 (Figura 8), in modo da ottenere misure in coincidenza temporale. A tale scopo è stato regolato il timing SCA, dal momento che lo shaping time del segnale lineare è già stato fissato secondo i criteri illustrati nel Capitolo 3.

Si procede collegando all'oscilloscopio, e visualizzando su due diversi canali, l'output dell' Amp_2 e quello dello SCA. Poiché i due segnali risultano temporalmente sfasati tra loro (Figura 12.a), si procede andando a modificare il timing SCA^[2] fino a che sull'oscilloscopio non compare la situazione riproposta in Figura 12.b. Per avere una buona sovrapposizione è stato necessario allungare complessivamente il segnale in uscita dallo SCA a 1 μs .

Monitorando con l'oscilloscopio la variazione della larghezza dell'impulso logico rispetto a quello lineare, è stato riscontrato che per avere una buona sovrapposizione era necessario formare un gate.

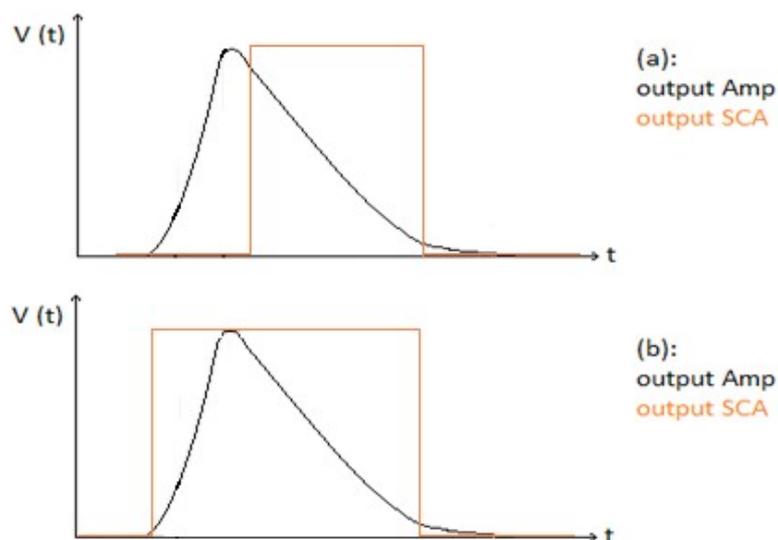


Figura 13: immagine esplicativa dei segnali visti all'oscilloscopio prima e dopo della modifica della durata dell'impulso logico.

4.1 Determinazione della posizione ottimale per la sorgente e i rivelatori

Il primo obiettivo che ci prefiggiamo è trovare la posizione ideale presso cui collocare la sorgente emettitrice al fine di registrare il maggior numero di conteggi.

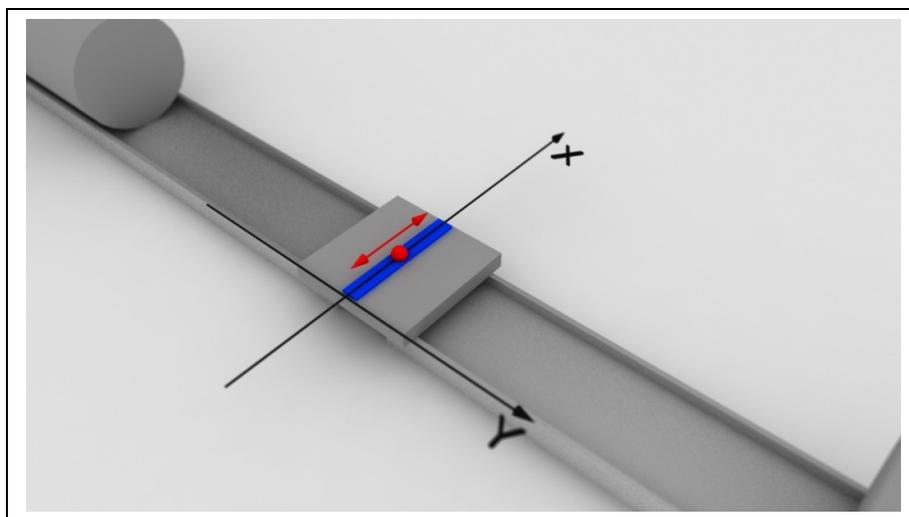


Figura 14: rappresentazione grafiche della configurazione dell'apparato per la miglior stima della posizione della sorgente.

Si procede posizionando i rivelatori^[3] sull'apposito sostegno, allineandoli frontalmente lungo lo stesso asse orizzontale, ed impostando il tempo d'acquisizione a 200 secondi^[4].

Si posiziona poi la sorgente in un punto che si assume come *punto zero*, si acquisisce lo spettro e si analizza il numero di conteggi al picco da 511 keV. Successivamente s'incrementa di volta in volta la posizione della sorgente di 2mm^[5] rispetto all'acquisizione precedente, annotando i conteggi che si presentano al picco alle diverse posizioni.

Come si evince dalla Tabella 9, la posizione ottimale per la sorgente (rispetto ai rivelatori posti in asse tra loro) che ci permette di raccogliere il maggior numero di eventi per secondo, corrisponde a **+14 mm** rispetto il *punto zero*. In tutte le applicazioni future questo punto corrisponderà all'origine del nostro sistema di riferimento.

Posizione della sorgente (mm)	Conteggi / s
0	359.91
2	357.39
4	359.91
6	354.85
8	361.98
10	357.28
12	358.85
14	366.36
16	358.76
18	356.65
20	359.91
22	354.62
24	363.31
26	358.70
28	358.80
30	361.16
32	353.54
34	355.45
36	350.89
38	352.58
40	351.73

Tabella 9: conteggi al picco rispetto all'incremento della posizione della sorgente.

A questo punto, andiamo a stimare la distanza dalla sorgente a cui devono essere collocati i rivelatori, sempre mantenendoli in asse tra loro; è necessario però raggiungere un compromesso tra il numero di conteggi registrato e la distanza, che rappresenta lo spazio fisico dove un paziente sottoposto ad un esame PET dovrebbe essere allocato. In Tabella 10 si nota che, come ci si aspettava, il rate di conteggi diminuisce man mano che ci si allontana dalla sorgente, in quanto l'angolo solido visto dal sistema di rivelazione diminuisce ($\Omega \propto 1/R^2$); tuttavia, ricordando che è necessario raggiungere il compromesso ideale tra il numero di conteggi e la praticità, si conclude che la distanza ottimale a cui collocare i rivelatori dalla sorgente è pari a **25 cm** (e i rivelatori, quindi, distano tra loro di 50 cm).

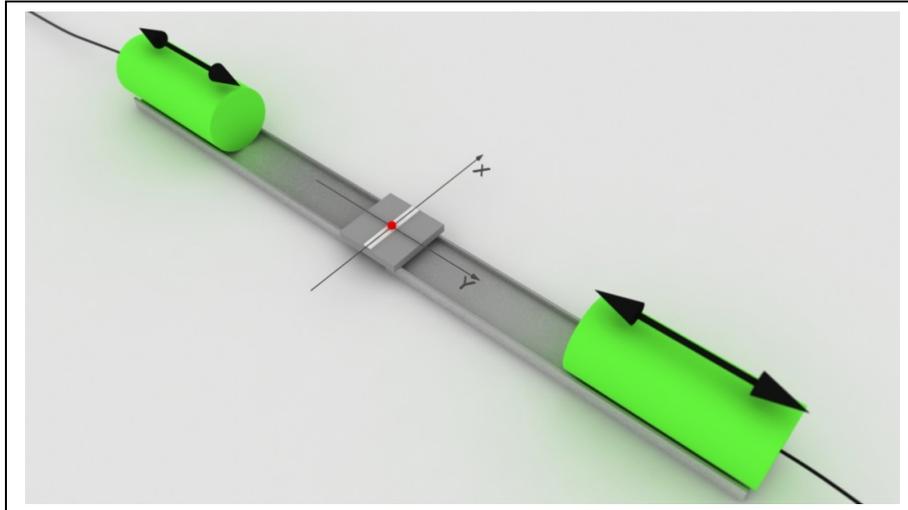


Figura 15: rappresentazione della configurazione strumentale per la valutazione della miglior posizione dei rivelatori.

Distanza riv.-sorg. (cm)	Conteggi/s
5	19.08
7.5	11.67
10	8.26
12.5	7.19
15	5.99
17.5	5.67
20	4.34
22.5	2.91
25	2.53
27.5	2.25
30	1.82
32.5	1.36
35	1.39
37.5	1.24
40	1.07

Tabella 10: conteggi al picco rispetto all'incremento della distanza rivelatori-sorgente

4.2 Valutazione delle spurie

Il contributo al background, oltre ad essere influenzato dal fondo ambientale, è dato anche da altri conteggi chiamati *spurie*. Le spurie consistono nella rivelazione in contemporanea di due fotoni scorrelati tra loro, ossia che non sono originati dallo stesso evento di annichilazione, che arrivano contemporaneamente ai rivelatori producendo una misura di falsa coincidenza.

Il valore del rate delle spurie può essere stimato avendo noto il rate dei rivelatori (R_1 e R_2) e la larghezza della finestra temporale (ΔT), secondo la formula:

$$R_{spuris} = \Delta T \cdot R_1 \cdot R_2 = 0,029$$

dove $R_1 = 164,40 \text{ cps}$, $R_2 = 173,90 \text{ cps}$ e $\Delta T = 1\mu s$.

Un'altra modalità che consente di stimare il rate delle spurie consiste nell'inserire un tempo di delay molto grande dopo lo SCA.

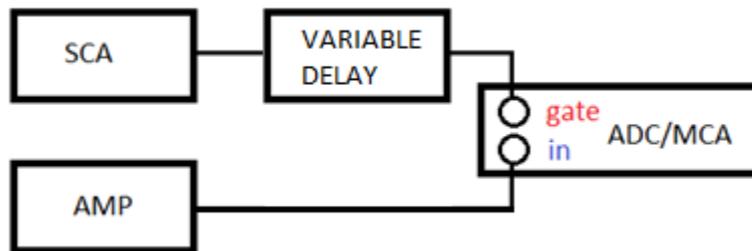


Figura 13: particolare della catena elettronica, posizionamento di un eventuale delay.

Realizzare sperimentalmente questo passaggio non è stato possibile in quanto il laboratorio era sprovvisto di uno strumento che permettesse di sfasare temporalmente il segnale di gate ed il segnale lineare a nostra discrezione. Pertanto ci siamo limitate ad un calcolo prettamente matematico di R_{spuris} .

Capitolo 5

Ricostruzione della posizione della sorgente

Come in precedenza accennato, uno degli aspetti principali da analizzare è la procedura utilizzata per risalire, noti gli spettri energetici e la posizione dei rivelatori, alla posizione della sorgente emettitrice dei fotoni d'annichilazione. Questo, nello svolgimento di un esame medico effettivo, coincide con la determinazione della collocazione del tessuto/organo affetto dalla neoplasia, e quindi della posizione in cui si è maggiormente concentrata la molecola metabolicamente attiva legata all'isotopo radioattivo.

