

28 Settembre 2011

Università degli studi di Milano Bicocca
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
AA 2010/2011



Laboratorio di misure nucleari e subnucleari

ALLESTIMENTO DI UN APPARATO PET

Prof.ssa Chiara Brofferio

Caterina Mascolo

Stefano Pozzi

Francesco Spini

INDICE

1	Introduzione	1
2	Strumentazione	2
3	Caratterizzazione e ottimizzazione dei rivelatori	4
3.1	Tensione di alimentazione	5
3.2	Shaping Time	8
3.3	Risoluzione VS Energia	9
3.4	Deriva del picco	10
4	Misure in coincidenza	12
4.1	Allestimento	12
4.2	Efficienza	14
5	Metodo di ricostruzione della posizione	16
5.1	Algoritmo di ricostruzione	19
5.2	Verifica della consistenza del metodo a $\phi \neq 0$	20
6	Programmazione della routine di misura	23
6.1	Codice per l'analisi dati	25
7	Analisi dei dati	26
7.1	Misure in aria	26
7.2	Misura in un mezzo materiale	35
7.2.1	Interazione dei fotoni con la materia	35

7.2.2	Misura del coefficiente di attenuazione del sale	36
7.2.3	Ricostruzione della posizione	37
8	Conclusioni	39
9	Appendice	41
9.1	Codice per la ricostruzione della posizione	41
9.2	Codice per il fit gaussiano del picco	44
9.3	Codice di analisi degli spettri	44

INTRODUZIONE

La PET (*Positron Emission Tomography*) è una tecnica di imaging utilizzata nel campo della medicina nucleare per ricavare immagini funzionali del corpo umano. Il sistema rivela coppie di raggi γ generate in seguito all'annichilazione di un positrone, emesso da una sorgente radioattiva introdotta nel corpo. Il processo di annichilazione avviene quando il positrone, dopo aver compiuto un breve tragitto nella materia, interagisce con un elettrone; ne risulta l'emissione di due fotoni da 511 keV *back-to-back*, come richiesto dalla conservazione del momento. L'apparato strumentale PET, grazie a coppie di rivelatori in posizioni diametralmente opposte rispetto alla sorgente, è in grado di intercettare questi fotoni e, se la rivelazione avviene all'interno di un intervallo temporale sufficientemente limitato (tale da poter considerare i due fotoni come provenienti dallo stesso decadimento), di ricostruire la linea sulla quale essi hanno viaggiato. Raccogliendo numerosi eventi di questo tipo è possibile ricostruire la posizione originale della sorgente.

Obiettivo dell'esperimento è stato l'allestimento di un sistema PET in 2D, in modo da ricostruire la posizione di una sorgente di ^{22}Na utilizzando una coppia di scintillatori mobili. ^{22}Na è un isotopo radioattivo del sodio con un tempo di dimezzamento di 2.6 anni; il 100% dei decadimenti sono di tipo β^+ , con produzione di ^{22}Ne . Questi due fattori rendono ^{22}Na ottimale per esperimenti di questo tipo.

STRUMENTAZIONE

- Due scintillatori a Ioduro di Sodio (NaI), diametro 1", spessore 1"; ciascuno dispone di un fotomoltiplicatore *ORTEC 276* e di un preamplificatore. I due dispositivi sono tra loro differenti, per cui è stata necessaria un'analisi delle diverse prestazioni e condizioni di lavoro.
- Amplificatori *ORTEC 570* e *TISCA 7616* in cui vengono immessi i segnali in uscita dal preamplificatore. Entrambi hanno guadagno e shaping-time regolabili, ma essendo anch'essi tra loro differenti operano con condizioni diverse. Il TISCA ha un'uscita SCA che fornisce un segnale di ampiezza fissa (2V) e durata regolabile.
- MultiChannel Analyzer *TRIUMP PCI 2K*, inserito direttamente all'interno del PC e gestito dal software Maestro.
- Struttura portante per i blocchi scintillatore/fotocatodo; è possibile muovere i supporti in modo da avvicinare o allontanare i rivelatori dal centro (precisione 1mm) o per variarne l'altezza (1mm). Inoltre, i supporti possono essere ruotati e fissati a step di 15°, su tutto il banco di lavoro.
- Disco rotante del diametro di 36 cm, posizionato al centro della struttura. Il motore che permette la rotazione del disco è controllato tramite un apposito software.



Figura 2.1: Apparato strumentale utilizzato. 1) Alimentatore; 2) Oscilloscopio 3) Amplificatore *TISCA 7616*; 4) Amplificatore *ORTEC 570*; 5) Scintillatore, PMT e preamplificatore; 6) Supporto mobile per i rivelatori; 7) Disco rotante.

CARATTERIZZAZIONE E OTTIMIZZAZIONE DEI RIVELATORI

Prima dell'allestimento dell'apparato PET si è proceduto alla caratterizzazione individuale dei due scintillatori; a tal fine è stato allestito il sistema come mostrato in figura 3.1.

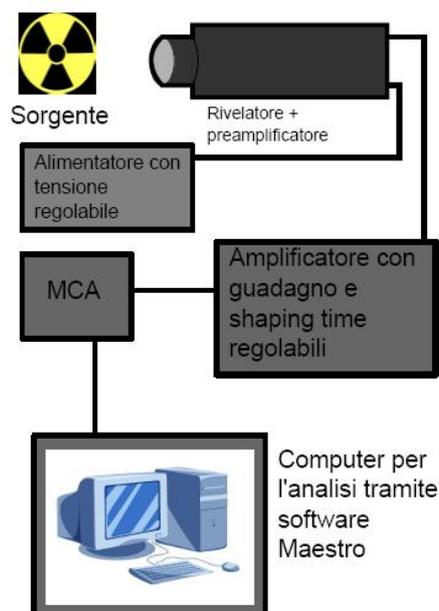


Figura 3.1: Schema dell'allestimento per la caratterizzazione individuale dei due rivelatori

Per avere un'idea generale del funzionamento delle singole parti dell'apparato, abbiamo osservato la forma del segnale in diversi punti del sistema. In figura 3.2 è mostrato il segnale all'anodo, al termine della catena di moltiplicazione del fotomoltiplicatore; questo viene passato al preamp (costituente un unico blocco con il PMT e il rivelatore), dove avviene un'ulteriore amplificazione e la formatura del segnale a coda lunga (figura 3.3); infine il segnale è immesso nell'amplificatore lineare, che gli conferisce una forma gaussiana la cui larghezza è regolata dallo shaping time (figura 3.4).

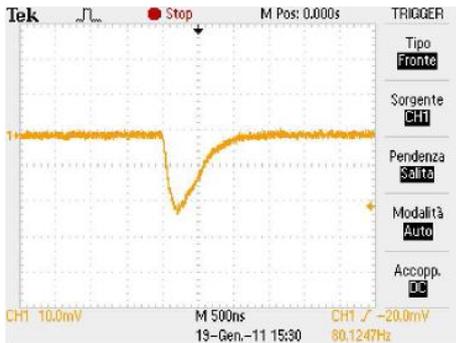


Figura 3.2: Segnale in uscita dall'anodo



Figura 3.3: Segnale in uscita dal preamplificatore

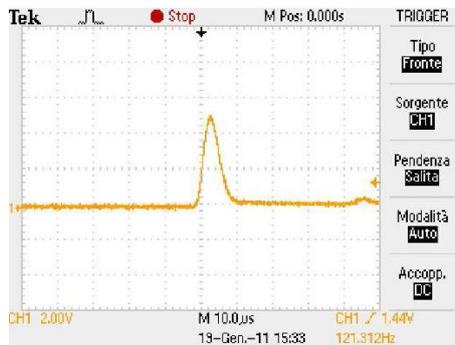


Figura 3.4: Segnale in uscita dall'amplificatore lineare

3.1 Tensione di alimentazione

E' stata determinata la tensione di alimentazione ottimale per i due rivelatori al fine di massimizzare la risoluzione del sistema e l'efficienza di rivelazione. Siccome il sistema è composto da rivelatori e amplificatori tra loro differenti, è necessario utilizzare impostazioni diverse per rendere i risultati di queste analisi confrontabili. Il guadagno dell'amplificatore *ORTEC 570*, collegato al rivelatore di sinistra nel nostro allestimento, è stato fissato a 20, mentre il guadagno del *TISCA 7616*, collegato al rivelatore di destra, a 25.9. Gli shaping time sono stati posti a 2

μs , un valore al quale non si osservavano evidenti cali nell'ampiezza del segnale; un'analisi più dettagliata dello shaping time ottimale per le componenti del sistema è riportata nel paragrafo successivo.

In seguito sono riportate le tabelle relative ai valori ottenuti dai due rivelatori al variare della tensione in un intervallo tra 750 e 1100 V; tutte le analisi sono state effettuate sul picco di annichilazione, a 511 keV.

V	Ch	FWHM	σ_{FWHM}	R	GC	NC	σ_{NC}
750	75.03	6.80	0.43	9.06%	167	127	11
775	99.60	7.88	0.49	7.91%	157	126	11
800	129.38	10.00	0.62	8.30%	156	130	11
825	165.30	12.60	0.78	7.62%	157	129	11
850	211.70	16.60	1.03	7.84%	151	128	11
875	267.30	20.20	1.27	7.56%	150	125	11
900	333.30	26.00	1.69	7.80%	145	117	11
925	416.00	32.00	2.06	7.69%	147	120	11
950	513.00	41.00	2.62	7.99%	148	123	11
975	631.60	46.20	2.93	7.31%	146	124	11
1000	769.00	54.40	3.45	7.07%	147	124	11
1050	1114.50	81.00	5.15	7.27%	149	123	11
1100	1606.00	117.00	7.51	7.28%	147	121	11

Tabella 3.1: Rivelatore di destra

V	Ch	FWHM	σ_{FWHM}	R	GC	NC	σ_{NC}
750	101.51	14.03	0.93	13.8%	156	114	11
775	126.60	16.05	1.06	12.7%	151	113	11
800	154.51	17.50	1.16	11.3%	147	113	11
825	188.23	20.44	1.35	10.8%	146	114	11
850	228.85	23.40	1.58	10.2%	140	109	10
875	275.23	28.20	1.92	10.2%	142	108	10
900	326.61	31.53	2.18	9.6%	139	104	10
925	388.40	36.81	2.46	9.5%	141	112	11
950	457.06	43.35	2.87	9.5%	143	115	11
975	537.61	49.50	3.46	9.2%	133	102	10
1000	623.57	56.71	3.84	9.1%	141	109	10
1050	829.00	76.00	5.12	9.2%	142	110	10
1100	1095.04	91.00	6.05	8.3%	137	113	11

Tabella 3.2: Rivelatore di sinistra

- Ch indica il canale in corrispondenza del picco, corrispondente a una misura di energia (previa calibrazione).
- FWHM (*Full Width at Half Maximum*) è una misura della dispersione del picco intorno al suo centro, mentre σ_{FWHM} indica l'errore ad essa associato. Entrambe le quantità sono misurate in numero di canali.
- R è la risoluzione del sistema, data dal rapporto tra FWHM e la posizione del centro del picco.
- GC (*Gross Counts*) è il numero di conteggi lordi (al secondo) al picco, ovvero senza la sottrazione del fondo.
- NC (*Net Counts*) è il numero di conteggi netti (al secondo), dopo la sottrazione automatica del fondo da parte di Maestro.

La misura della posizione del centro è data con un errore di 1 canale, pari alla sensibilità di Maestro; la deviazione standard sui conteggi netti è data da \sqrt{NC} , mentre quella relativa alla FWHM da $\frac{FWHM}{\sqrt{2 \times NC}}$. Come è evidente dai risultati e dai grafici in figura 3.5 e 3.6, le prestazioni dei due rivelatori sono marcatamente diverse: nello specifico, il rivelatore di destra ha una capacità risolutiva e un'efficienza superiore rispetto a quello di sinistra. Avendo la necessità di utilizzare lo stesso generatore per alimentare le due parti del sistema e di minimizzare le differenze di prestazioni tra i due rivelatori, è stata scelta una tensione operativa di 1000V.

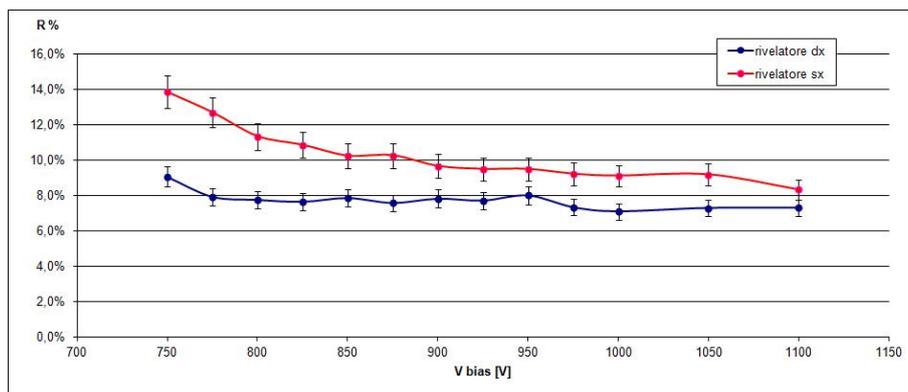


Figura 3.5: Risoluzione vs tensione di alimentazione

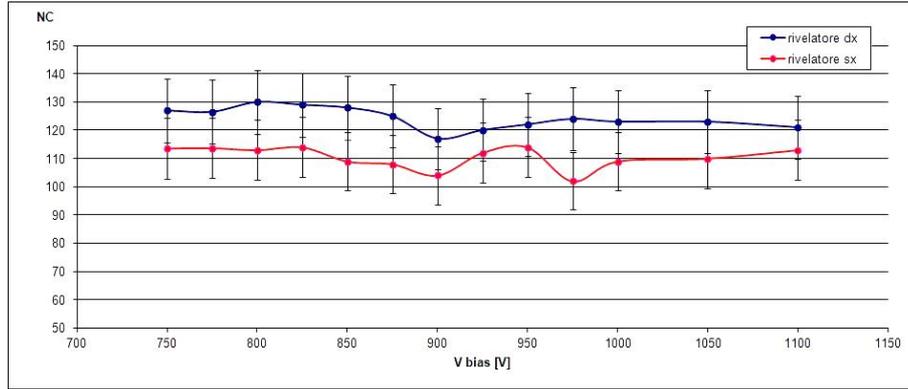


Figura 3.6: Efficienza vs tensione di alimentazione

3.2 Shaping Time

Il tempo di formatura del segnale è un parametro variabile degli amplificatori e indica la larghezza del segnale gaussiano in uscita da questi ultimi; esso ha una fondamentale importanza all'interno del processo di calibrazione dei rivelatori, in quanto influisce sul rumore di fondo e deficit balistico (e, quindi, sul tempo morto del sistema). Anche in questo caso, avendo a che fare con una strumentazione composta da apparecchi diversi tra loro, è stata necessario ottimizzare singolarmente i due rivelatori in modo da ottenere la massima prestazione complessiva possibile.