Per capire come affrontare il problema, è necessario studiare le caratteristiche geometriche del sistema di rivelazione a disposizione: la sorgente è posta nel piano xy , nel punto di coordinate $(x_s, 0)^{[1]}$ supposto incognito, mentre i due rivelatori (identici ^[2]) possono muoversi lungo una circonferenza di raggio R attorno all'origine del sistema di riferimento.

Fissiamo la posizione del rivelatore 1, e il punto di intersezione tra il suo asse di simmetria e la circonferenza di raggio R avrà coordinate $(0, R)$; il rivelatore 2, che viene spostato di volta in volta lungo la circonferenza, descriverà un angolo β sotteso dal suo asse di simmetria, passante per l'origine degli assi, e l'asse delle y , e la sua intersezione con la circonferenza avrà coordinate (x_0, y_0) .

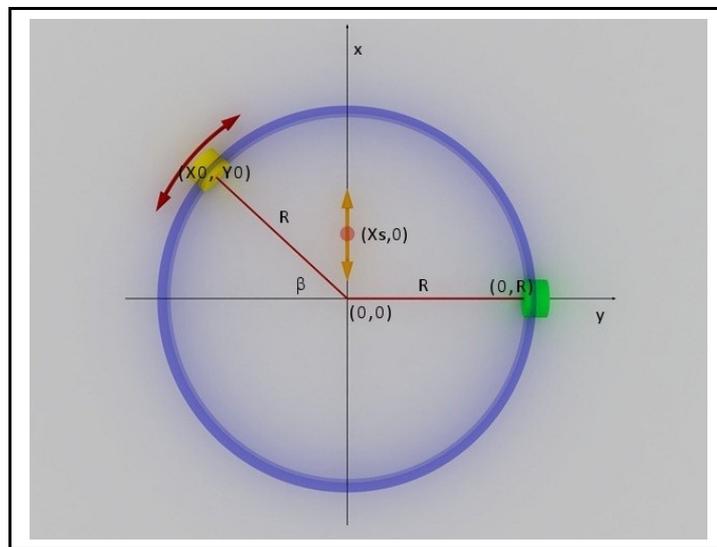


Figura 17: rappresentazione esplicativa della geometria del sistema rivelatori-sorgente.

A questo punto, nota la geometria, ci chiediamo come sia possibile dai dati sperimentali raccolti, che sono spettri energetici relativi a un sistema di coincidenza al variare dell'angolo β , determinare la coordinata incognita x_s .

Simulando un esame PET abbiamo che la sorgente emette positroni e quindi, di tutto lo spettro raccolto, ci interesseranno i picchi dei fotoni di annichilazione di energia 511keV.

Assumendo che la sorgente si muova lungo l'asse delle x e, andando a studiare come varia il numero di conteggi dei 551keV- γ al variare dell'angolo β , intuitivamente ci aspetteremo un massimo nel numero di conteggi quando la sorgente sarà allineata con i centri della superficie frontale dei rivelatori e, rispetto a questo, un'attenuazione simmetrica nell'intensità dei conteggi per angoli maggiori o minori (vedi Figura 18).

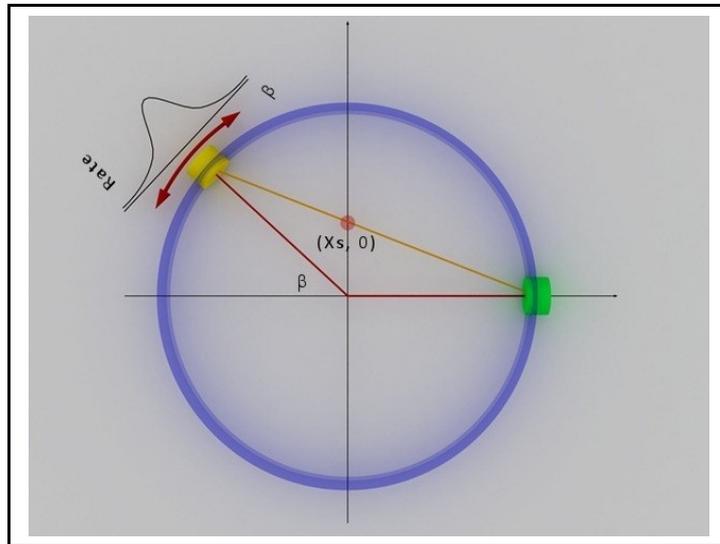


Figura 18: rappresentazione esplicativa dell'andamento dei conteggi rispetto alla geometria del sistema rivelatori-sorgente.

Nota quindi l'angolo presso il quale si riscontra il numero massimo di conteggi, è ora possibile risalire alla posizione della sorgente tramite la seguente relazione geometrica:

$$x_s = R \tan \frac{\beta}{2}.$$

Sperimentalmente risulta difficile ricostruire puntualmente tutta la curva, in parte a causa del tempo necessario per la raccolta degli spettri^[3] ed in parte a causa dei limiti strumentali^[4]; pertanto quello che è possibile osservare dai dati sperimentali raccolti è solamente l'andamento simmetrico e a *campana* dei conteggi rispetto alla posizione del rivelatore, e individuare in modo approssimativo l'intervallo in cui è più probabile che si trovi l'angolo da noi cercato. L'aspetto più complicato resta tuttavia comprendere come determinare in modo preciso e corretto la posizione presso cui si presenta il maggior numero di conteggi. Per risalire a tale valore, è possibile adottare due approcci diversi.

5.1 Soluzione analitica

Il primo approccio è di tipo analitico, e consiste nel ricavare la funzione che descrive più correttamente l'andamento del *rate di conteggi in funzione dell'angolo*, utilizzarla per fittare i dati ottenuti sperimentalmente, e conseguentemente risalire alla posizione del massimo.

Tale funzione può essere estratta procedendo con un'analisi geometrica del problema: il numero di conteggi è proporzionale all'angolo solido visto dal rivelatore, pertanto andiamo a ricavare il valore di tale angolo (Ω_1 e Ω_2).

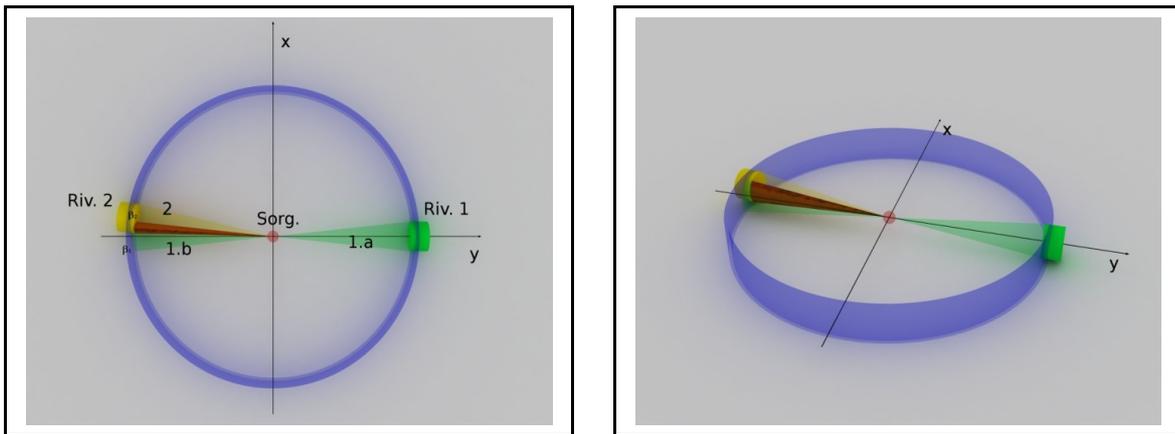


Figura 19: rappresentazione degli angoli solidi visti dai rivelatori rispetto alla posizione centrale della sorgente.

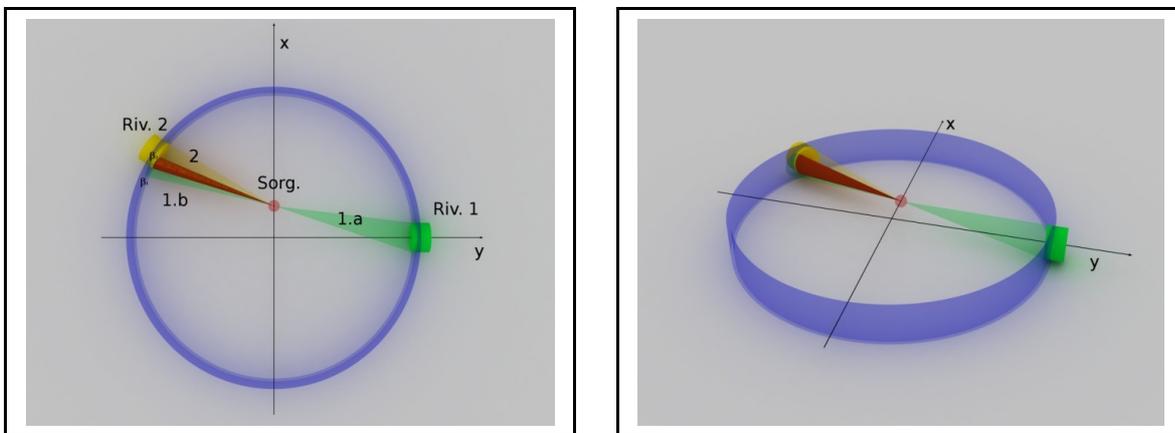


Figura 20: rappresentazione degli angoli solidi visti dai rivelatori rispetto alla posizione decentrata della sorgente.

Una volta fissata la posizione della sorgente, verrà determinato di conseguenza l'angolo solido visto dal rivelatore Riv_1 , che nella Figura è rappresentato dal "cono verde" indicizzato come 1.a. Il *cono verde* indicizzato con 1.b rappresenta lo spazio di accettazione dei fotoni back-to-back e viene determinato anch'esso semplicemente dalla posizione della sorgente rispetto al rivelatore Riv_1 . Dallo studio della geometria del problema si ricava che l'angolo solido visto dal rivelatore Riv_1 sarà dato da:

$$\Omega_1 = \frac{\text{superficie efficace}}{(\text{distanza})^2} = \pi r^2 \frac{R}{(x_s^2 + R^2)^{3/2}}$$

dove: R = raggio della circonferenza (25 cm) e πr^2 = area della superficie frontale dei rivelatori con $r = 2.5$ cm.