Mantenendo la configurazione e le impostazioni sul guadagno esposte nel paragrafo precedente si è proceduto alla misura della risoluzione dei rivelatori sul picco a 1260 keV del sodio¹, al variare dello shaping time.

Sh-time(μ s)	rivelatore dx			rivelatore sx		
	CH	FWHM	R	CH	FWHM	R
0.5	1384.79	72.55	5.24%	247.67	15.72	6.37%
1	1612.00	82.19	5.09%	285.29	16.73	5.86%
2	1709.00	78.79	4.61%	302.42	18.37	6.07%
3	1689.58	73.59	4.36%	298.00	18.92	6.35%
6	1715.89	81.53	4.75%	302.03	19.58	6.48%
10	1665.00	84.36	5.07%	293.83	19.32	6.57%

¹Si è scelto un valore più elevato di energia per ridurre al minimo la componente statistica del deterioramento della risoluzione; essa infatti ha un andamento simile a $1/\sqrt{E}$, rendendo una misura ad alta energia più utile nell'osservazione di altri effetti sulla risoluzione.

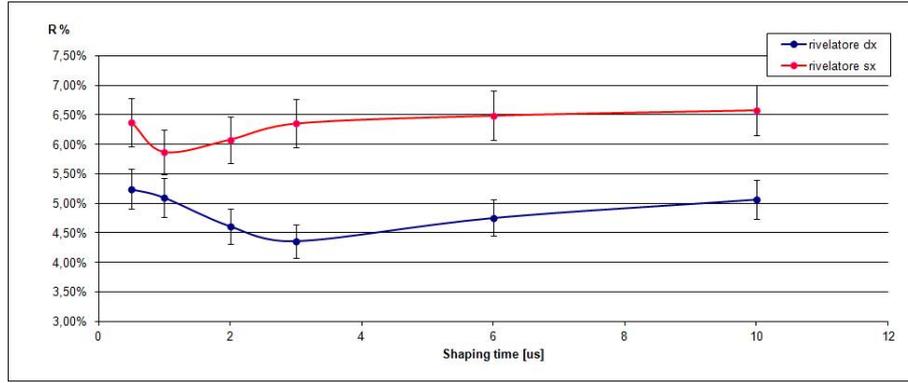


Figura 3.7: Risoluzione vs shaping-time

In figura 3.7 sono riportati i risultati dell'analisi. Ancora una volta è evidente la marcata differenza nelle prestazioni delle due parti del sistema; i valori ottimali risultano essere $1\mu s$ per il rivelatore di sinistra e $3\mu s$ per il rivelatore di destra. Tuttavia, come sarà discusso in seguito, nella fase di misura è stato necessario scegliere valori di shaping time differenti.

3.3 Risoluzione VS Energia

La carica Q generata in un rivelatore da un quanto di radiazione incidente è costituita da un numero discreto di portatori di carica ed è quindi soggetta a fluttuazioni casuali, causa di un limite alla risoluzione. Assumendo che la formazione di ogni portatore di carica sia un processo Poissoniano, quindi indipendente dagli altri, si ottiene:

$$R_{Poisson} = \frac{FWHM}{E} \approx \frac{1}{\sqrt{E}}$$

Mantenendo la stessa configurazione dei casi precedenti si è proceduto alla misura dei picchi di emissione di una sorgente multi- γ , al fine di valutare la verosimiglianza dell'ipotesi di processi Poissoniani.

rivelatore sx			rivelatore dx		
$E_{[keV]}$	$FWHM_{[keV]}$	R	$E_{[keV]}$	$FWHM_{[keV]}$	R
59.70	12.57	21.05%	59.70	8.42	14.10%
126.00	19.30	15.32%	126.00	11.72	9.30%
248.60	27.00	11.13%	248.60	21.33	8.58%
661.50	45.11	6.82%	661.50	28.68	4.34%
1275.00	87.18	6.84%	1275.00	62.81	4.93%
1316.00	89.49	6.80%			

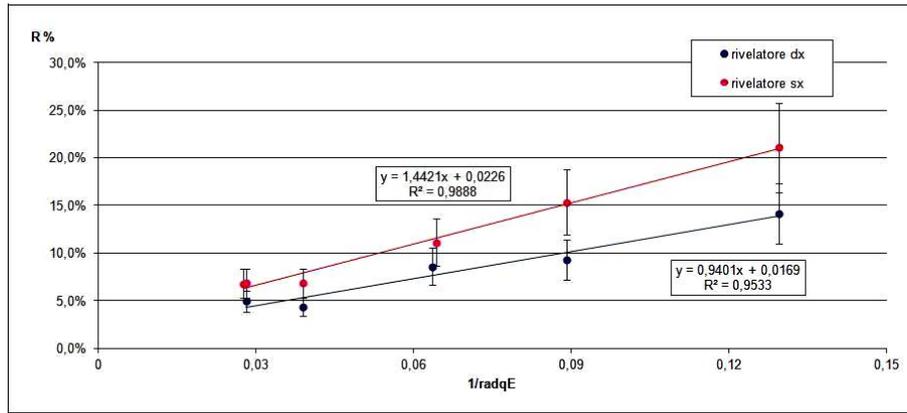


Figura 3.8: Risoluzione vs energia

Dal grafico in figura 3.8 si osserva che l'andamento è compatibile con quello previsto; non sono però presenti sufficienti punti per poter effettuare un'analisi sensata del fattore di Fano.

3.4 Deriva del picco

Lo studio della deriva temporale del picco è stato reso indispensabile dalla necessità di effettuare misure in momenti diversi della giornata e della settimana, in modo automatizzato. La grandezza che maggiormente può influire sull'allargamento o spostamento del picco è la temperatura, unica quantità a subire una significativa escursione nel corso della giornata. Per osservare l'eventuale presenza di una deriva è stata predisposta una serie di misure dedicate nell'arco di una settimana: è stato acquisito uno spettro di emissione ogni quattro ore da parte del rivelatore con funzione di gate. In figura 3.9 è riportata l'energia relativa al picco mentre la figura 3.10 evidenzia l'oscillazione del numero di conteggi², grandezza che, come vedremo, risulterà particolarmente importante nell'ambito della ricostruzione della posizione della sorgente.

La temperatura influisce in modo evidente sul funzionamento dell'apparato: durante il fine settimana le variazioni sono meno intense perchè l'escursione termica risulta minore rispetto agli altri giorni della settimana. Nell'arco della settimana l'energia media ha oscillato intorno al valor medio di 509.7 keV con una deviazione standard di 2.8 keV (rispetto a valori di FWHM che oscillano intorno ad un valor medio di 47.7 keV), mentre i conteggi netti sono stati in media 95.5 con una deviazione standard di 0.8. Le linee di tendenza mostrano che gli effetti di deriva non rendono necessarie particolari attenzioni, anche se verranno effettuati periodici controlli.

²In entrambe le immagini non sono riportate le barre di errore in quanto esse sarebbero troppo piccole per essere visibili: trattandosi di misure della durata di diverse ore, la statistica è tale da ridurre l'errore alla sensibilità dell'MCA, pari a 0.5 keV.

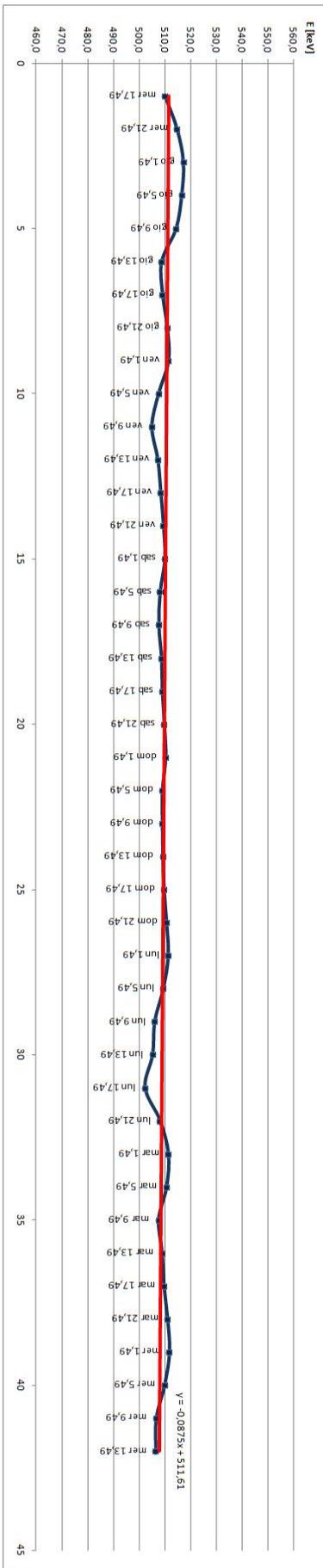


Figura 3.9: Deriva del picco

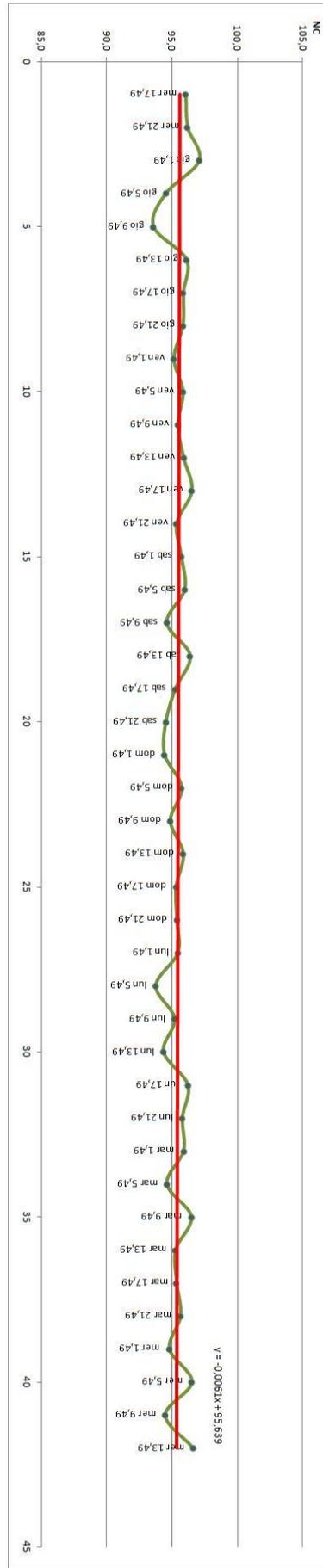


Figura 3.10: Deriva dell'efficienza

MISURE IN COINCIDENZA

4.1 Allestimento

Per misura in coincidenza si intende una serie di analisi per verificare la capacità del sistema di rivelare coppie di fotoni emessi da un evento di annichilazione. A questo scopo vengono utilizzati entrambi i rivelatori: il primo per segnalare l'evento, l'altro per la misura diretta dell'energia del fotone.

Quando il segnale proveniente dal primo rivelatore è contenuto all'interno di una specifica finestra energetica (fissata con delle manopole presenti sul relativo amplificatore), viene prodotto un impulso logico da uno SCA (*Single Channel Analyzer*); questo impulso ha ampiezza standard (2V) e durata temporale regolabile attraverso una vite. Il segnale proveniente dal secondo rivelatore, dopo l'amplificazione, è inviato direttamente all'ingresso dell'MCA. Sull'MCA è presente un ingresso chiamato GATE che, se configurato per misure in coincidenza, abilita l'acquisizione del segnale solo nell'intervallo temporale nel quale il GATE è aperto; per abilitare il GATE è stato utilizzato il segnale proveniente dallo SCA. In questo modo, il segnale proveniente dal rivelatore attiva l'MCA per un breve intervallo di tempo e, se anche il secondo rivelatore invia un segnale nello stesso intervallo, il sistema registra un evento di coincidenza.

Per regolare il range energetico di interesse è stata effettuata una misura in autocoincidenza: l'uscita SCA del primo amplificatore è stata collegata al GATE mentre l'AMP OUT (uscita del segnale formato e amplificato) dello stesso all'MCA. Avviando le misure in coincidenza è possibile osservare tramite Maestro la registrazione degli impulsi solo all'interno del range energetico scelto. Viene quindi regolato lo SCA in modo da considerare solo un intervallo di circa

200 keV intorno al picco di annichilazione del positrone.

Si è scelto di utilizzare il rivelatore di sinistra per la gestione dello SCA in modo da poter disporre del rivelatore di destra, caratterizzato da migliori prestazioni, per il raccoglimento dello spettro. In figura 4.1 è mostrato lo schema dell'apparato per le misure in coincidenza.

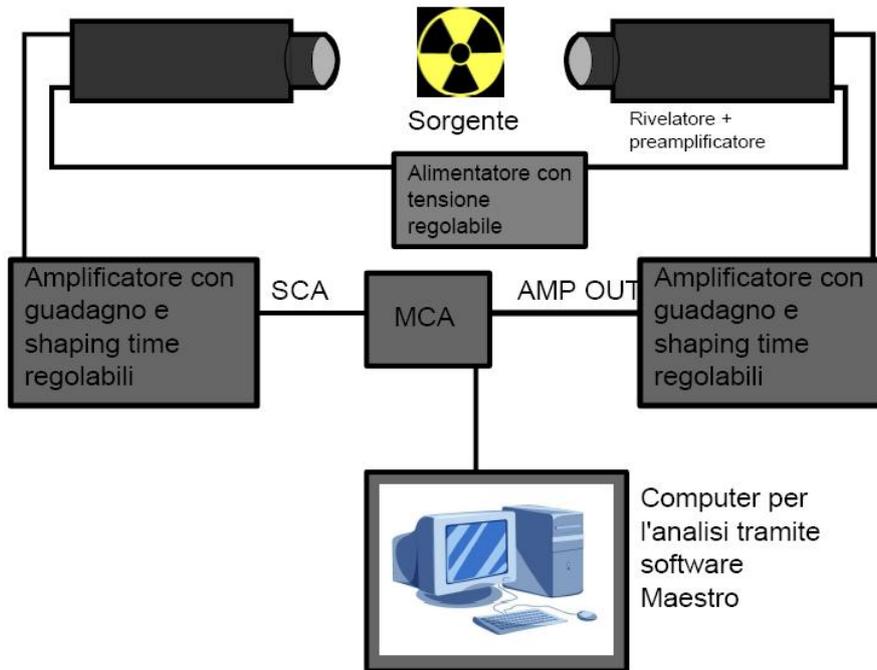


Figura 4.1: Misure in coincidenza

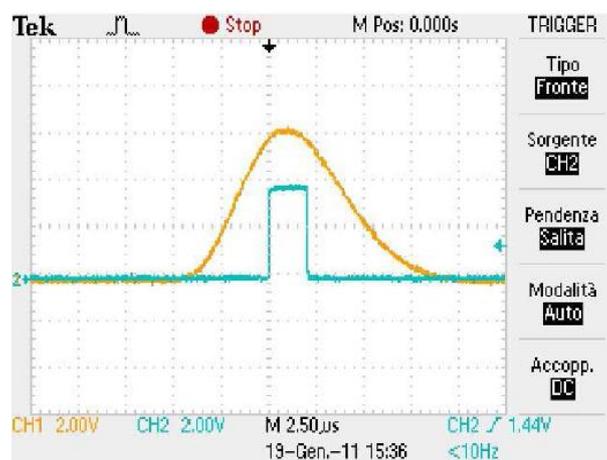


Figura 4.2: Coincidenza rivelata correttamente

La contemporaneità dei due eventi viene risolta dallo SCA; è quindi necessario che l'impulso proveniente dallo SCA si sovrapponga correttamente al picco del segnale da acquisire. È possibile intervenire sulla durata temporale del segnale logico tramite un potenziometro interno all'amplificatore, fino ad ottenere la situazione ottimale, mostrata in figura 4.2.

4.2 Efficienza

Per la scelta degli shaping time ottimali abbiamo valutato l'efficienza di rivelazione dei quanti in coincidenza. A causa della necessità di sovrapporre i segnali provenienti dai due amplificatori non è stato possibile utilizzare gli shaping time ottimali valutati in precedenza; la sovrapposizione, infatti, è legata alle caratteristiche temporali del circuito e richiede una valutazione a parte. Abbiamo analizzato l'efficienza al picco e la risoluzione complessiva del sistema variando gli shaping time dei due amplificatori.

Sh.-time dx (μs)	1	1	2	2
Sh.-time sx (μs)	0.5	0.5	3	3
SCA(μs)	2	3	2	3
Cps picco	20.53	20.15	20.22	20.26
Cps totali	43.17	47.18	30.08	46.92
Cps picco/totali	47.56%	42.71%	67.22%	43.18%
FWHM	77	79	79	75
Picco	1022	1020	1074	1074
Risoluzione	7.62%	7.75%	7.21%	6.95%
Efficienza	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%

Nota l'attività della sorgente¹ abbiamo determinato l'efficienza dell'apparato; questa non è risultata dipendente dagli shaping time, per cui essi sono stati scelti solo in base alla risoluzione ($2 \mu s$ per l'amplificatore di destra e $3 \mu s$ per quello di sinistra). Si è optato per un'apertura SCA di $3 \mu s$ piuttosto che di $2 \mu s$ perchè quest'ultima configurazione portava ad ottenere uno spettro come quello in figura 4.3, in cui si nota un'anomalia nella zona Compton, probabilmente dovuta a una non buona sovrapposizione dell'uscita SCA con il segnale.

Grazie a un'ulteriore misura senza sorgente è stata verificata l'assenza di un fondo di coincidenze false. Data la mancanza di un delay regolabile non è stato possibile effettuare una misura del rate di false coincidenze in presenza di sorgente.

¹In data 1/1/2010 l'attività era di 270.8 kBq; dalla legge di decadimento $N = N_0 e^{-\frac{t}{T}}$ si ricava l'attività ad oggi.

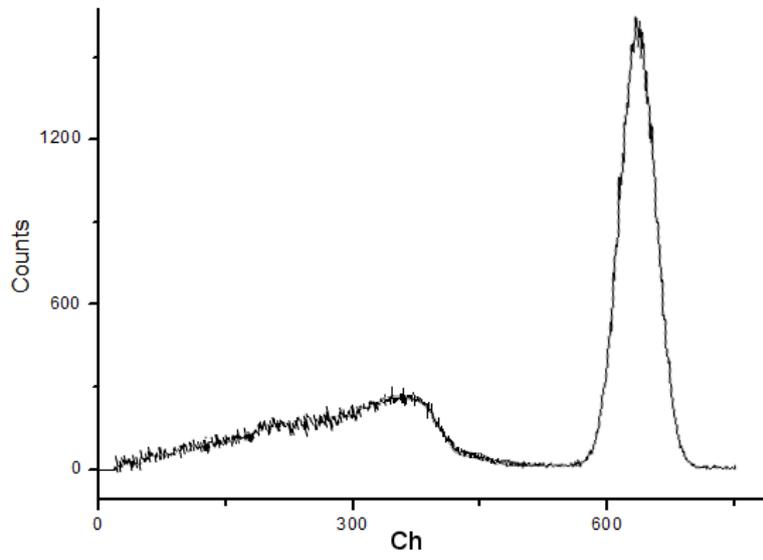


Figura 4.3: Spettro anomalo con $T_{SCA} = 2\mu s$

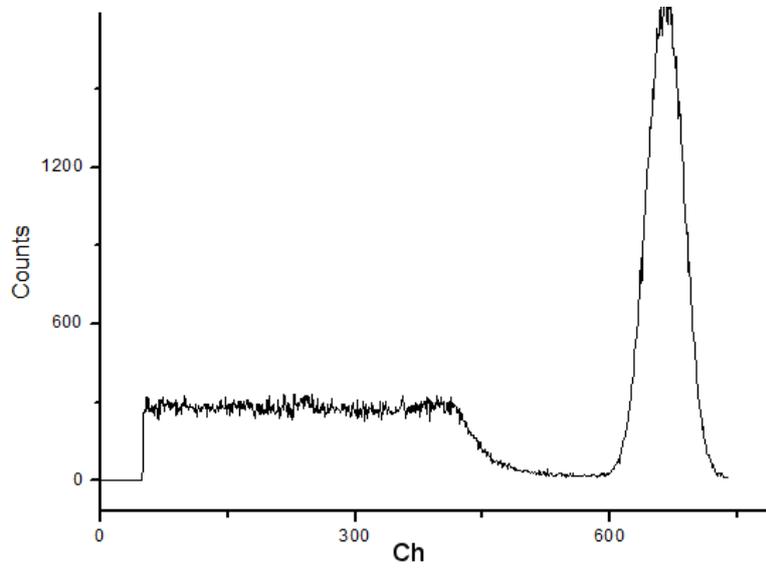


Figura 4.4: Spettro con $T_{SCA} = 3\mu s$

METODO DI RICOSTRUZIONE DELLA POSIZIONE

In un apparato PET vero e proprio la posizione di una sorgente radioattiva viene determinata attraverso l'analisi di una notevole quantità di spettri in coincidenza, ottenuti da una matrice di rivelatori posta tutto intorno al paziente. L'apparecchiatura a disposizione consente di eseguire un processo analogo, permettendo di ruotare una sorgente puntiforme mantenendo fermi i rivelatori.

L'obiettivo dell'esperimento è quello di ricavare con la maggiore precisione possibile la posizione spaziale della sorgente, posta inizialmente in un punto casuale del piano antistante i rivelatori. Si vuole quindi identificare una coppia di coordinate (X_S, Y_S) e l'errore ad esse associato; per comodità, data la particolare geometria del sistema, useremo la coppia di coordinate polari (ρ_S, θ_S) . Nel corso di tutte le misure effettuate non è mai stata variata l'altezza dei rivelatori, nè l'altezza della sorgente rispetto al piatto.

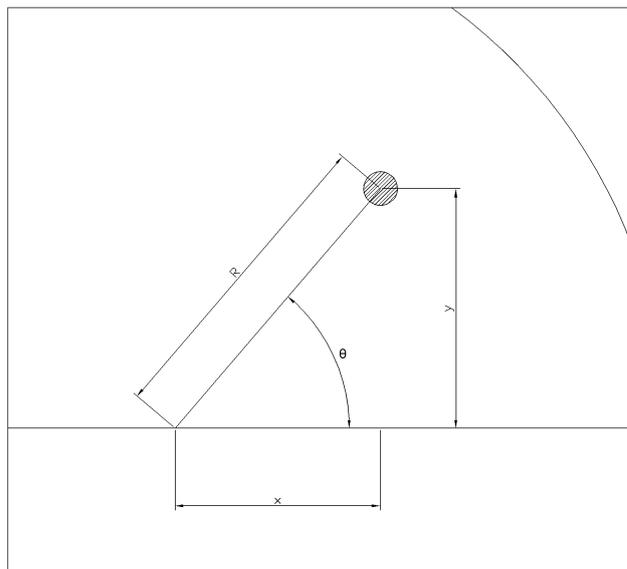


Figura 5.1: Posizione iniziale della sorgente

Partendo da una generica posizione iniziale, dunque, si fa ruotare la sorgente a piccoli step, registrando in corrispondenza di ognuno di essi uno spettro di emissione in coincidenza. Nella condizione più semplice possibile, ovvero con i due rivelatori affacciati e posti lungo il diametro del disco centrale (figura 5.2), ci si aspetta che il sistema raggiunga la massima efficienza di conteggio quando la sorgente transita sull'asse che congiunge i rivelatori. Al variare dell'angolo di rotazione del disco si otterranno quindi spettri con un numero variabile di conteggi al picco, con un massimo intorno alla posizione di maggior efficienza (figura 5.3).

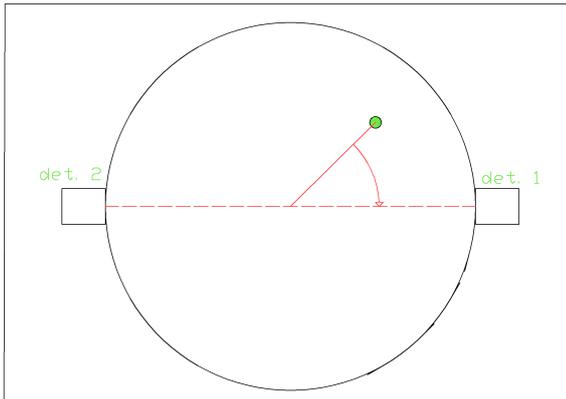


Figura 5.2: Caso semplice: rivelatori affacciati

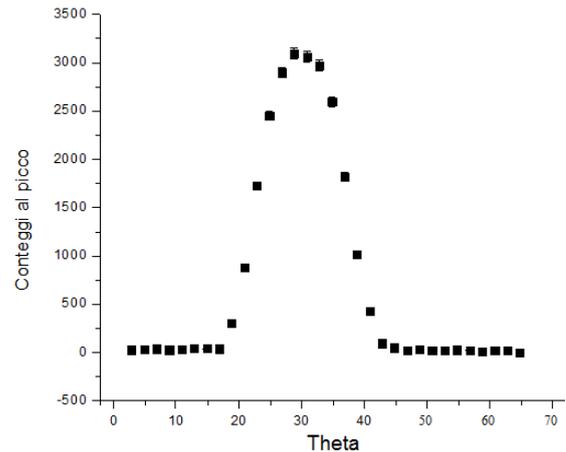


Figura 5.3: Conteggi al picco al variare dell'angolo

Assumendo per un momento di poter estrapolare la posizione del massimo nel grafico in figura 5.3 (ipotesi che verrà abbandonata in seguito) e chiamando α l'angolo corrispondente, possiamo immediatamente stabilire il valore dell'angolo θ_S , che sarà pari a $-\alpha$. Effettuare soltanto delle misure con i rivelatori affacciati non permette però di valutare il raggio ρ_S ; per questo è necessario ottenere altri spettri, spostando uno dei rivelatori in una posizione differente.

L'apparato strumentale consente di ruotare i supporti dei rivelatori con step $\Delta\phi = 15^\circ$. Una volta che un rivelatore è stato riposizionato, la sorgente viene nuovamente posta al punto di partenza e la campagna di raccolta degli spettri viene ripetuta. Anche in questo caso si otterrà un grafico simile a quello in figura 5.3, ma con il massimo in una posizione diversa; chiameremo l'angolo corrispondente al nuovo massimo β .

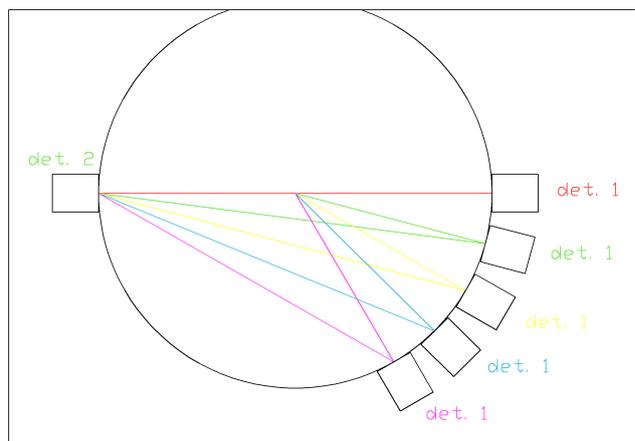


Figura 5.4: Possibili posizioni del rivelatore

Conoscendo la sola coppia di valori (α, β) è possibile ricavare esattamente la posizione iniziale della sorgente.