Il cono giallo invece rappresenta l'angolo solido visto dal rivelatore Riv_2 , ed è dato da:

$$\Omega_2 = \frac{\text{superficie efficace}}{(\text{distanza})^2} = \pi r^2 \frac{\cos[\arcsin(\frac{x_s \cos \beta}{\sqrt{(R \cos \beta)^2 + (R \sin \beta - x_s)^2}})]}{(R \cos \beta)^2 + (R \sin \beta - x_s)^2}$$

Quello che dobbiamo rivelare sono esclusivamente le coppie di fotoni che arrivano simultaneamente sui rivelatori, pertanto la funzione da ricavare deve esprimere la variazione dell'intersezione dei due angoli solidi (in figura evidenziata in rosso) in funzione delle variazioni dell'angolo β . Operativamente, quindi, dobbiamo fare la convoluzione^[5] tra Ω_1 e Ω_2 .

Dal momento che Ω_1 , non dipendendo da β , risulta essere una funzione costante una volta fissata la posizione della sorgente x_s , se definiamo gli angoli β_1 e β_2 (legati esclusivamente alla geometria), si ottiene la convoluzione tra una funzione a gradino e Ω_2 , il quale invece presenta dipendenza da β . Sebbene l'operazione di convoluzione sia qualcosa di ben definito a livello matematico, il risultato, ottenuto con il software Mathematica, è qualcosa di difficilmente utilizzabile a livello pratico; pertanto, abbiamo abbandonato l'idea di ricavare una funzione analitica per passare alla costruzione puntuale della stessa funzione grazie a una simulazione dell'esperimento in corso mediante il calcolatore.

5.2 Simulazione Montecarlo

Utilizzando il linguaggio C++, abbiamo programmato l'elaboratore in modo tale da ottenere una simulazione del nostro esperimento. Andiamo ad illustrare brevemente come si comporta il programma^[6].

Abbiamo una sorgente puntiforme nella posizione x_s che emetterà in un angolo solido di 4π , pertanto dichiariamo due variabili angolari, φ e θ , che definiranno l'orientazione di emissione del fotone nello spazio 3D e, in particolare, questi angoli saranno associati ad una funzione di generazione di numeri casuali. Allora è evidente che i fotoni back-to-back staranno sulla retta di equazione:

$$\begin{aligned} x &= x_s + t \sin \theta \cos \varphi \\ y &= t \sin \theta \sin \varphi \\ z &= t \cos \theta \end{aligned}$$

I nostri rivelatori saranno rappresentati, nella simulazione, da due piani di equazioni:

$$\begin{aligned} \text{rivelatore1 (fisso):} & \quad y = -R \\ \text{rivelatore2:} & \quad x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$

dove la prima equazione rappresenterà il rivelatore fisso, mentre la seconda descriverà il piano tangente alla circonferenza di raggio R.

A questo punto, ossia una volta generati gli angoli in modo casuale e quindi definita la retta, si va a fare l'intersezione tra la retta e i due piani e scrivendo quest'operazione in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sin\theta\cos\varphi/\cos\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta\sin\varphi/\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 + y_0^2 \\ x_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sin\theta\cos\varphi/\cos\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta\sin\varphi/\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ x_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

E' necessario a questo punto procedere con una fase di controllo, ossia bisogna verificare se il punto di intersezione ricade nel raggio della superficie del rivelatore; se questo controllo viene superato, allora il conteggio viene tenuto buono e andrà ad incrementare di un'unità l'altezza dell'istogramma relativo ad un certo angolo, altrimenti verrà rigettato.

Per ogni angolo β , il cui passo è una variabile che posso decidere arbitrariamente, il mio programma genererà N coppie (φ, θ) e alla fine del ciclo restituirà il numero di coppie che hanno passato il controllo.

Il programma alla fine della simulazione descriverà puntualmente l'andamento del rate di conteggi in funzione di β , e potremo così determinare la posizione della sorgente. Questa descrizione sarà tanto più accurata quanto più alta è la statistica e per passi angolari sufficientemente piccoli.

Il risultato ottenuto sfruttando questo programma ha fornito esiti che si mostrano in buon accordo con la realtà, seppur nella simulazione non siano state tenute in considerazione alcune situazioni che influiscono comunque sul processo di rivelazione, causando una discrepanza tra la simulazione (ideale) e la realtà. Tra queste possiamo citare ad esempio:

- **Il libero cammino medio dei γ :** i fotoni, nel momento in cui raggiungono i rivelatori, non interagiscono immediatamente, ma percorrono un certo spazio all'interno dello scintillatore, perdendo parte della loro energia.
- **Le dimensioni della sorgente:** nella simulazione la sorgente è assunta puntiforme, mentre nella realtà il sodio, vaporizzato in una sferetta di 1 mm di diametro, tende a trovarsi sulla superficie; pertanto dovrei generare le coppie (φ, θ) non in un punto ma su di una superficie sferica.
- **Mezzi interposti tra la sorgente e i rivelatori:** nel momento in cui il programma viene utilizzato per ricostruire la posizione della sorgente, quando questa viene circondata da mezzi interposti tra essa e i rivelatori, bisognerebbe simulare anche la presenza dei mezzi. Tuttavia dal momento che si presenta una semplice attenuazione nel numero di conteggi, e

non un cambiamento della forma della curva risultante, è possibile utilizzare il programma senza inserire questa condizione.

5.3 Misure in aria con posizione della sorgente incognita

Supponendo incognita, di volta in volta, la posizione della sorgente, riportiamo i dati raccolti e, utilizzando la simulazione Montecarlo, andiamo a determinare la posizione dell'isotopo radioattivo.

5.3.1 Posizione incognita x_1

In Tabella 11 raccogliamo i dati sperimentali ottenuti dagli spettri per la sorgente posizionata in $(x_1, 0)$.

β [°]	Cps ^[7]
12,5	0,06
10	0,07
7,5	0,68
5	1,51
0	3,02
-5	1,57
-7,5	0,58
-10	0,09
-12,5	0,06

Tabella 11: dati sperimentali; intensità media del picco 511 keV rispetto all'angolo β .

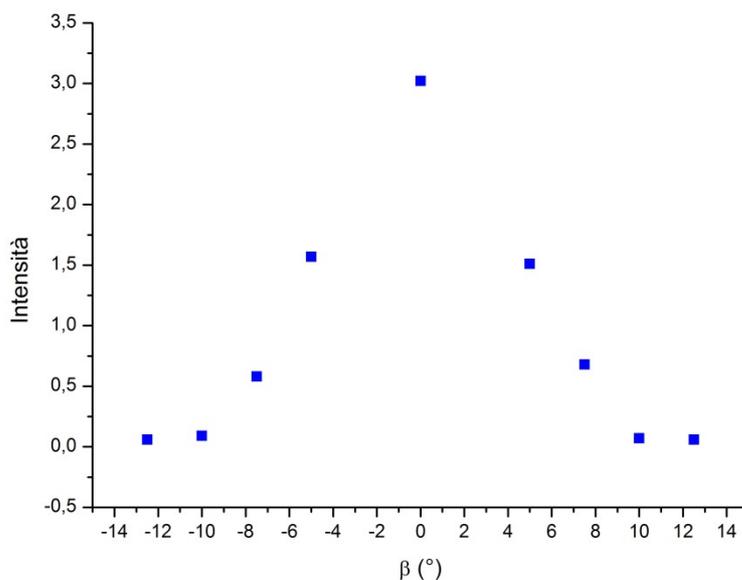


Grafico 5: misure in aria con sorgente decentrata in $(x_1, 0)$.

Sebbene supponiamo la posizione della sorgente incognita, in realtà, poiché siamo noi ad andare a riporre la sorgente sull'apposito supporto, siamo in grado di misurarla con un calibro.

In questo caso abbiamo allocato la sorgente nella posizione centrale e, in accordo con quanto atteso, dal grafico 5 possiamo vedere che il picco di conteggi si trova pressoché nella posizione corrispondente a $\beta = 0$ e quindi per la relazione che lega l'angolo alla posizione della sorgente

$$x_s = R \tan \frac{\beta}{2}$$

abbiamo che $x_s \sim 0$. Da questa curva sperimentale possiamo solamente trarre delle considerazioni grossolane; per individuare con precisione la posizione della sorgente dobbiamo andare a lanciare diverse simulazioni Montecarlo (angolo.cpp, in Allegato), andando a modificare di volta in volta la posizione della sorgente di un passo di mezzo millimetro, e poi con un test del χ^2 andremo a valutare quella che ci darà il miglior accordo con i dati sperimentali.

Tuttavia, prima di svolgere tutta l'analisi relativa alla determinazione della posizione della sorgente e della sua relativa incertezza, andiamo a riportare il risultato di una singola simulazione.

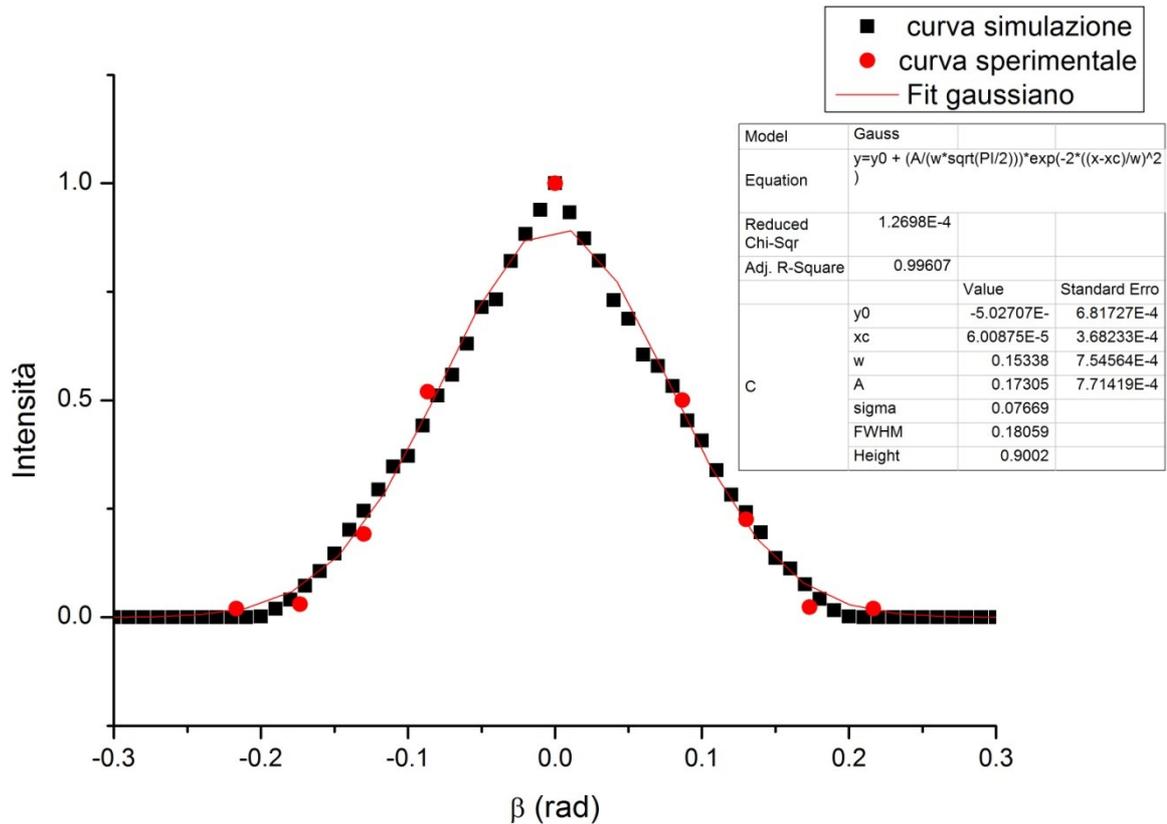


Grafico 6: simulazione montecarlo imponendo la sorgente nella posizione **(0,0)** con fit gaussiano.