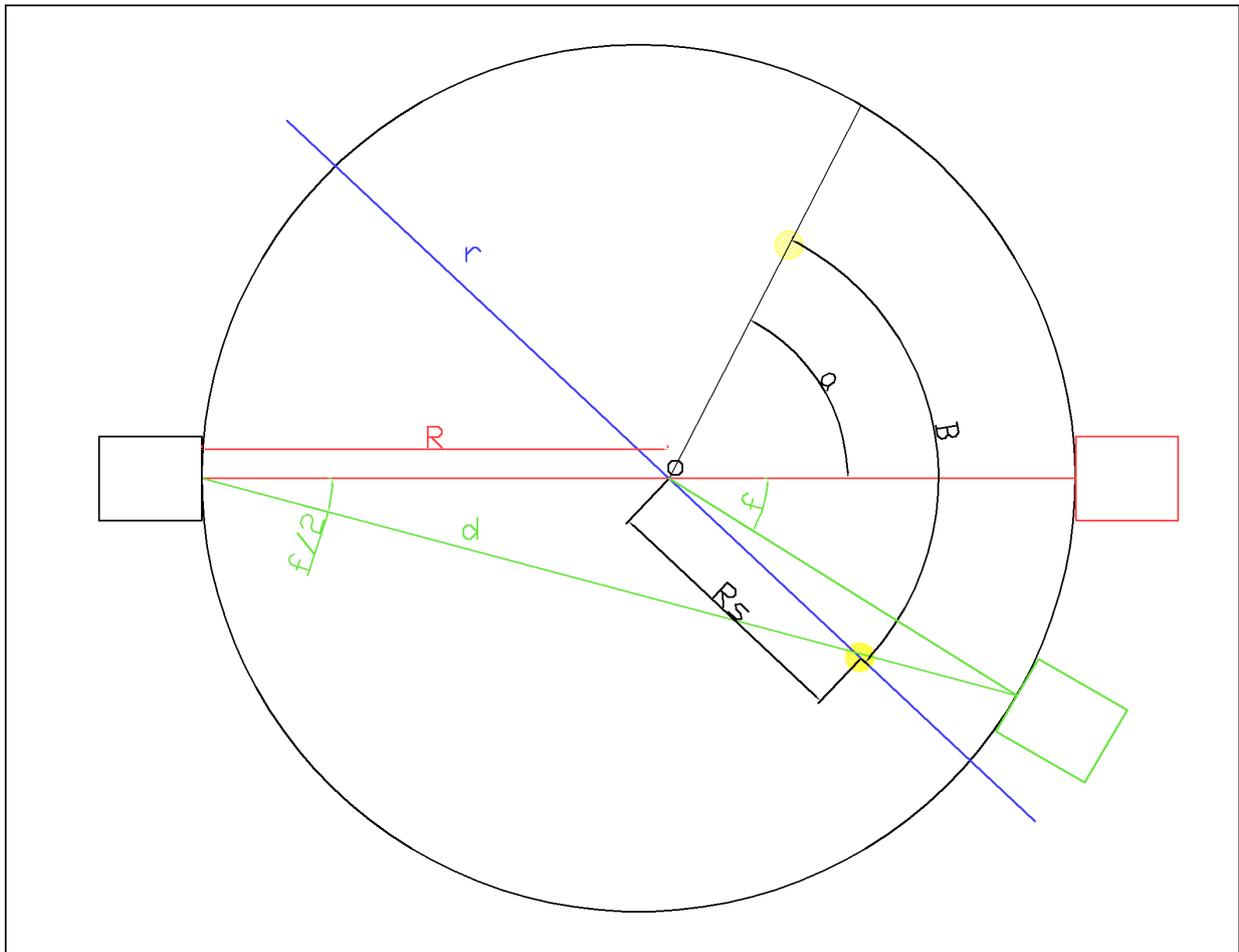


Figura 5.5: Ricostruzione della posizione della sorgente

In figura 5.5 è mostrato l'insieme di dati che consente di ricostruire geometricamente il valore di ρ_S :

- R è la distanza tra i rivelatori e il centro del disco;
- d è la retta congiungente i centri dei due rivelatori;
- α è l'angolo a cui la sorgente viene vista con massima efficienza nella configurazione a rivelatori affacciati;
- β è l'angolo ottenuto con i rivelatori non affacciati;
- ϕ è l'angolo di rotazione di uno dei rivelatori rispetto al centro del disco (il corrispondente angolo alla circonferenza è quindi $\frac{1}{2}\phi$);

- $P(x_P, y_P)$ è il punto di intersezione tra la circonferenza seguita dalla sorgente (di raggio ρ_S) e la retta d ;
- r è la retta passante per il centro del disco e per P .

L'obiettivo di questo metodo è quello di ottenere x_P e y_P , in modo da poter ricavare $\rho_S = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$.

Per la geometria del sistema, possiamo definire le rette r e d in funzione degli angoli noti:

$$\begin{aligned} r &\Rightarrow y = -\tan(\beta - \alpha)x \\ d &\Rightarrow y = -\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)(x + R) \end{aligned}$$

Intersecando queste due rette è possibile ricavare direttamente il valore di x_P e y_P :

$$x_P = \frac{R \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\tan(\beta - \alpha) - \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)} \quad y_P = -x_P \tan(\beta - \alpha)$$

Fino a questo momento sono stati trascurati gli errori sperimentali; una volta che questi vengono considerati, è necessario effettuare il maggior numero possibile di misure per aumentare la precisione con cui è definito ρ_S . A questo scopo, vengono effettuate delle misure variando l'angolo di rotazione di uno dei rivelatori, ϕ .

Il presupposto fondamentale perchè il metodo funzioni è che la circonferenza seguita dalla sorgente intersechi la retta congiungente i centri dei due rivelatori; se il raggio ρ_S è al di sotto di un raggio minimo r_m , funzione di ϕ ($r_m = R \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$), non sarà possibile effettuare la misura in questa configurazione, nè con ϕ maggiori.

5.1 Algoritmo di ricostruzione

Per poter inserire l'analisi degli errori all'interno del metodo sono possibili due diverse strade:

1. Ricavare esattamente l'espressione analitica della posizione della sorgente, considerando la dimensione fisica dei rivelatori, le rispettive distanze e la relativa propagazione degli errori, in modo da costruire un modello per fittare il grafico in figura 5.3;
2. Considerare la distribuzione in figura 5.3 come la "probabilità" che la sorgente si trovi a un dato angolo α , combinare le probabilità derivanti da due misure per ottenere una coppia (α, β) , riconducibile a una coppia (ρ_S, θ_S) .

Data l'eccessiva complessità del calcolo del caso 1, abbiamo deciso di applicare il secondo metodo, nel modo seguente:

- vengono effettuate diverse scansioni, ruotando il disco complessivamente di 180° , prima con i rivelatori affacciati ($\phi = 0$), poi ruotandone uno di $\Delta(\phi) = 15^\circ$;

- ciascuna misura a $\phi \neq 0$ viene accoppiata con la misura a $\phi = 0$;
- ciascun valore all'interno di una scansione viene diviso per il numero totale di conteggi ottenuti all'interno di quella scansione, in modo da normalizzarli e renderli più simili a una probabilità. Viene creata una matrice contenente gli angoli, cui vengono associati la relativa probabilità e gli errori:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & err_{\alpha_1} & p_1 & err_{p_1} \\ & \vdots & & \\ \alpha_N & err_{\alpha_N} & p_N & err_{p_N} \end{pmatrix}$$

- viene effettuato il prodotto cartesiano tra la matrice dei valori di α e quella di β ;
- a ciascuna coppia (α_j, β_k) viene associato un numero P, dato dal prodotto $p_j \times p_k$, con la relativa propagazione degli errori ($\frac{err_P}{P} = \frac{err_{p_j}}{p_j} + \frac{err_{p_k}}{p_k}$);
- si effettua la trasformazione $(\alpha, \beta) \rightarrow (\rho, \theta)$, escludendo a priori le misure con $\rho > R$ e $\rho < r_m$, affinché la misura abbia senso fisico;
- la coppia (ρ, θ) cui corrisponde il massimo valore di P viene considerata come la posizione originale della sorgente;
- la misura viene ripetuta associando la misura a $\phi = 0$ con una misura a ϕ differente, in modo da aumentare la statistica e migliorare la precisione con cui viene trovata la posizione.

5.2 Verifica della consistenza del metodo a $\phi \neq 0$

Per poter verificare l'efficienza del metodo è necessario fare un'ulteriore considerazione, già accennata in precedenza, ovvero se è possibile affermare che il punto in cui i conteggi raggiungono il loro massimo, nella configurazione con $\phi \neq 0$, si trova effettivamente sulla congiungente i due centri dei rivelatori. A questo scopo è stata effettuata un'ulteriore serie di misure, partendo però da condizioni iniziali diverse rispetto a quelle utilizzate precedentemente.

La sorgente viene inizialmente posta a $\theta = 0$ e a raggio ρ noto, mentre il rivelatore è posizionato direttamente a $\phi \neq 0$ (una misura a $\phi = 0$ sarebbe inutile). Viene poi effettuata una scansione a 180° ; i risultati di questa misura, analoghi a quelli ottenuti in figura 5.3, vengono fittati con una gaussiana per ricavare l'angolo a cui si trova il massimo dei conteggi. Questa procedura è stata utilizzata solo in questa fase delle misurazioni, in quanto introduce ulteriori errori indesiderati all'interno della valutazione della posizione; è stata comunque considerata adeguata in questo caso, in quanto si tratta di una semplice verifica.

Questa procedura associa l'angolo α ottenuto dalla posizione centrale del fit gaussiano con il

raggio ρ fissato inizialmente; vengono poi eseguite ulteriori misure, variando ρ con step di 0.5 cm e mantenendo ϕ costante, fino a quando $\rho = r_m$.

L'obiettivo di questa misura è verificare se le coppie (ρ, α) sono consistenti con le seguenti previsioni teoriche, effettuate sulla sola base della geometria del sistema.

La sorgente si muove su una circonferenza definita da $x^2 + y^2 = \rho^2$; nel momento in cui interseca la congiungente i centri dei rivelatori, ovvero la retta $y = \tan(\frac{\phi}{2})(x + R)$, avrà percorso un'angolo α rispetto alla sua posizione iniziale. Intersecando la circonferenza, la retta congiungente e la retta $y = \tan(\alpha)x$ si ottengono i seguenti valori di x e y :

$$x = \frac{d \times \tan(\frac{\phi}{2})}{\tan(\alpha) - \tan(\frac{\phi}{2})} \quad y = x \tan(\alpha)$$

Da questi valori si può ricavare la relazione tra ρ e α , da $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se si effettua un fit con questa funzione dei valori ottenuti precedentemente, si osservano i risultati seguenti:

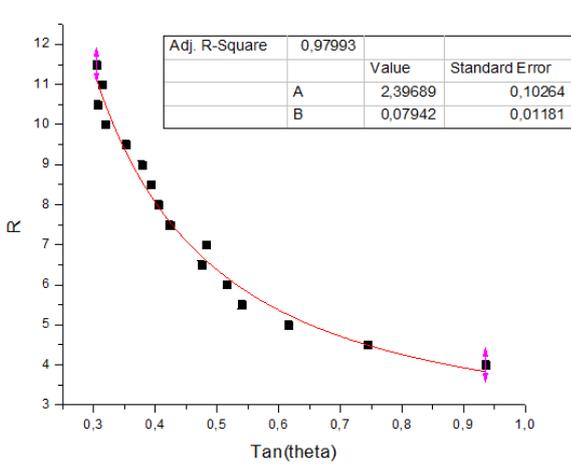


Figura 5.6: Misura a $\phi = 15^\circ$

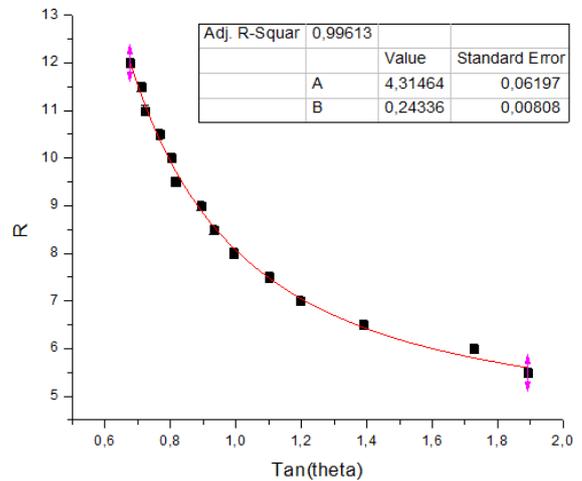


Figura 5.7: Misura a $\phi = 30^\circ$

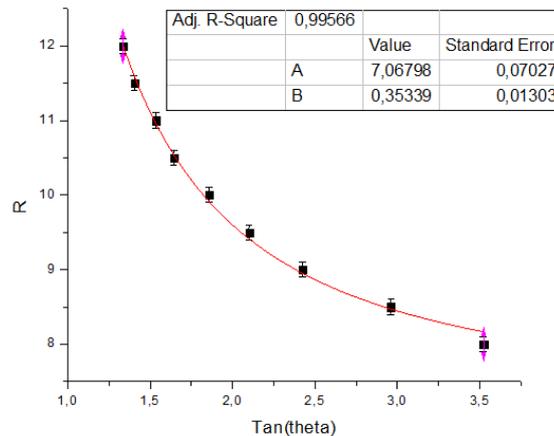


Figura 5.8: Misura a $\phi = 45^\circ$

Come si può osservare dai dati presentati nei grafici precedenti, l'approssimazione puntiforme dei rivelatori fornisce dei risultati compatibili con quelli misurati; è dunque possibile utilizzare la congiungente tra i due centri dei rivelatori come retta di massima efficienza, senza introdurre errori considerevoli nel modello. E' inoltre evidente il fatto che non ci siano significative deviazioni dell'andamento dei conteggi anche per raggi dello stesso ordine di grandezza della distanza delle facce dei rivelatori dal centro (15.5 cm); si può quindi concludere che non è necessario modificare il modello nel caso in cui la sorgente transiti molto vicina a uno dei rivelatori.

PROGRAMMAZIONE DELLA ROUTINE DI MISURA

La possibilità di programmare il comportamento di Maestro e del disco rotante si è rivelata fondamentale all'interno dell'esperimento, in quanto permette di automatizzare la maggior parte del processo di raccolta dei dati.

L'automatizzazione di Maestro è molto semplice: con il comando START viene avviata la raccolta dei dati dall'MCA, mentre con WAIT è possibile fissare il tempo in cui essa avviene; STOP blocca la raccolta, SAVE crea un file di testo contenente lo spettro e CLEAR cancella i dati raccolti e prepara Maestro a una nuova acquisizione; il comando LOOP, infine, permette di effettuare una serie di misure della stessa durata.

Il software di gestione del disco rotante, di principio, è dotato di funzioni altrettanto semplici, in grado di regolare l'ampiezza della rotazione e il tempo da far intercorrere tra una rotazione e l'altra. Manca però una funzione in grado di generare un loop, rendendo necessario copiare più volte il codice da eseguire; questo fattore è stato più volte causa di errori sperimentali, dovuti principalmente all'errato conteggio delle "iterazioni".

Coordinando i due sistemi è dunque possibile ottenere una serie di misure al variare dell'angolo di rotazione del disco, mantenendo fermi i rivelatori; l'interazione dell'utente con l'apparato è limitata alla semplice programmazione iniziale e alla raccolta dati finale.

Questa situazione ideale è però notevolmente diversa dalla realtà: a causa di diversi difetti del disco, la gestione delle rotazioni e la sincronizzazione temporale con Maestro sono state più

complesse del previsto.

La precisione con cui viene raggiunto un determinato angolo è fortemente limitata dal "gioco" di cui soffre il disco, che arriva fino a 16-17°. Se non si presta particolare attenzione al posizionamento iniziale dell'apparato, questo gioco fa sì che il disco non si muova in corrispondenza della spinta data dal motore, rendendo impraticabile una campagna di misure.

Tutto questo rende inoltre inutilizzabile la funzione MoveToPosition del software di controllo, in grado di portare l'apparato nella posizione desiderata, in quanto la rotazione imposta da questo comando ha una velocità (non regolabile dall'utente) troppo elevata: quando il disco raggiunge la posizione desiderata il motore si ferma, ma il disco prosegue nel suo moto inerziale per qualche istante, percorrendo fino a 10° più del previsto.

Per ovviare a questo problema è stato necessario sostituire il comando MoveToPosition con una combinazione di altri tre comandi: il primo (RotateLeft) fa ruotare il disco con velocità scelta dall'utente, il secondo (Wait) permette al disco di raggiungere la posizione desiderata e il terzo (Stop) arresta la rotazione in quel punto. Utilizzando velocità di rotazione molto basse e posizionando con cura il disco all'inizio di ogni campagna di misure è stato possibile porre rimedio a questo problema.

La funzione Wait, utilizzata sia per il controllo della rotazione che per la sincronizzazione con maestro, presenta però un altro problema, probabilmente quello di più difficile gestione.

L'unità di misura temporale utilizzata da questo comando è il *tick*, corrispondente (secondo il manuale dell'apparecchio) a un centesimo di secondo. Utilizzando questo valore si è però osservato che la sincronizzazione tra Maestro e il disco andava via via peggiorando, sistematicamente nella stessa direzione.

Una volta che è stato escluso che il problema potesse derivare da Maestro (utilizzando un cronometro per valutarne la coerenza), si è giunti a concludere che l'unità di tempo usata dal disco non è ben tarata. Utilizzando lo stesso cronometro sono stati valutati i tempi reali della rotazione (operazione di cui non abbiamo conservato i dati, essendo necessario ripeterla ad ogni misura in diverse condizioni) ed è stata effettuata la risincronizzazione tra i due sistemi.

Un ulteriore problema dato dalla funzione Wait è l'inspiegabile impossibilità di impostare tempi di attesa superiori ai 10 minuti, non segnalata dal manuale. Inserendo un valore superiore a 60000 tick all'interno del comando il disco si comporta in modo apparentemente casuale, traducendo il comando in un'attesa di 5-7 minuti.

Sorprendentemente, per le misure di durata elevata è stato sufficiente mettere più comandi Wait in sequenza, ciascuno di durata inferiore ai 10 minuti.

6.1 Codice per l'analisi dati

Al fine di ridurre i tempi necessari per analizzare la grande mole di dati derivanti dalle analisi di laboratorio (circa 250 spettri per ogni set di misure) è stato necessario scrivere alcuni semplici programmi in grado di sfruttare i dati nel modo richiesto, con tempi di lavoro decisamente brevi.

A causa delle diverse esperienze di programmazione dei diversi membri del gruppo, il codice è stato scritto in due linguaggi diversi: una parte, quella di conversione dei dati "grezzi" forniti da Maestro in formato utile, in MATLAB; un'altra, quella di interpretazione dei dati e applicazione del metodo di analisi, in ROOT.

Attraverso la funzione di programmazione interna a Maestro viene creato, alla fine di ogni misura, un file di testo contenente una serie di numeri, corrispondente al numero di conteggi per ogni singolo canale dell'MCA. E' inoltre presente un'intestazione dalla quale è possibile leggere il tempo di misura totale e il tempo "reale" (ovvero con l'esclusione del tempo morto del sistema).

All'interno della programmazione di Maestro si impone anche il salvataggio dei file in modo ordinato, per facilitare l'analisi iterativa dei dati: i nomi dei file sono standardizzati e contengono sia l'angolo ϕ a cui è stata effettuata la misura, sia un indice rappresentante il numero di step angolari percorsi dal disco.

Una volta che è stato estratto un *array* contenente i conteggi per canale di una singola misura, questo viene passato a una funzione che seleziona l'intervallo intorno al picco a 511 keV. Facendo partire questo intervallo subito dopo la spalla Compton, si osserva che il picco è sovrapposto a un fondo sostanzialmente lineare; è quindi possibile effettuare un fit dei dati con una funzione data dalla sovrapposizione di una gaussiana e di una retta. Prima di fittare viene però applicato un filtro mediano¹ ai dati.

Una volta che è stato ristretto il campo di analisi al solo picco, vengono calcolate l'area dello stesso (attraverso il metodo dei trapezi, una funzione già presente all'interno di MATLAB) e l'errore ad essa associato, derivante dalla formula $\sigma_A = \frac{1}{\sqrt{A}}$.

Questa procedura viene iterata su tutti i file, associando ogni volta un'area e un errore a uno specifico angolo di rotazione del disco; ciascuno di questi gruppi di dati viene poi associato anche all'angolo ϕ a cui è stata effettuata la serie di misure.

Per rendere confrontabili i dati raccolti a diversi ϕ viene effettuata una normalizzazione: detto ϕ_0 l'angolo di interesse, ciascuna area associata a una misura con $\phi = \phi_0$ viene divisa per la somma di tutte le aree all'interno del set di misure ϕ_0 .

¹Procedura di *smoothing* della curva ottenuta mediando ogni punto con il precedente e il successivo.

ANALISI DEI DATI

7.1 Misure in aria

Per valutare l'efficacia del metodo di analisi sono state effettuate varie misure, nelle quali la sorgente è stata posta in diverse posizioni sul disco. Tutte le misure sono state effettuate con la stessa routine: la sorgente è stata fatta ruotare di 180° a step di 3° , con pause di 15' tra uno step e l'altro¹. Inizialmente si sono acquisiti i dati con i rivelatori affacciati ($\phi = 0^\circ$) e, dopo aver riposizionato la sorgente nella posizione di partenza, sono state effettuate le misure con $\phi \neq 0^\circ$.

Per ottenere una buona distribuzione spaziale dei dati finali, le varie serie di misure sono state effettuate a raggi differenti: 6.6cm, 7.5cm, 9.6cm, 12.5cm. A causa dei limiti introdotti dal raggio minimo r_m (sezione 5.1), le prime tre misure sono state effettuate con $\phi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$, mentre per l'ultima sono stati raccolti i dati anche a $\phi = 60^\circ$.

Nelle pagine seguenti sono riportate le tabelle contenenti i dati ricavati dai diversi set di misure; ad esse sono correlati dei grafici dove sono riportate le posizioni (x,y) dei punti sperimentali, della loro media e del valore reale. L'analisi degli errori è stata effettuata con i metodi standard della propagazione degli errori, tenendo conto dell'errore angolare di 1° di cui si è già discusso nella sezione riguardante l'apparato strumentale. Gli errori relativi alla misura reale dipendono dalla sensibilità degli strumenti utilizzati (riga, goniometro).

¹La scelta dei tempi di misura e degli step angolari è stata effettuata, a seguito di una serie di misure preliminari, per conciliare la buona riuscita dell'esperimento (legata alla risoluzione totale del sistema) con la necessità di effettuare raccolte di dati in tempi ragionevoli.

Misura con $\rho_S = 6.6\text{cm}$										
$\phi_{[^\circ]}$	$\rho_{[cm]}$	σ_ρ	$\sigma_\rho\%$	$\theta_{[^\circ]}$	$x_{[cm]}$	σ_x	$\sigma_x\%$	$y_{[cm]}$	σ_y	$\sigma_y\%$
15	6.061	0.573	9.5 %	30.0	5.25	0.50	10 %	3.03	0.30	10 %
30	6.826	0.629	9.2 %	30.0	5.91	0.56	10 %	3.41	0.34	10 %
45	6.420	0.942	15.0 %	30.0	5.56	0.87	16 %	3.21	0.51	16 %
<i>MEDIA</i>	6.436	0.423	6.6 %	30.0	5.57	0.29	5 %	3.22	0.17	5 %
<i>V.REALI</i>	6.600	0.141	2.1 %	30.0	5.72	0.1	2 %	3.30	0.1	3 %
DIFF. %	2.49 %	/	/	0.002 %	2.49 %	/	/	2.49 %	/	/

Misura con $\rho_S = 7.5\text{cm}$										
$\phi_{[^\circ]}$	$\rho_{[cm]}$	σ_ρ	$\sigma_\rho\%$	$\theta_{[^\circ]}$	$x_{[cm]}$	σ_x	$\sigma_x\%$	$y_{[cm]}$	σ_y	$\sigma_y\%$
15	7.160	0.358	5.0 %	0.0	7.16	0.26	4 %	0.00	0.05	/
30	7.370	0.604	8.2 %	0.0	7.37	0.68	9 %	0.00	0.13	/
45	6.890	0.358	5.2 %	0.0	6.89	0.25	4 %	0.00	0.12	/
<i>MEDIA</i>	7.140	0.263	3.7 %	0.0	7.14	0.26	4 %	0.00	0.06	/
<i>V.REALI</i>	7.500	0.141	1.9 %	0.0	7.50	0.10	1 %	0.00	0.10	/
DIFF. %	4.80 %	/	/	0.00 %	4.80 %	/	/	0.00 %	/	/

Misura con $\rho_S = 9.6\text{cm}$										
$\phi_{[^\circ]}$	$\rho_{[cm]}$	σ_ρ	$\sigma_\rho\%$	$\theta_{[^\circ]}$	$x_{[cm]}$	σ_x	$\sigma_x\%$	$y_{[cm]}$	σ_y	$\sigma_y\%$
15	11.10	1.550	14 %	63.00	5.04	0.77	15 %	9.89	1.47	15 %
30	8.833	0.951	11 %	63.00	4.01	0.39	10 %	7.87	0.98	12 %
45	9.137	0.948	10 %	62.99	4.15	0.54	13 %	8.14	1.02	13 %
<i>MEDIA</i>	9.690	0.684	7.1 %	62.99	4.40	0.34	8 %	8.63	0.68	8 %
<i>V.REALI</i>	9.600	0.141	1.5 %	63.00	4.36	0.10	2 %	8.55	0.10	1 %
DIFF.%	0.94 %	/	/	0.01 %	0.96 %	/	/	0.93 %	/	/

Misura con $\rho_S = 12.5\text{cm}$										
$\phi_{[^\circ]}$	$\rho_{[cm]}$	σ_ρ	$\sigma_\rho\%$	$\theta_{[^\circ]}$	$x_{[cm]}$	σ_x	$\sigma_x\%$	$y_{[cm]}$	σ_y	$\sigma_y\%$
15	11.101	1.220	11 %	78.0	2.30	0.37	16 %	10.86	1.48	14 %
30	9.865	0.640	6.5 %	78.0	2.05	0.22	11 %	9.65	0.61	6 %
45	10.467	0.521	5.0 %	78.0	2.28	0.21	10 %	10.24	0.48	5 %
60	10.970	0.450	4.1 %	78.0	2.28	0.20	9 %	10.73	0.42	4 %
<i>MEDIA</i>	10.601	0.385	3.6 %	78.0	2.20	0.12	5 %	10.37	0.42	4 %
<i>V.REALI</i>	12.474	0.141	1 %	78.0	2.60	0.10	4 %	12.20	0.10	1 %
DIFF.%	15.02 %	/	/	0.07 %	15.38%	/	/	15.00%	/	/