La distribuzione, che noi andiamo a descrivere puntualmente, come possiamo vedere dai parametri di fit riportati sul grafico 6, può essere ben approssimata ad una gaussiana.

Dai parametri di fit, vediamo che il centroide e il suo errore sono rispettivamente:

$$\bar{\beta} = 6,0 * 10^{-5} \pm 3,6 * 10^{-4} rad$$

Propagando l'errore sull'angolo e supponendo che la distanza dalla sorgente (R) non sia affetta da incertezze, otteniamo:

$$x_s = 0,001 \pm 0,005 cm$$

E' evidente che questo tipo di analisi sovrastima la precisione nella determinazione della posizione (dell'ordine delle decine di micron).

Nella simulazione Montecarlo i parametri che possiamo cambiare sono: il numero di coppie prodotte (N), il passo angolare dello spostamento del centro del rivelatore mobile (p) e la posizione della sorgente $(x_s, 0)$. Facendo diverse prove abbiamo trovato un compromesso tra l'averne una buona statistica (N alto), un passo angolare piccolo e il tempo di esecuzione della simulazione, pertanto abbiamo impostato tutte le nostre simulazioni affinché generino un numero di coppie pari a $N = 10^6$ per ogni passo $p = 0.01 rad (\sim 0.5^\circ)$.

Lanciamo ora diverse simulazioni utilizzando N e p come parametri fissi e variando la posizione della sorgente emettitrice.

dati oss.			dati da simulazione montecarlo imponendo x_s										
Pos. ?	β (°)	β (rad)	Pos 0 cm	Pos 0,05 cm	Pos 0,10 cm	Pos 0,15 cm	Pos 0,20 cm	Pos 0,25 cm	Pos 0,30 cm	Pos 0,35 cm	Pos 0,80 cm	Pos 4,00 cm	Pos -0,05 cm
0,02	12,5	0,218	0,000	0,000	0,000	0,005	0,009	0,017	0,028	0,034	0,162	0,382	0,000
0,02	10	0,174	0,076	0,093	0,104	0,124	0,148	0,160	0,174	0,204	0,364	0,150	0,058
0,23	7,5	0,131	0,242	0,284	0,268	0,303	0,322	0,348	0,381	0,411	0,592	0,021	0,232
0,50	5	0,087	0,533	0,573	0,565	0,579	0,630	0,687	0,681	0,711	0,917	0,000	0,491
1,00	0	0,000	1,000	0,985	0,965	0,920	0,915	0,925	0,857	0,840	0,602	0,000	1,000
0,52	-5	-0,087	0,511	0,482	0,462	0,443	0,436	0,433	0,388	0,366	0,188	0,000	0,554
0,19	-7,5	-0,131	0,245	0,245	0,211	0,181	0,180	0,167	0,143	0,129	0,012	0,000	0,277
0,03	-10	-0,174	0,072	0,058	0,054	0,038	0,026	0,012	0,016	0,004	0,000	0,000	0,091
0,02	-12,5	-0,218	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		χ^2_{ridotto}	0,011	0,015	0,014	0,017	0,023	0,033	0,043	0,072	0,285	0,823	0,013

Tabella 12: confronto tra dati sperimentali e dati da simulazione con relativo accordo.

Possiamo vedere dai dati riportati in tabella che la sorgente emettitrice si trova ben posizionata nell'origine del nostro sistema di riferimento, quindi $x_1 = 0,00 \text{ cm}$.

La sorgente è stata da noi posizionata secondo la seguente modalità: abbiamo previamente segnato sul piedistallo la posizione x_s e poi abbiamo collocato la targhetta contenente la sorgente; quindi, prima dello svolgimento dell'esperimento, sappiamo l'effettiva collocazione spaziale. Tuttavia, durante la presa delle misure, è possibile che subentrino fattori che vanno a modificare tale posizione (urto del banco di misura, etc...); il rivelatore quindi servirà da feedback su tale misura.

Tenendo conto dei $\tilde{\chi}^2$ e dell'accordo delle simulazioni con i dati sperimentali, come si può vedere nel Grafico 7, stabiliamo che la posizione e la sua relativa incertezza sono $x_1 = 0,00 \pm 0,20 \text{ cm}$.

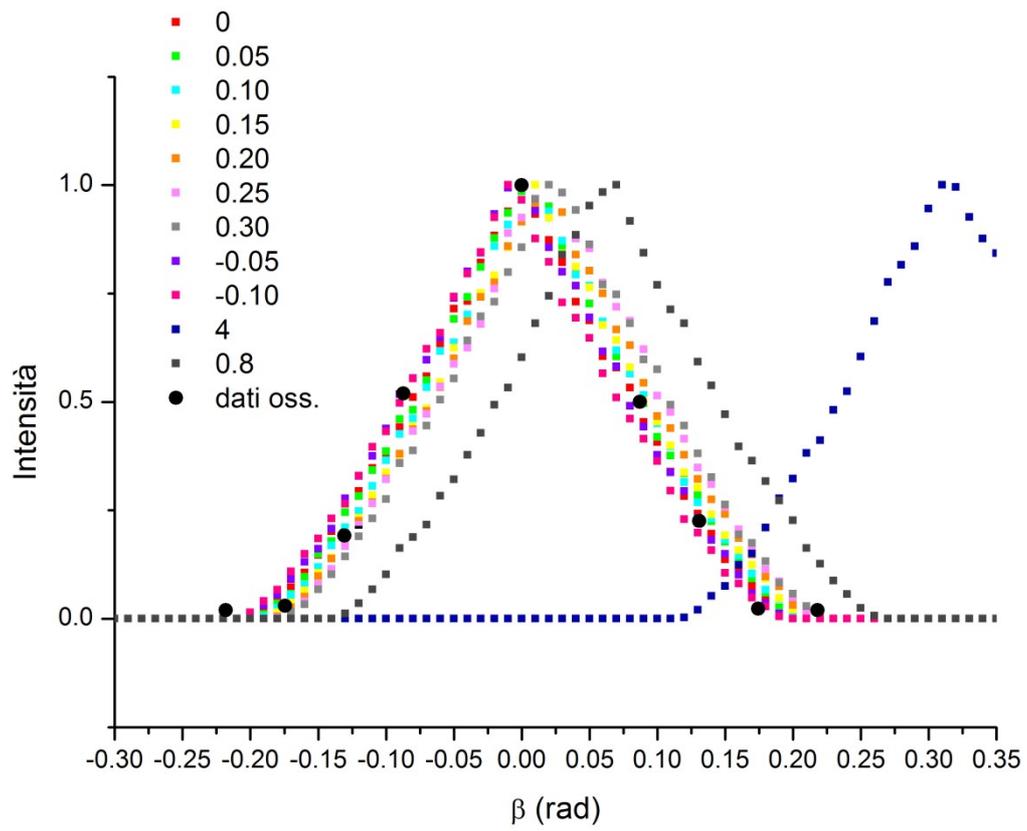


Grafico 7: confronto tra simulazioni Montecarlo e dati sperimentali.

5.3.2 Posizione incognita x_2

In Tabella 13 raccogliamo i dati sperimentali ottenuti dagli spettri per la sorgente posizionata in $(x_2, 0)$.

β	Cps
-5	237
-2,5	240
0	4303
2,5	23181
5	46391
7,5	64358
10	59046

Tabella 13: dati sperimentali; intensità media del picco 511 keV rispetto all'angolo β .

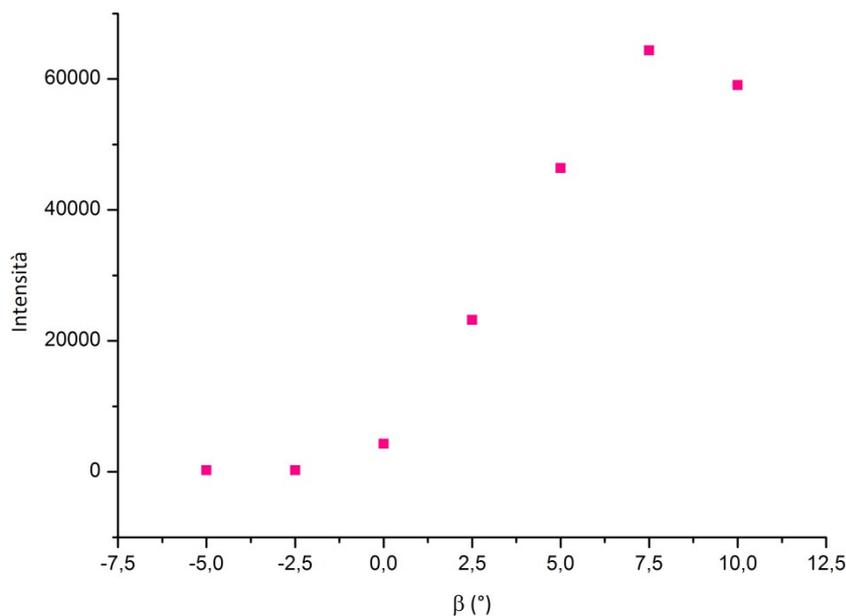


Grafico 8: misure in aria con sorgente decentrata in $(x_2, 0)$.

Prima di procedere alla ricostruzione della posizione, facciamo una breve considerazione sui dati riportati nel Grafico 8: come possiamo vedere le misure raccolte descrivono solo una parte della campana. Purtroppo a causa del malfunzionamento del generatore di tensione, che non era in grado di alimentare correttamente un ramo della strumentazione, non siamo riuscite a collezionare i dati mancanti per angoli β di valore maggiore di 10 gradi. Lanciamo ora diverse simulazioni e riportiamo i valori ottenuti in Tabella 14.

Pos. ?	β (°)	β (rad)	Pos 2,1 cm	Pos 2,05 cm	Pos 2,00 cm	Pos 1,95 cm	Pos 1,90 cm	Pos 1,87 cm	Pos 1,85 cm	Pos 1,83 cm	Pos 1,80 cm	Pos 1,75 cm	Pos 1,70 cm	Pos 1,20 cm	Pos 0,00 cm	
0,00	-5	-0,087	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,059	0,511
0,00	-2,5	-0,044	0,000	0,000	0,002	0,009	0,016	0,018	0,028	0,031	0,039	0,053	0,069	0,210	0,732	
0,07	0	0,000	0,097	0,106	0,115	0,135	0,146	0,16	0,167	0,162	0,163	0,203	0,215	0,437	1,000	
0,36	2,5	0,044	0,257	0,266	0,292	0,324	0,354	0,347	0,352	0,386	0,387	0,410	0,424	0,680	0,731	
0,72	5	0,087	0,458	0,488	0,518	0,528	0,556	0,583	0,594	0,622	0,630	0,666	0,669	0,940	0,533	
1,00	7,5	0,131	0,821	0,835	0,859	0,845	0,859	0,886	0,949	0,925	0,915	0,952	1,000	0,817	0,242	
0,92	10	0,174	0,963	0,960	0,912	0,908	0,894	0,863	0,894	0,856	0,838	0,801	0,815	0,567	0,076	
		χ^2_{ridotto}	0,049	0,039	0,028	0,028	0,023	0,021	0,018	0,017	0,017	0,024	0,026	0,155	2,578	

Tabella 14: confronto tra dati sperimentali e dati da simulazione con relativo accordo.

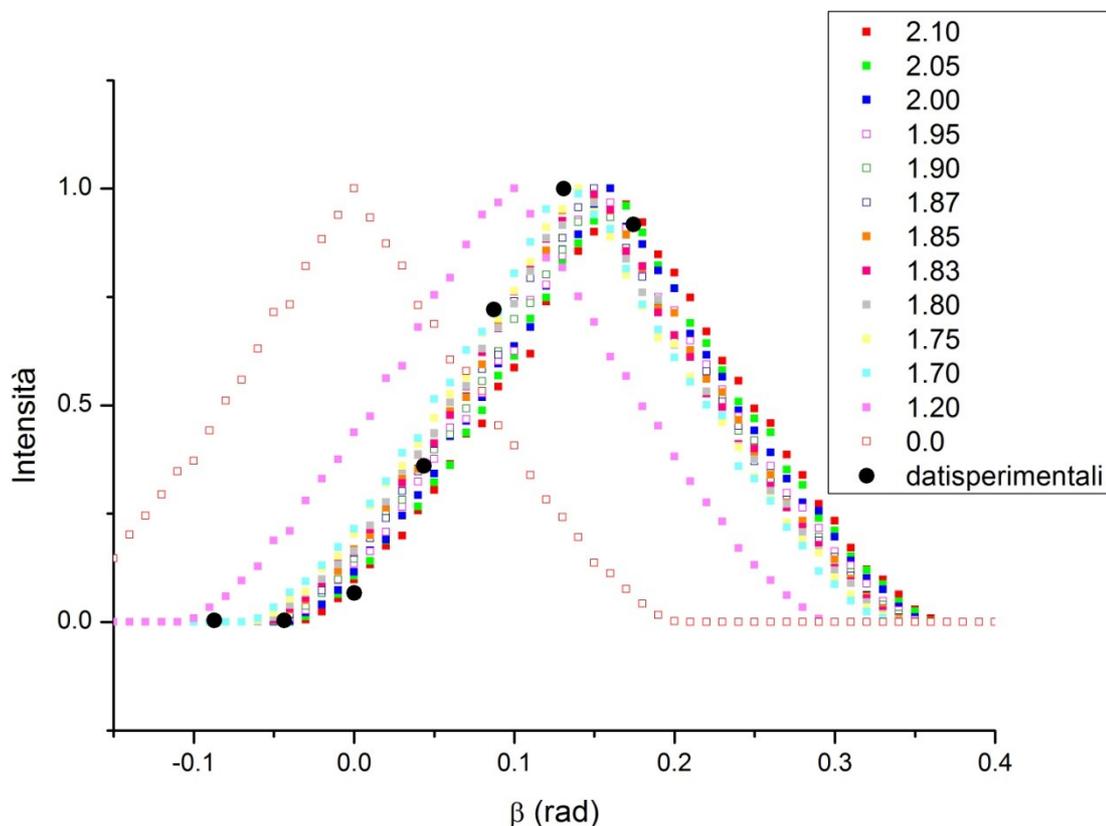


Grafico 9: confronto tra simulazioni Montecarlo e dati sperimentali.

La posizione di riferimento, in questa serie di misure, era $+2\text{ cm}$ rispetto al nostro sistema di riferimento. Andando a confrontare sul Grafico 9 la curva dei dati sperimentali con quella della simulazione a 2.00 cm vediamo che è presente un off-set verso valori più bassi; questo è quello che prima avevamo chiamato *funzione di feedback* del rivelatore: infatti, tra il posizionamento (fatto con la precisione del passo del millimetro) e l'inizio delle misure deve essere subentrato qualche fattore che ha causato lo spostamento della targhetta della sorgente e i cristalli hanno prontamente registrato questa variazione.

Dal confronto tra i valori del $\widetilde{\chi^2}$ e dal grafico possiamo dire che la sorgente si troverà tra $1,90\text{ cm}$ e $1,75\text{ cm}$, quindi

$$x_2 = 1,83 \pm 0,10\text{ cm}$$

5.3.3 Posizione incognita x_3

In Tabella 15 raccogliamo i dati sperimentali ottenuti dagli spettri per la sorgente posizionata in $(x_1, 0)$.

β	Cps
7,5	4120
10	22824
12,5	47746
15	67784
17,5	62295
20	39390
22,5	17589

Tabella 15: dati sperimentali; intensità media del picco 511 keV rispetto all'angolo β .

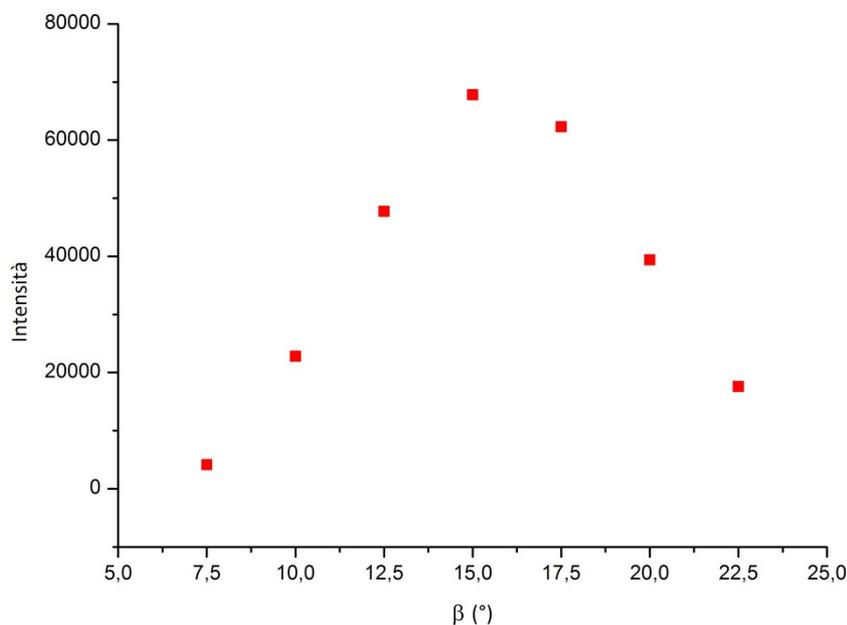


Grafico 10: misure in aria con sorgente decentrata in $(x_3, 0)$.

Questa volta avevamo decentrato la sorgente a $+ 4\text{ cm}$ rispetto all'origine. Chiaramente, da come si può vedere dal Grafico 11, è stata mal posizionata.

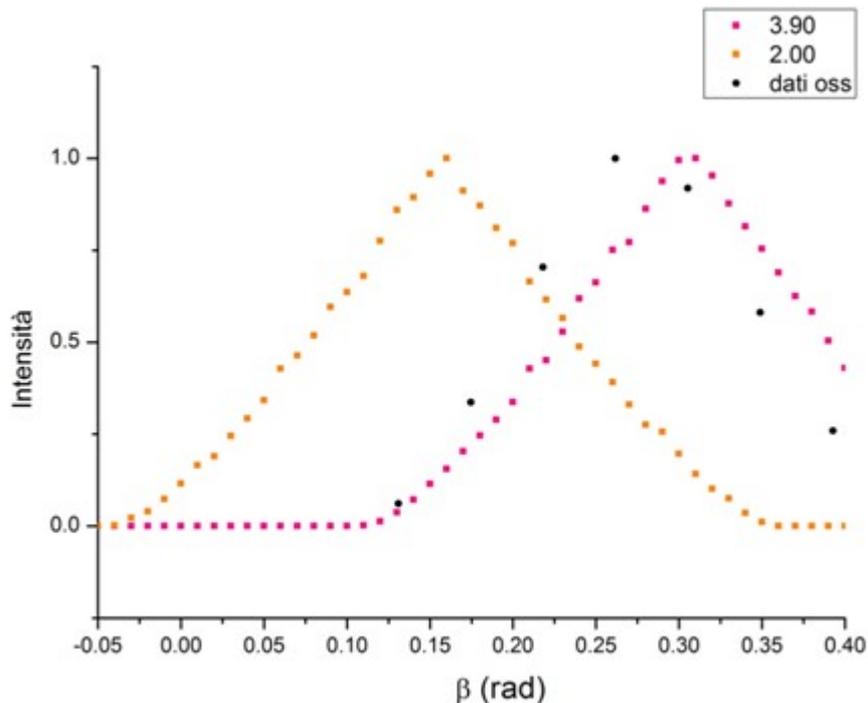


Grafico 11: confronto tra simulazioni Montecarlo e dati sperimentali.

L'approccio simulativo fino ad ora usato, seppur corretto, prevederebbe un passo ulteriore. Noi, quando andiamo a far la simulazione, conosciamo la regione (perché come abbiamo visto non conosciamo esattamente la posizione) entro cui cercare la sorgente, perciò andiamo ad imporre nel codice delle x_s appartenenti a questo range e poi andiamo a vedere quale curva si adatta meglio ai dati sperimentali. Poiché in questo caso l'accordo tra i dati ottenuti mediante la simulazione e i dati sperimentali non è buono, abbiamo cercato di modificare il codice in modo tale che andasse a mappare tutto lo spazio di vista dei rivelatori e a stabilire ove la sorgente potrebbe trovarsi; solo a questo punto, cioè quando abbiamo individuato una zona, allora si può continuare con l'analisi svolta fino ad ora. Abbiamo scritto quindi un ulteriore codice (passino.cpp, in Allegato, che utilizza lo stesso header di angolo.cpp) in cui noi fissiamo la posizione del rivelatore mobile, e andiamo invece a muovere la sorgente di un passo millimetrico.