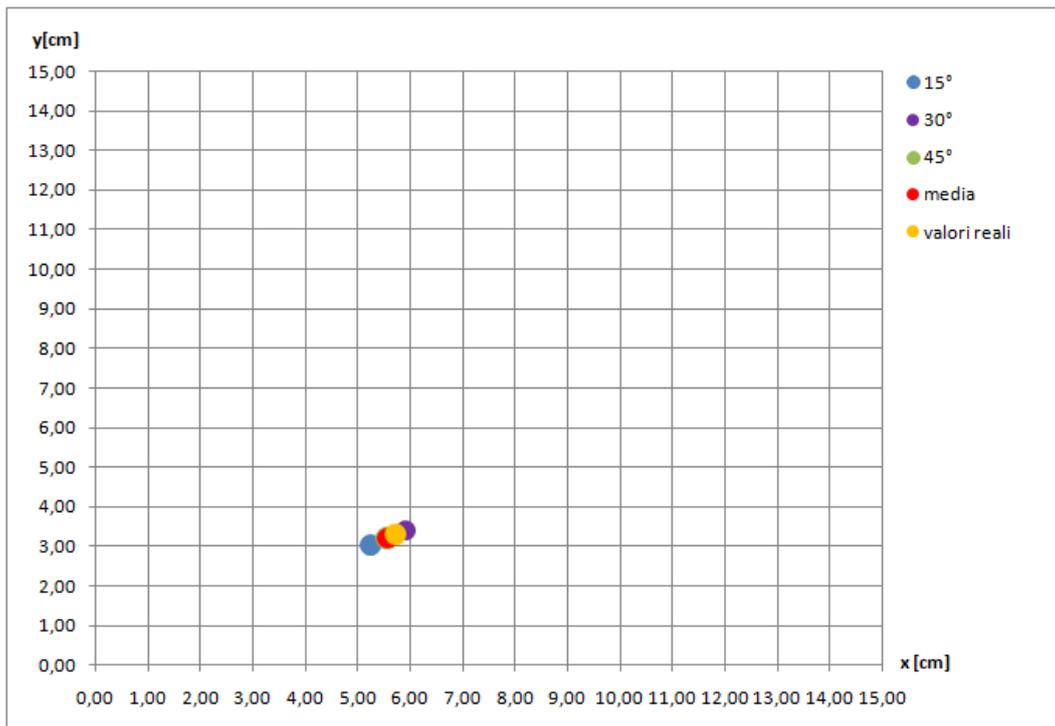


Figura 7.1: $\rho = 6.6$ cm

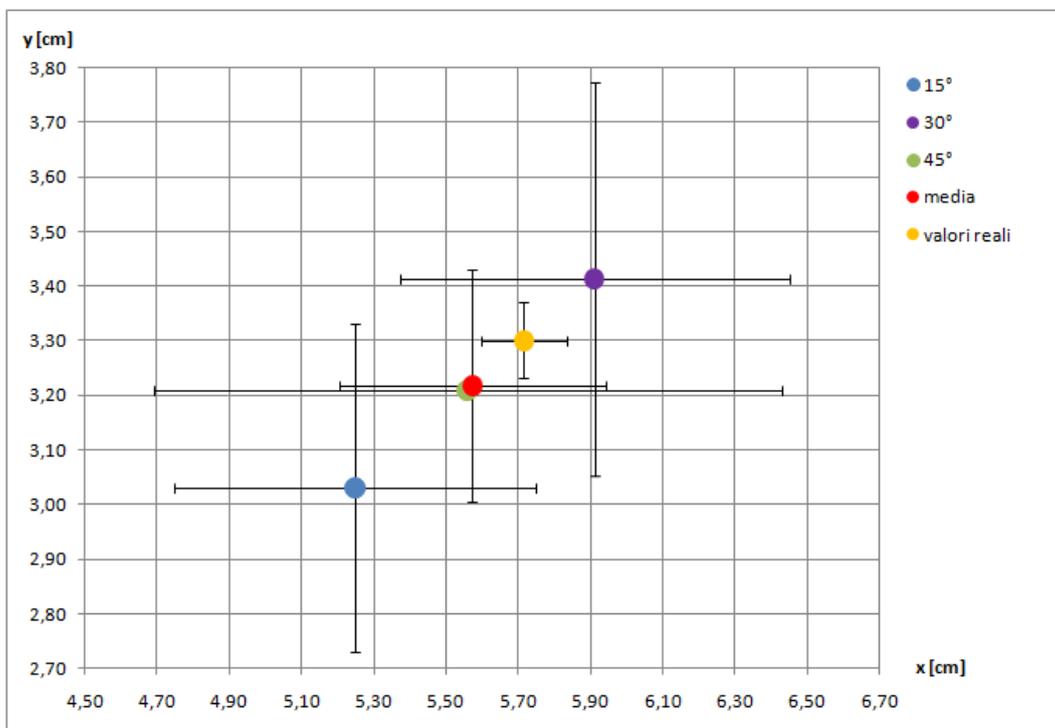


Figura 7.2: $\rho = 6.6$ cm, ingrandimento

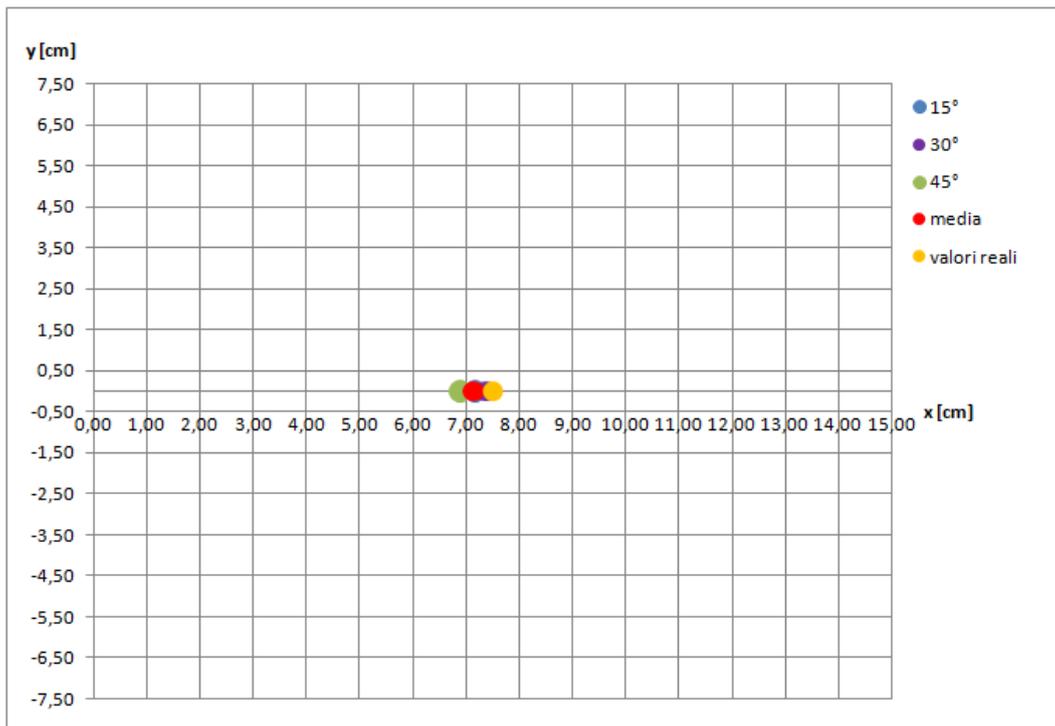


Figura 7.3: $\rho = 7.5$ cm

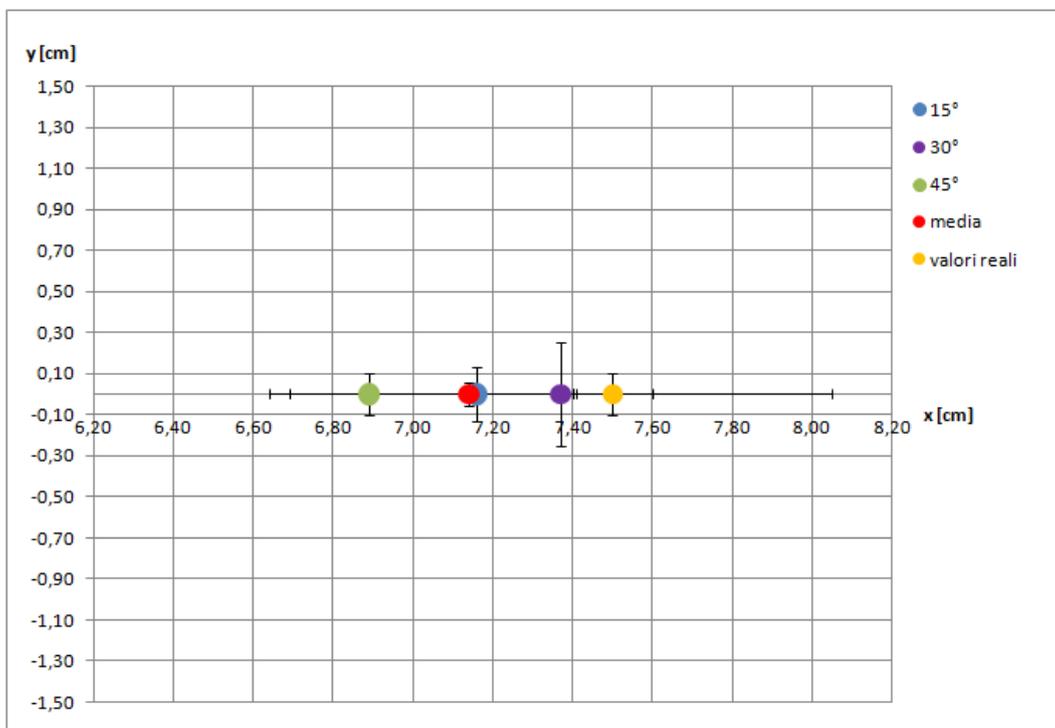


Figura 7.4: $\rho = 7.5$ cm, ingrandimento

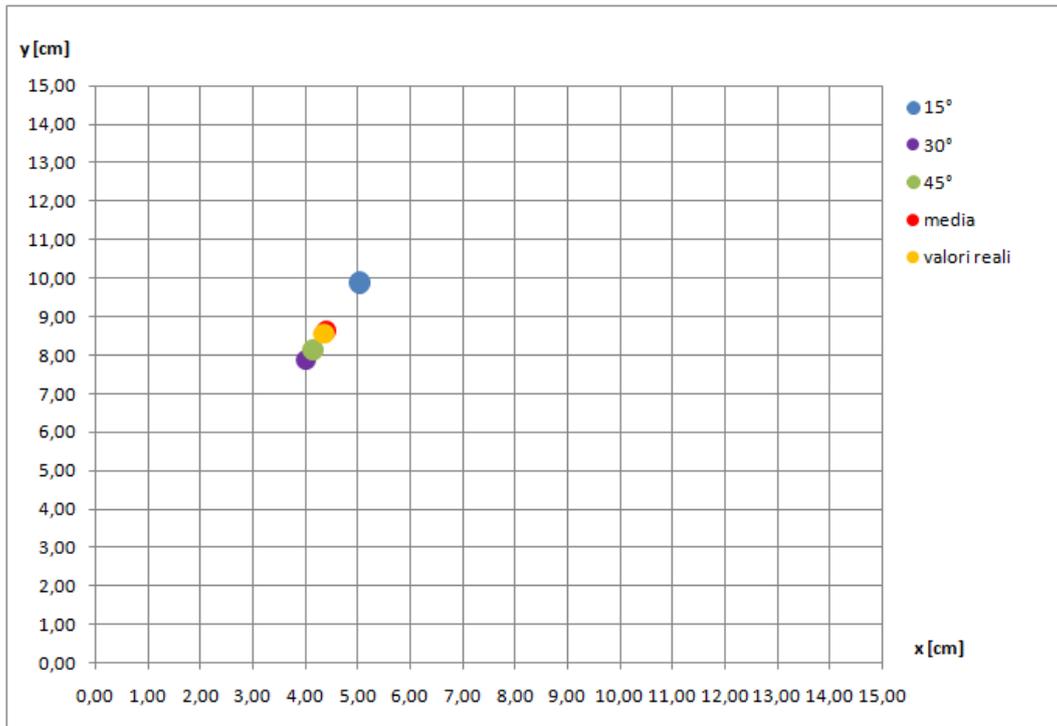


Figura 7.5: $\rho = 9.6$ cm

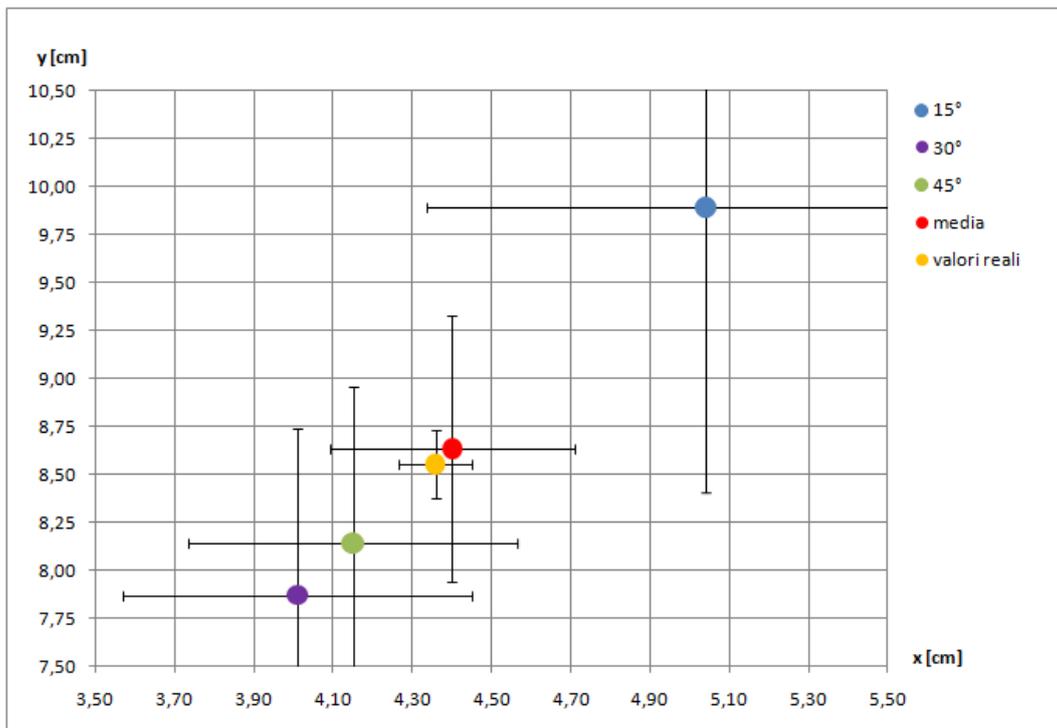


Figura 7.6: $\rho = 9.6$ cm, ingrandimento

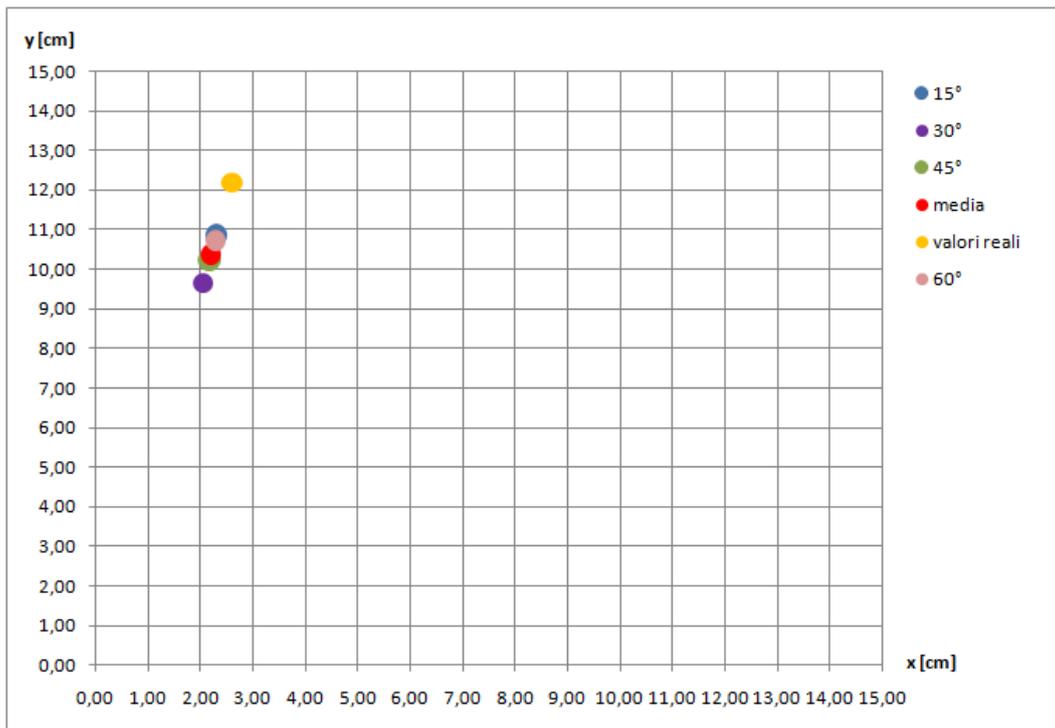


Figura 7.7: $\rho = 12.5$ cm

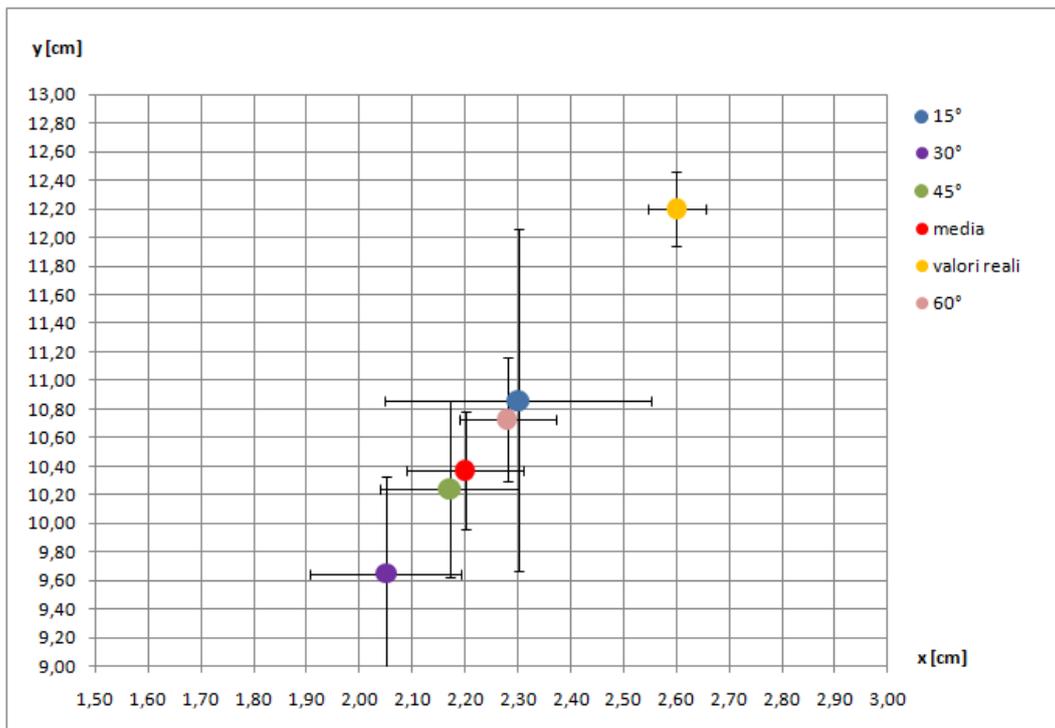


Figura 7.8: $\rho = 12.5$ cm, ingrandimento

Nelle immagini presentate nelle pagine precedenti è evidenziata la posizione delle coppie (x,y) cui corrisponde la massima probabilità. Per fornire una miglior visualizzazione grafica della distribuzione spaziale dei punti sperimentali, la matrice ottenuta dall' algoritmo di ricostruzione è stata inserita in un istogramma 3D, nel quale l'asse verticale rappresenta la probabilità corrispondente alla singola coppia (x,y) . Sebbene questo tipo di grafico non porti nessun vantaggio dal punto di vista della precisione del metodo, è utile per avere una migliore visione dei risultati ottenuti.

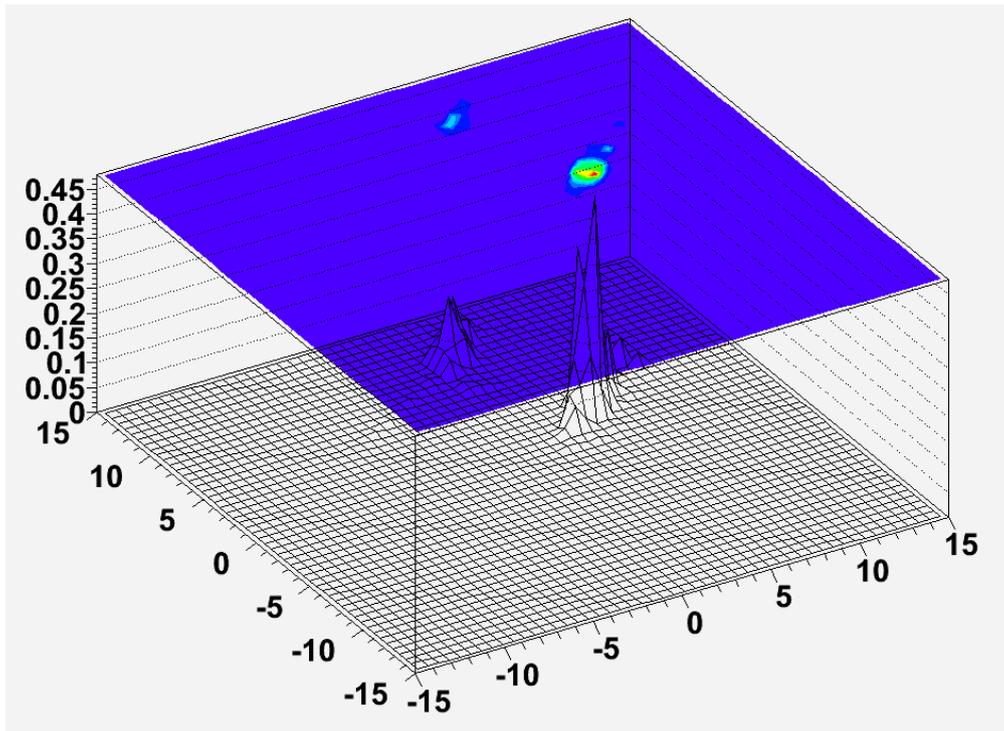


Figura 7.9: Visualizzazione 3D della misura a $\rho = 9.6\text{cm}$

A titolo di esempio, nella figura 7.9 è mostrata la distribuzione di probabilità della misura con $\rho = 9.6\text{cm}$. Nella parte superiore del grafico si può osservare, attraverso l'uso di una scala cromatica, la presenza di un picco marcato in corrispondenza della posizione iniziale della sorgente; nella parte inferiore, lo stesso picco è evidenziato dall'istogramma in 3D.

Le analisi effettuate hanno fornito risultati in buon accordo con le misure reali della posizione, con errori inferiori al 5%; l'unica eccezione è rappresentata dal set di misure con $\rho = 12.5\text{cm}$, nel quale la differenza tra la posizione reale e la posizione ricavata sperimentalmente è superiore al 15%. Nel tentativo di dare una spiegazione a questo comportamento anomalo è stata inizialmente presa in considerazione la distanza tra la sorgente e i rivelatori: nel caso in