In particolare, per questo caso specifico, abbiamo visto in Tabella 15 che la sorgente posizionata in x_3 porta ad avere il picco massimo di conteggi per $\beta = 15^\circ$ (mentre per x_2 e x_1 era a $\beta = 7,5/0^\circ$), quindi siamo andate a fissare a quest'angolo il rivelatore mobile e abbiamo visto l'andamento dei conteggi rispetto al variare di $x_{sorgente}$.

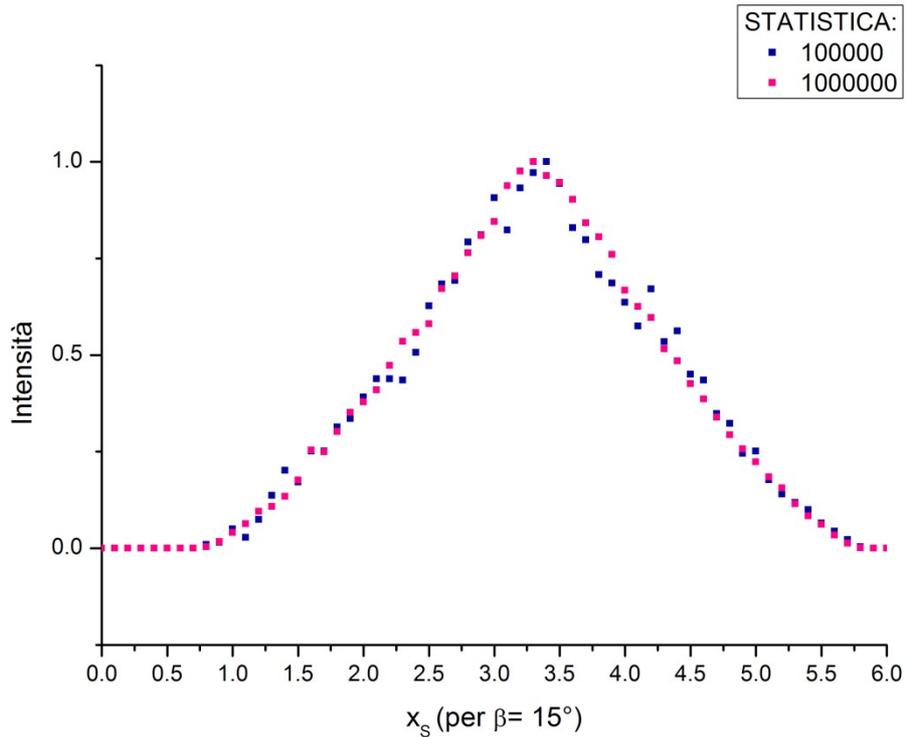


Grafico 12: simulazioni Montecarlo con posizione fissa del rivelatore e posizione della sorgente variabile; confronto dell'andamento della distribuzione al variare della statistica.

Il Grafico 12 ci definisce la zona da indagare, e come aspettato, il picco è posizionato per x_s compreso tra 3 e 4 cm. Solo a questo punto, allora, si potrebbe procedere come fatto per la posizione x_1 e x_2 .

dati oss.			dati da simulazioni Montecarlo imponendo x_s			
Pos.?	β (°)	β (rad)	Pos 3,35 cm	Pos 3,40 cm	Pos 3,45 cm	Pos 3,50 cm
0,061	7,5	0,13	0,207	0,207	0,180	0,190
0,337	10,0	0,17	0,444	0,412	0,380	0,378
0,704	12,5	0,22	0,736	0,698	0,669	0,678
1,000	15,0	0,26	1,000	0,957	0,936	0,938
0,919	17,5	0,31	0,754	0,748	0,774	0,749
0,581	20,0	0,35	0,479	0,515	0,556	0,534
0,259	22,5	0,39	0,271	0,294	0,302	0,295
		χ^2_{ridotto}	0,027	0,024	0,018	0,021

Tabella 16: confronto tra dati sperimentali e dati da simulazione con relativo accordo.

Dall'analisi svolta possiamo pertanto concludere che : $x_3 = 3,45 \pm 0,10\text{cm}$

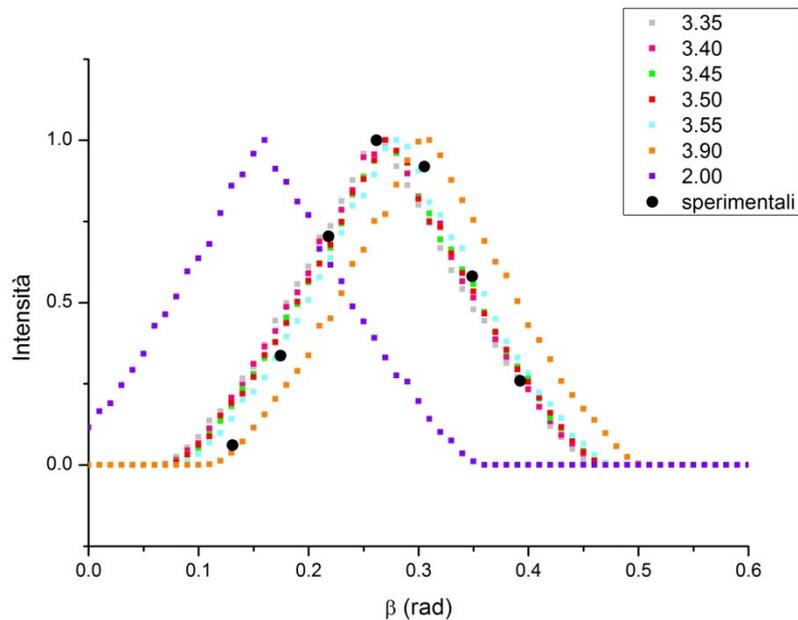


Grafico 13: confronto tra simulazioni Montecarlo e dati sperimentali.

Concludiamo l'analisi sulla posizione riportando, per completezza, le simulazioni volte alla ricerca della zona d'interesse anche per le due posizioni precedenti.

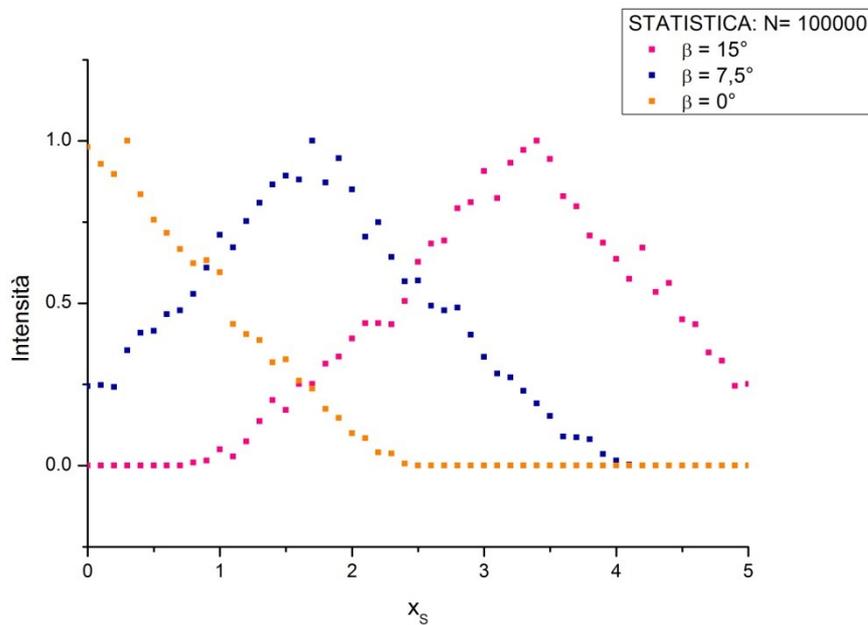


Grafico 14: simulazioni Montecarlo con posizione fissa del rivelatore e posizione della sorgente variabile, confronto al variare dell'angolo presso cui si erano rivelati il maggior numero di cps per le varie posizioni.

Capitolo 6

Conteggi con diverse schermature della sorgente

In un esame PET reale, l'emettitore di positroni viene legato ad una molecola metabolicamente attiva e, successivamente, iniettato nel corpo del paziente; i fotoni d'annichilazione prima di giungere presso i rivelatori devono attraversare diversi mezzi come acqua, tessuti molli, ossa etc... e perciò saranno soggetti a diffusione.

Quello che ci proponiamo di valutare in questo capitolo è il modo in cui vengono attenuati i conteggi in base al tipo di schermatura. A tale scopo si raccolgono inizialmente dei valori di riferimento, conducendo le prime misure senza alcun tipo di schermatura. Successivamente verrà posto attorno alla sorgente un mezzo interferente ogni volta diverso (riso, sale, acqua).

Operativamente si procede variando l'angolazione tra i rivelatori, e registrando i conteggi in funzione dell'angolo, sia per le misure in aria, sia per quelle con i diversi mezzi frapposti.

6.1 Misure di riferimento

I dati riportati nella tabella sottostante sono relativi alle misure in aria e costituiscono le misure di riferimento.

La configurazione dell'apparato sperimentale è mostrata in Figura 15.

β [°]	cps	σ_{cps}
12,5	0,06	0,01
10	0,07	0,01
7,5	0,68	0,04
5	1,51	0,06
0	3,02	0,09
-5	1,57	0,06
-7,5	0,58	0,04
-10	0,09	0,01
-12,5	0,06	0,01

Tabella 17: conteggi in aria delle coincidenze con relativo errore rispetto alla posizione del rivelatore mobile.

Grafichiamo i valori tabulati.

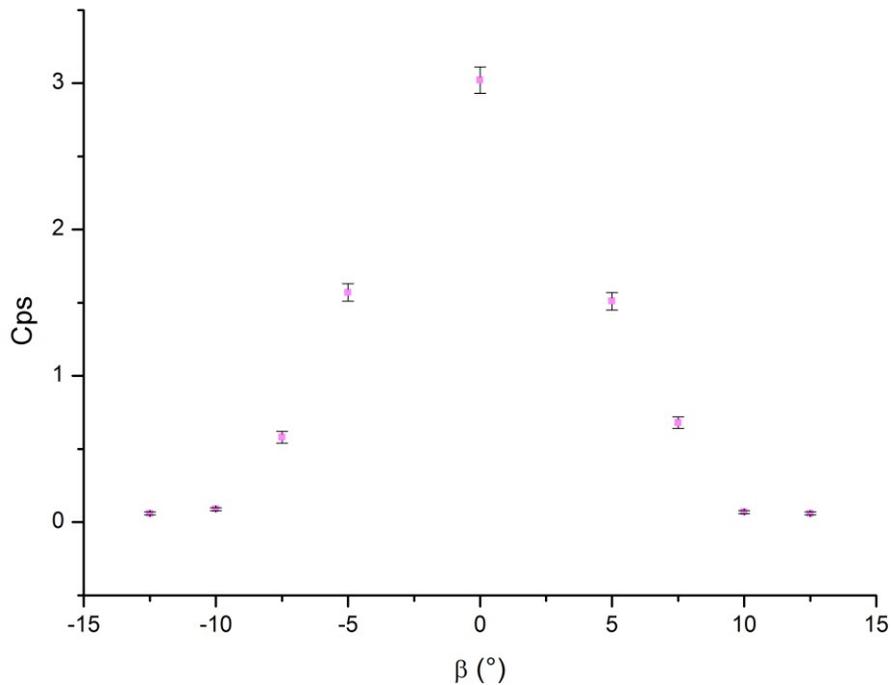


Grafico 15: andamento dei conteggi di coincidenza rispetto alla posizione del rivelatore mobile.

6.2 Misure con mezzo interferente

Utilizzando la medesima configurazione sperimentale, abbiamo interposto, tra la sorgente ed i rivelatori, i diversi mezzi attenuanti ottenendo i seguenti risultati:

mezzo	ACQUA		SALE		RISO	
	cps	σ_{cps}	cps	σ_{cps}	Cps	σ_{cps}
β [°]						
7,5	0,33	0,02	0,23	0,02	0,27	0,02
5	0,73	0,03	0,56	0,04	0,93	0,03
0	1,44	0,04	1,61	0,06	1,72	0,04
-5	0,87	0,03	0,67	0,04	1,02	0,03
-7,5	0,44	0,02	0,32	0,03	0,38	0,02

Tabella 18: conteggi dovuti ad interposizione di mezzi diffusori delle coincidenze con relativo errore rispetto alla posizione del rivelatore mobile.

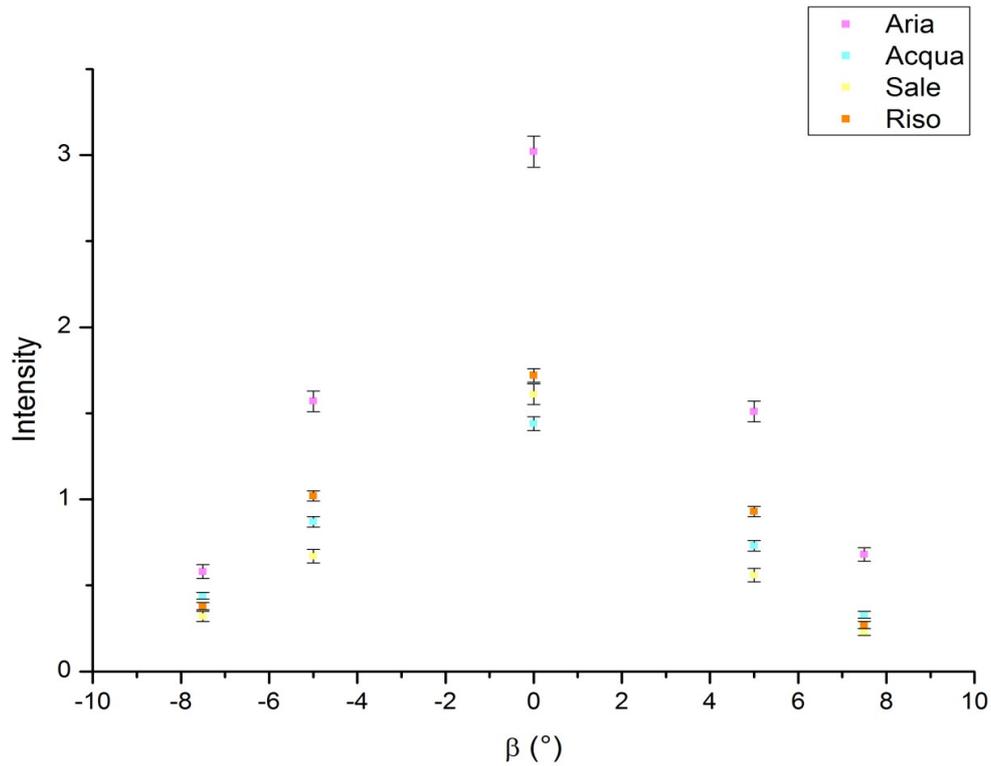


Grafico 16: andamento dei conteggi di coincidenza rispetto alla posizione del rivelatore mobile con e senza mezzi frapposti.

Come si evince dal Grafico 16, in accordo con quanto atteso, circondando la sorgente con diverse schermature si presenta ad ogni angolo un'attenuazione nei conteggi registrati, rispetto al caso in cui la sorgente sia priva di mezzi frapposti tra essa ed i rivelatori.

Conclusione

L'esperimento condotto ci ha permesso di riprodurre uno degli scopi principali dell'esame medico Pet, ossia risalire alla posizione della sorgente emettitrice, che clinicamente consiste nell'individuare la collocazione della massa tumorale.

Il lavoro di laboratorio, però, si discosta notevolmente dal caso reale in quanto strumentazione e corpo emettitore possiedono caratteristiche differenti. In primo luogo, avendo a disposizione solo determinati componenti base, è stato necessario partire dalla costruzione di una catena elettronica appropriata, selezionando le parti adatte per una simulazione il più possibile fedele alla realtà; invece l'attrezzatura fornita in ambito ospedaliero è studiata ed assemblata in modo mirato al fine di garantire l'ottima riuscita dell'esame. In secondo luogo, per quanto concerne la sorgente emettitrice, gli aspetti da considerare sono fondamentalmente tre: dimensioni notevolmente inferiori rispetto a quelle del corpo di un paziente, omogeneità che non si riscontra nel caso reale, ed infine diversità del tipo di sorgente (nel nostro caso ^{22}Na , nel caso clinico le cellule del paziente in cui si è concentrata la molecola metabolicamente attiva legata chimicamente all'isotopo radioattivo).

Assemblato l'apparato strumentale siamo passati a caratterizzarne i singoli componenti, e a settarli secondo le nostre necessità. In questo passaggio è stato necessario considerare i diversi elementi di disturbo che influiscono sulle misurazioni, quali ad esempio il rumore strettamente legato all'elettronica, il rumore statistico e quello legato al fondo ambientale. Per fare in modo che i primi due elementi influissero il meno possibile sulla risoluzione energetica, abbiamo lavorato sullo shaping time e sulla tensione fornita ai fotomoltiplicatori, trovando i valori per i quali si otteneva la risoluzione energetica ottimale. Per quanto riguarda il terzo parametro elencato, abbiamo stimato quanto il fondo ambientale fosse variabile in base alle condizioni atmosferiche e ai diversi momenti della giornata. Ne è risultato che il fondo rimane pressoché invariato e costante.

Calibrato poi lo spettro energetico mediante l'utilizzo di una sorgente multigamma, abbiamo stimato le posizioni migliori presso cui collocare sorgente e rivelatori al fine di ottenere il maggior numero di conteggi possibile, tenendo sempre in considerazione i limiti imposti dal fatto che la sorgente reale possiede le dimensioni del corpo di un paziente. Per valutare il rate delle coincidenze casuali sarebbe stato necessario disporre di un componente che permettesse di sfasare temporalmente il segnale di gate ed il segnale lineare. Non disponendone ci siamo limitate ad un calcolo matematico del rate delle spurie.

Arrivate a questo punto siamo passate all'analisi degli spettri energetici con l'intenzione di risalire alla posizione della sorgente emettitrice. A tale scopo abbiamo affrontato il problema mediante due diverse modalità: una basata sul calcolo della funzione analitica che descriveva in modo fedele il comportamento del sistema, l'altra basata sull'impiego di una funzione (che ben approssimava una gaussiana) che fosse in buon accordo con la distribuzione dei dati, da impiegare nella simulazione Montecarlo. Lo studio della geometria del sistema, fondamentale per determinare la

funzione analitica e la scrittura del codice in C++, è sicuramente la parte che ha richiesto maggiori sforzi anche da un punto di vista temporale.

Il primo approccio al problema è stato quello di tipo analitico, in quanto il sistema presentava una geometria relativamente semplice dal momento che la sorgente poteva muoversi solamente in una direzione. Il risultato ottenuto però è stato inutilizzabile ai fini pratici (una funzione trascendente di 4 righe). Questa via, sicuramente, non sarebbe stata presa in considerazione se la sorgente avesse avuto più gradi di libertà.

Relativamente all'utilizzo della simulazione Montecarlo possiamo dire che si è dimostrata la strada migliore per stimare la posizione. Nonostante ciò anche in questo caso, sarebbe interessante fare un passo ulteriore e andare a vedere cosa accade nel momento in cui la sorgente è libera di muoversi non solo lungo un asse, ma anche sul piano individuato dai due rivelatori. Per fare ciò, oltre a modificare in modo opportuno il codice, sarebbe necessario predisporre un apparato strumentale ad hoc che permetta tali spostamenti della sorgente. Un ulteriore problema sorto durante il corso d'opera dell'esperimento, e relativo alla strumentazione, è stato il malfunzionamento del generatore di tensione che non ha permesso di concludere la raccolta dei dati. Nonostante tutto, siamo comunque riuscite ad ottenere i risultati cercati, avendo inoltre conferma del fatto che il codice da noi redatto permette di simulare con risultati soddisfacenti il sistema di laboratorio.

Infine abbiamo studiato come varia il numero di conteggi nel momento in cui vengono interposti, tra la sorgente e i rivelatori, mezzi diversi. Anche in questo caso si evidenzia una netta differenza tra simulazione realizzata in laboratorio ed esame reale, legata al fatto che le schermature da noi utilizzate non corrispondono ai diversi componenti presenti in un corpo umano. Siamo però riuscite a comprendere che la presenza di un mezzo diverso dall'aria, tra l'emettitore e i rivelatori, comporta un'attenuazione nel numero di conteggi registrati, spiccatamente visibile nel confronto degli spettri ottenuti dei diversi casi.

Appendice

Capitolo 3

[1]: File.job per governare Maestro:

```
SET_DETECTOR 1
SET_PRESET_CLEAR
SET_PRESET_LIVE 3600 prende conteggi per 1 ora
LOOP 200 ciclo
CLEAR cancella i dati dello spettro precedente
START
WAIT
FILL_BUFFER
SET_DETECTOR 0
SAVE "C:\documents and settings\administrator\desktop\ale - ale - gio - lore\fondo???"
SET_DETECTOR 1
END_LOOP
STOP
```

Capitolo 4

[1] Per mezzo di rotelle sull'interfaccia dell'amplificatore è possibile modificare l'energia di soglia e l'apertura della finestra energetica.

[2] Operativamente modificare la durata del segnale logico significa andare a ruotare una vite sulla scheda elettronica.

[3] Lo shaping time e la tensione restano invariate rispetto alla caratterizzazione svolta nel capitolo 3.

[4] Abbiamo scelto 200 secondi perché è un tempo sufficientemente lungo affinché i picchi siano ben definiti, ma è un tempo sufficientemente corto per fare tante misure (20 misure di 200 secondi l'una).