cui questa sia dello stesso ordine di grandezza della dimensione del rivelatore², il massimo dei conteggi potrebbe essere raggiunto in una posizione diversa rispetto a quella considerata nel metodo di analisi, ovvero la congiungente i centri dei due rivelatori. Questo porterebbe a un errore all'interno dell'algoritmo di ricostruzione della posizione e alla conseguente imprecisione rilevata. Le misure di cui al paragrafo 5.2 sono state effettuate a seguito di questi risultati, con il fine di osservare un'eventuale deviazione nella posizione del massimo dei conteggi. Come si è già detto in precedenza, però, questa deviazione non è stata osservata, anche in condizioni di transito della sorgente a breve distanza (3.5 cm) dal rivelatore.

Una volta che è stata esclusa la possibilità che questo effetto provenga da errori nel metodo di analisi, si è ritenuto molto probabile che essa derivi da un semplice errore sperimentale. La misura in questione è stata infatti condotta in un periodo complessivo di 4-5 giorni, durante i quali si sono verificati frequenti cali di tensione all'interno del laboratorio, a causa delle avverse condizioni atmosferiche. Le continue interruzioni delle misure hanno portato, con ogni probabilità, a errori nel riposizionamento dell'apparato, causando l'anomalia nel risultato finale.

Tutte le misure precedenti sono state effettuate mantenendo i rivelatori alla stessa distanza dal centro; per sopperire alla mancanza di un set di misure con distanze superiori, ne è stato effettuato un altro ponendo i rivelatori a 25 cm dal centro e la sorgente a $\rho = 12.5$ cm. I risultati di questa analisi sono riportati nella tabella seguente:

Misura con $\rho_S = 12.5$cm										
$\phi_{[^\circ]}$	$\rho_{[cm]}$	σ_ρ	$\sigma_\rho\%$	$\theta_{[^\circ]}$	$x_{[cm]}$	σ_x	$\sigma_x\%$	$y_{[cm]}$	σ_y	$\sigma_y\%$
15	13.98	1.538	11%	42.00	10.39	1.27	1 %	9.35	1.15	12%
30	14.247	1.482	10%	42.00	10.59	1.00	9%	9.53	0.91	9%
<i>MEDIA</i>	14.112	1.068	8%	42.00	10.49	0.81	8%	9.44	0.73	8%
<i>V.REALI</i>	13.793	0.200	1.4%	43.53	10.00	0.10	1%	9.50	0.10	1%
DIFF.%	2.31%	/	/	3.55%	4.90%	/	/	0.63%	/	/

²Nel momento di massimo avvicinamento, la distanza tra sorgente e rivelatore è di 3 cm, mentre il rivelatore misura 2.54 cm (1 in).