[5] Abbiamo scelto come passo 2mm, e non uno più piccolo, a causa dei limiti strumentali.

Capitolo 5

[1] Il problema riguardo alla ricostruzione della posizione da noi affrontato è notevolmente semplificato rispetto al caso reale a causa di limiti strumentali. Sapevamo a priori, per motivi legati alla strumentazione disponibile, che la nostra sorgente giaceva nel piano xy , ed in particolare che i suoi movimenti potevano essere solamente lungo l'asse delle x .

[2] Sappiamo che i rivelatori sono identici in quanto nei punti precedenti sono stati sottoposti ad un processo di caratterizzazione.

[3] Il file .job utilizzato per raccogliere gli spettri, prevede un tempo di acquisizione dati di mezz'ora, per 24h, così che sono stati ottenuti circa 50 spettri per ogni angolo. Lo scopo era poter ottenere una buona statistica per il conteggio.

[4] Sperimentalmente abbiamo usato un intervallo per β pari a 2.5° . Lavorare con un intervallo più piccolo non permetterebbe di ottenere una descrizione più accurata della curva, ed inoltre si presenterebbe la difficoltà nel distinguere tra una posizione successiva e l'altra, a causa della bassa precisione degli strumenti a disposizione.

[5] Convoluzione $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$

[6] Il codice scritto per la simulazione Montecarlo è riportato nella sua interezza in Allegato.

[7] Abbiamo programmato Maestro perché, ad ogni angolo, acquisisse spettri per un'intera giornata per avere una buona statistica. Dei 50 spettri salvati abbiamo estratto da ognuno l'intensità del picco a 511 keV e in Tabella riportiamo solamente il valore medio.

Capitolo 6

[1] Ricordiamo le impostazioni strumentali:

- shaping time a $2\mu\text{s}$;
- tensione applicata ai rivelatori a 750 Volt;
- posizione della sorgente sull'apposito sostegno a 14mm rispetto al punto zero;
- distanza dei rivelatori dalla sorgente di 25cm;
- tempo d'acquisizione dati: 1h (tempo sufficientemente lungo al fine di avere una buona statistica di conteggio).

- File.job che governa l'acquisizione degli spettri:

```
SET_DETECTOR 1
SET_PRESET_CLEAR
SET_PRESET_LIVE 3600
LOOP 25
CLEAR
START
WAIT
FILL_BUFFER
SET_DETECTOR 0
SAVE "C:\documents and settings\administrator\Desktop\ale - ale - gio - lone\AriaZero???"
SET_DETECTOR 1
END_LOOP
STOP
```



```

mK1[0][0]=x0;
mK1[0][1]=y0;
mK1[1][0]=1.0;
mK1[1][2]=-(cos(phi)/cos(theta));
mK1[2][1]=1.0;
mK1[2][2]=-(sin(phi)/cos(theta));
mK2[0][1]=1.0;
mK2[1][0]=1.0;
mK2[1][2]=-(cos(phi)/cos(theta));
mK2[2][1]=1.0;
mK2[2][2]=-(sin(phi)/cos(theta));
v1[0]=x0*x0+y0*y0;
v1[1]=xs;
v2[0]=-d;
v2[1]=xs;
return;
}

double determinante3x3()
{
double value;
value = m[0][0]*m[1][1]*m[2][2] + m[0][1]*m[1][2]*m[2][0]
+ m[0][2]*m[1][0]*m[2][1] - m[0][0]*m[1][2]*m[2][1] - m[0]
[1]*m[1][0]*m[2][2] - m[0][2]*m[1][1]*m[2][0];
return value;
}

double solvX1()
{
double val;
double D;
double N;

int i=0;
int j=0;
while (i<3)
{
j=0;
while (j<3)
{
m[i][j]=mK1[i][j];
j++;
}
i++;
}

i=0;
D= determinante3x3();
if (D==0.0) return 1000;
i=0;
while (i<3)
{
m[i][0]=v1[i];i++;
}
N = determinante3x3();

val=N/D;
return val;
}

double solvY1()
{
double val;
double D;
double N;
int i=0;
int j=0;
while (i<3)
{
j=0;
while (j<3)
{
m[i][j]=mK1[i][j];
j++;
}
i++;
}

i=0;
D= determinante3x3();
if (D==0.0) return 1000;
i=0;
while (i<3)
{
m[i][1]=v1[i];i++;
}
N = determinante3x3();
val=N/D;
return val;
}

double solvZ1()
{
double val;
double D;
double N;
int i=0;
int j=0;
while (i<3)
{
j=0;
while (j<3)
{
m[i][j]=mK1[i][j];
j++;
}
i++;
}

i=0;
D= determinante3x3();
if (D==0.0) return 1000;
i=0;

```

```

        while (i<3)
        {
            m[i][2]=v1[i];i++;
        }
        N = determinante3x3();
        val=N/D;
        return val;
    }

double solvX2()
{
    double val;
    double D;
    double N;
    int i=0;
    int j=0;
    while (i<3)
    {
        j=0;
        while (j<3)
        {
            m[i][j]=mK2[i][j];
            j++;
        }
        i++;
    }

    i=0;
    D= determinante3x3();
    if (D==0.0) return 1000;
    i=0;
    while (i<3)
    {
        m[i][0]=v2[i];i++;
    }
    N = determinante3x3();
    val=N/D;
    return val;
}

double solvY2()
{
    double val;
    double D;
    double N;
    int i=0;
    int j=0;
    while (i<3)
    {
        j=0;
        while (j<3)
        {
            m[i][j]=mK2[i][j];
            j++;
        }
        i++;
    }

    i=0;
    D= determinante3x3();
    if (D==0.0) return 1000;
    i=0;
    while (i<3)
    {
        m[i][2]=v2[i];i++;
    }
    N = determinante3x3();
    val=N/D;
    return val;
}

void solv1()
{
    s1[0]= solvX1();
    s1[1]= solvY1();
    s1[2]= solvZ1();
    return;
}

        }
        i=0;
        D= determinante3x3();
        if (D==0.0) return 1000;
        i=0;
        while (i<3)
        {
            m[i][1]=v2[i];
            i++;
        }
        N = determinante3x3();
        val=N/D;
        return val;
    }

double solvZ2()
{
    double val;
    double D;
    double N;
    int i=0;
    int j=0;
    while (i<3)
    {
        j=0;
        while (j<3)
        {
            m[i][j]=mK2[i][j];
            j++;
        }
        i++;
    }

    i=0;
    D= determinante3x3();
    if (D==0.0) return 1000;
    i=0;
    while (i<3)
    {
        m[i][0]=v2[i];i++;
    }
    N = determinante3x3();
    val=N/D;
    return val;
}

```

```

}

void solv2()
{
    s2[0]= solvX2();
    s2[1]= solvY2();
    s2[2]= solvZ2();
    return;
}

void soluzioni()
{
    solv1();
    solv2();
    return;
}

int ctrl1()
{
    double dist;
    dist= sqrt((s1[0]-x0)*(s1[0]-x0) + (s1[1]-y0)*(s1[1]-y0) +
(s1[2])*(s1[2]));
    if (dist<rad) return 1;
    else return 0;
}

int ctrl2()
{
    double dist;
    dist= sqrt((s2[0])*(s2[0]) + (s2[1]+d)*(s2[1]+d) +
(s2[2])*(s2[2]));
    if (dist<rad) return 1;
    else return 0;
}

int ctrl()
{
    int a;
    int b;
    a=ctrl1();
    b=ctrl2();
    if (a==1)
        {if (b==1) return 1; else return 0;}
    else return 0;
}

void passino(double a)
{
    xs=a;
    return;
}

void angolino(double a, double b)
{
    x0=a;
    y0=b;
    return;
}

private:
double d; /*y rivelatore fisso*/
double x0; /*rivelatore mobile*/
double y0; /*rivelatore mobile*/
double xs; /*x sorgente*/
double theta; /*angolo retta*/
double phi; /*angolo retta*/

double m[3][3];
double mK1[3][3];
double v1[3];
double mK2[3][3];
double v2[3];

double s1[3];
double s2[3];

};

# endif

```

Angolo.cpp

```
# include <iostream>
# include <cstdlib>
# include <time.h>
# include <math.h>
# include <fstream>
using namespace std;
# include "PETO.h"
# define N 1000000
# define p 0.01

int main()
{
    srand(time(NULL));

    int c;
    int counts=0;

    double theta=-1.57;

    double d=25.0; /*raggio della base*/
    double x0=0.0;
    double y0=0.0;
    double xs=3.55; /*posizione della sorgente lungo le x*/

    x0=d*sin(theta);
    y0=d*cos(theta);

    double h=0.0;

    PETO pet(d, x0, y0, xs);

    ofstream myfile;
    myfile.open ("PETO_xs_3,55.txt");
    myfile << "theta   counts/N\n";

    pet.soluzioni();
    c=pet.ctrl();
    if(c==1) counts=counts+1;

    int i=0;
    int j=0;

    while(theta<1.57)
    {

        i=0;
        while (i<N)
        {
            pet.nuovo_lancio(); /*lancio di due fotoni back to back*/
            pet.soluzioni();
            c=pet.ctrl(); /*se supera il controllo (entrambi i fotoni
            rivelati) aggiunge un conteggio*/
            if(c==1) counts=counts+1;
            i++;
        }

        h=double(counts)/double(N);

        myfile<< theta <<"   "<<h<<"\n";

        theta=theta+p; /*sposto angolo rivelatore*/
        x0=d*sin(theta);
        y0=d*cos(theta);

        pet.angolino(x0,y0);
        counts=0;
    }

    myfile.close();
    return 0;
}
```

Passino.cpp

```
# include <iostream>
# include <cstdlib>
# include <time.h>
# include <math.h>
# include <fstream>
using namespace std;
# include "PETO.h"
# define N 100000
# define p 0.1

int main()
{
    srand(time(NULL));

    int c;
    int counts=0;
    double d=25.0;
    double x0=0.0;
    double y0=25.0;
    double xs=0.0;

    double h=0.0;

    PETO pet(d, x0, y0, xs);

    ofstream myfile;
    myfile.open ("PETO passino angolo 0,0.txt");
    myfile << "xs    counts\n";

    pet.soluzioni();
    c=pet.ctrl();
    if(c==1) counts=counts+1;

    int i=0;
    int j=0;

    while(xs<d)
    {
        i=0;
        while (i<N)
        {
            pet.nuovo_lancio(); /*lancio di due fotoni back to back*/
            pet.soluzioni();
            c=pet.ctrl(); /*se supera il controllo (entrambi i fotoni
            rivelati) aggiunge un conteggio*/
            if(c==1) counts=counts+1;
            i++;
        }

        h=double(counts)/double(N);

        myfile<< xs <<"    "<<h<<"\n";

        xs=xs+p; /*sposto avanti la sorgente*/
        pet.passino(xs);
        counts=0;
    }

    myfile.close();
    return 0;
}
```