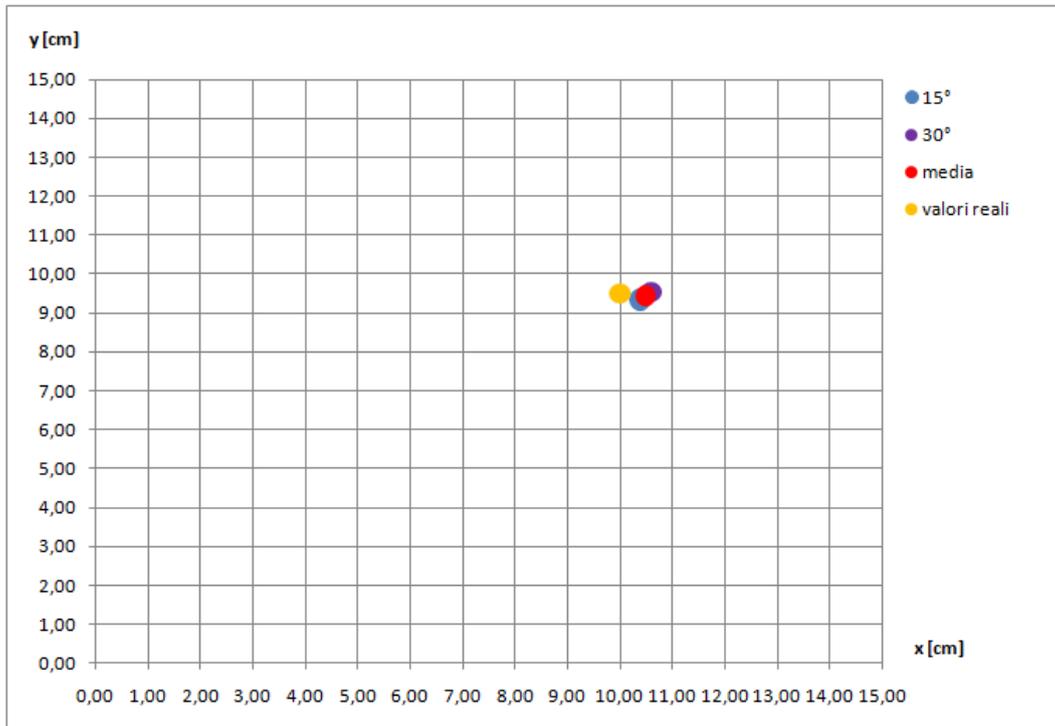


Figura 7.10: $\rho = 12.5$ cm, rivelatori lontani

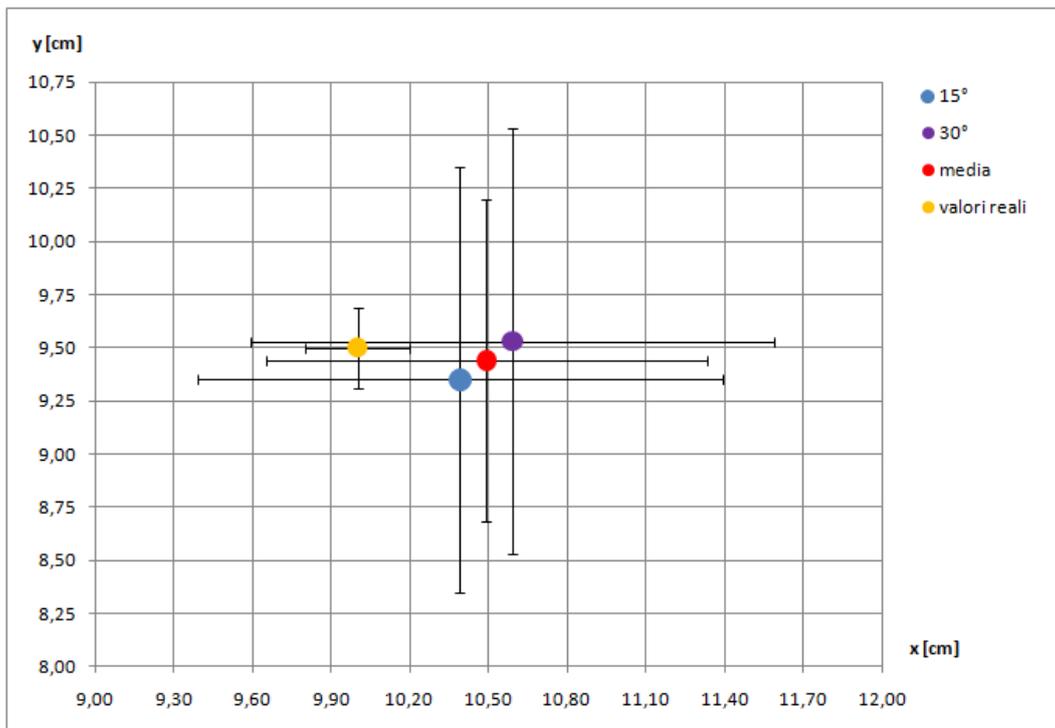


Figura 7.11: $\rho = 12.5$ cm, rivelatori lontani, ingrandimento

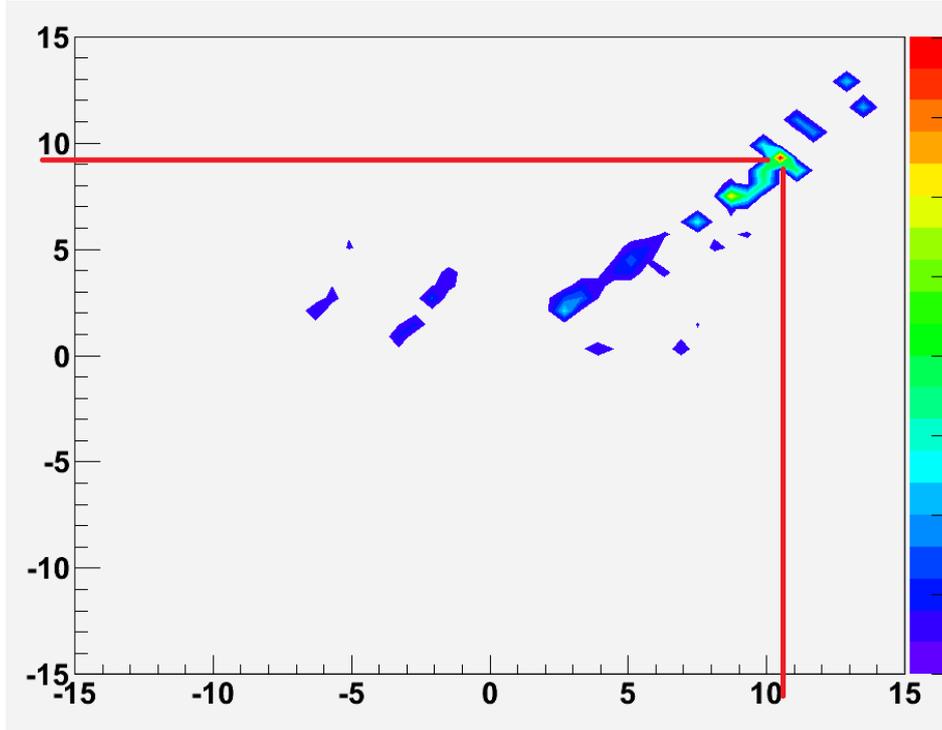


Figura 7.12: $\rho = 12.5$ cm, rivelatori lontani, proiezione della distribuzione di probabilità su (x,y)

A causa dell'aumento della distanza dei rivelatori dal centro, è stato necessario ridurre il numero di misure effettuate: è infatti aumentato il raggio minimo r_m e, di conseguenza, si è potuto ottenere qualche risultato soltanto dalle misure con $\phi = 15^\circ$ e 30° .

7.2 Misura in un mezzo materiale

7.2.1 Interazione dei fotoni con la materia

L'interazione dei fotoni con la materia ordinaria avviene tramite tre processi principali: effetto fotoelettrico, effetto Compton e produzione di coppie. La sezione d'urto associata a ciascuno di questi processi dipende dall'energia dei fotoni e dalle caratteristiche del materiale; per l'effetto fotoelettrico si ha $\sigma_{ph} \propto Z^5(h\nu)^{-3.5}$, per l'effetto Compton $\sigma_C \propto Zf(h\nu)$ mentre per la produzione di coppie vale la relazione $\sigma_{pp} \propto Z^2g(h\nu)$. Dato quindi un fascio di fotoni di flusso Φ si introduce una legge di attenuazione del fascio in funzione dello spessore x di materiale attraversato:

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-\mu x}$$

$$(\mu = \mu_{tot} = \mu_{ph} + \mu_C + \mu_{pp})$$

Indicando con l'indice i un generico processo che comporta la scomparsa del fotone dal fascio di partenza e con N la densità dei nuclei atomici nel materiale, $\mu_i = N\sigma_i$. Si può considerare

il coefficiente di attenuazione massico μ/ρ dove ρ è la densità del materiale attraversato dai fotoni.

7.2.2 Misura del coefficiente di attenuazione del sale

Misura in coincidenza			
	Misura	σ	$\sigma\%$
A_0 (counts)	3431	132	3.8%
A_x (counts)	2647	153	5.8%
A_x/A_0	77%		
x(cm)	2.05	0.01	0.5%
$\rho(g/cm^3)$	2.16		
μ/ρ	0.0586	0.022	38%
μ/ρ (tab)	0.0835		
DIFF.%	30%		

Misura non in coincidenza			
	Misura	σ	$\sigma\%$
A_0 (counts)	19879	848	4.3%
A_x (counts)	14709	1174	8.0%
A_x/A_0	74%		
x(cm)	2.05	0.01	0.5%
$\rho(g/cm^3)$	2.16		
μ/ρ	0.068	0.028	41%
μ/ρ (tab)	0.0835		
DIFF.%	19%		

Misurando l'attenuazione del fascio di fotoni prodotta dallo spessore di sale, è stato ricavato il coefficiente di attenuazione massico del materiale dalla relazione:

$$\frac{\mu}{\rho} = \ln \frac{A_0}{A_x} \frac{1}{x\rho}$$

La presenza di materiale tra sorgente e rivelatore e la conseguente attenuazione del fascio hanno reso necessarie delle considerazioni sui tempi di misura³. Dai dati provenienti dalla misura non in coincidenza risulta che i 2 cm di sale comportano un'attenuazione del numero di fotoni pari al 74%; i tempi di misura sono stati opportunamente ricalcolati.

³Questo diventa particolarmente rilevante quando si tratta di una PET reale, dove occorre minimizzare la dose somministrata al paziente

7.2.3 Ricostruzione della posizione

La tabella che segue riporta i dati relativi alla ricostruzione della posizione della sorgente posta nel recipiente contenente sale.

$\phi_{[^\circ]}$	$\rho_{[cm]}$	σ_ρ	$\sigma_\rho\%$	$\theta_{[^\circ]}$	$x_{[cm]}$	σ_x	$\sigma_x\%$	$y_{[cm]}$	σ_y	$\sigma_y\%$
15	5.497	0.412	7.5%	30.0	4.89	0.43	9%	2.51	0.21	8%
30	7.367	0.884	12.0%	30.0	6.72	0.63	9%	3.02	0.54	18%
45	7.476	1.047	14.0%	30.0	6.83	1.38	20%	3.04	0.41	13%
<i>MEDIA</i>	6.780	0.477	7.0%	30.0	6.15	0.52	9%	2.86	0.24	8%
<i>V.REALI</i>	6.600	0.500	7.6%	30.0	5.72	0.43	8%	3.30	0.25	8%
DIFF.%	2.73%			0.00%	7.54%			13%		

La presenza del sale all'interno del contenitore rende più difficile una misura accurata della posizione reale della sorgente; per questo motivo, l'incertezza ad essa relativa è stata aumentata a 0.5 cm.

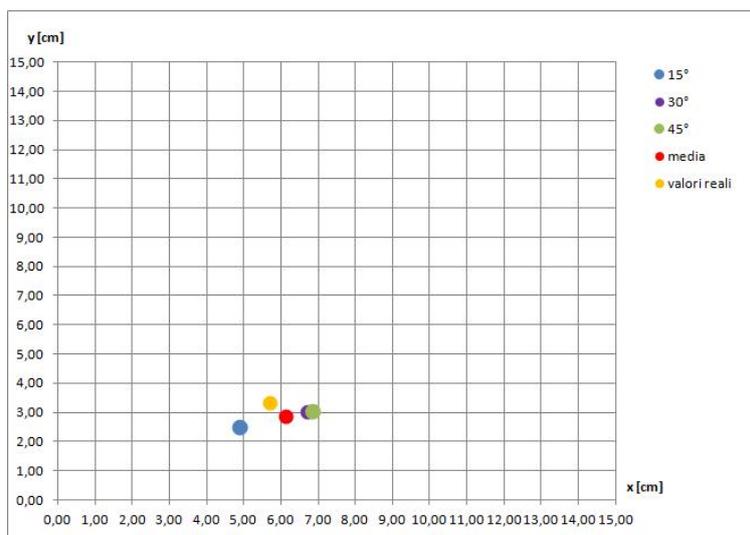


Figura 7.13: $\rho = 6.6\text{cm}$

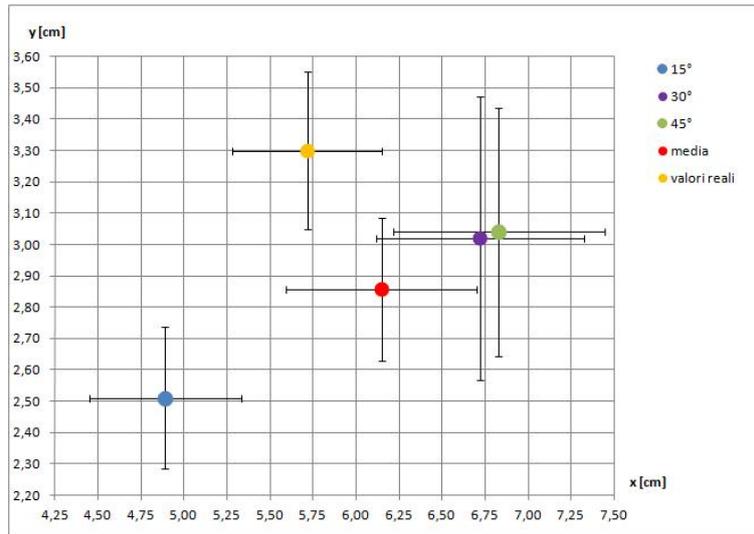


Figura 7.14: $\rho = 6.6\text{cm}$, ingrandimento

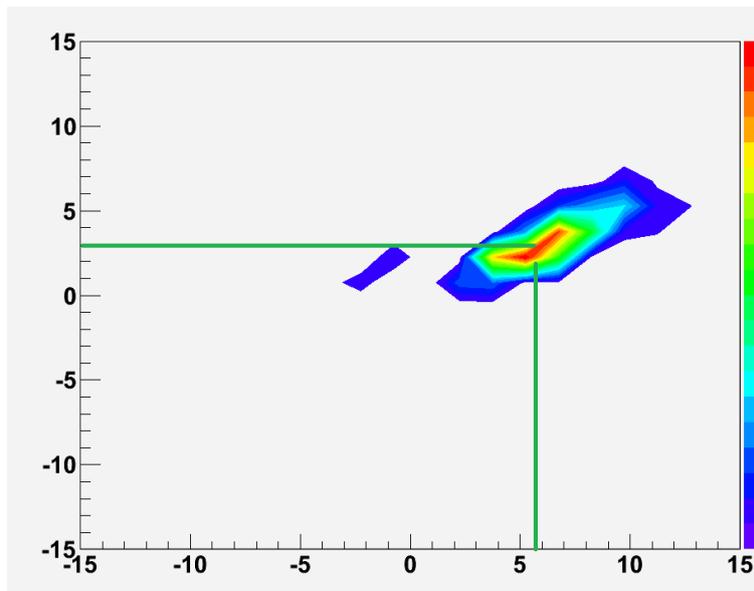


Figura 7.15: Distribuzione di probabilità sul piano (x,y)

Nei grafici 7.13 e 7.14 è visualizzata la localizzazione della sorgente; la misura ha fornito risultati compatibili con quanto ottenuto in aria. La figura 7.15 evidenzia un maggiore sparpagliamento della distribuzione di probabilità intorno al punto di massimo; questo è causato dallo scattering dei fotoni nel sale.

CONCLUSIONI

Le misure della posizione della sorgente hanno fornito valori in buon accordo con quelli reali; i risultati dell'algoritmo di ricostruzione sono sempre distanti meno di 1σ da quelli veri, con le relative incertezze. Se ne deduce che il metodo di analisi dei dati è corretto per quelle che sono le casistiche analizzabili con un apparato di questo tipo; l'obiettivo prefissato di individuare la posizione della sorgente, posta in un punto casuale del piano o all'interno di un mezzo materiale, è stato raggiunto.

Abbiamo individuato dei possibili miglioramenti al metodo ideato al fine di aumentare la precisione con cui viene individuata la posizione, pur lasciando inalterato l'algoritmo di ricostruzione. Innanzitutto è possibile ottimizzare le misure riducendo notevolmente i tempi necessari al loro completamento, compatibilmente con la sorgente a disposizione; abbiamo verificato come siano sufficienti pochi minuti per ottenere una statistica soddisfacente. Uno studio più approfondito dell'efficienza di rivelazione dell'apparato, specialmente per quanto riguarda il posizionamento dei rivelatori, può portare a un ulteriore vantaggio da questo punto di vista. Questo approccio è analogo a quello medico, nel quale è necessario minimizzare tempi di misura e dose assorbita dal paziente.

Una volta raggiunto questo obiettivo, è possibile aumentare la statistica effettuando un maggior numero di misure, con la possibilità di sperimentare nuove configurazioni dell'apparato: da un lato, effettuare rotazioni di 360° anziché 180° , raddoppiando il numero di passaggi sull'asse di massima efficienza; dall'altro, cercare nuovi posizionamenti per la coppia di rivelatori.

Allo stato attuale, il maggior limitante all'aumento della precisione risulta essere il disco rotan-

te, i cui difetti sono già stati discussi nella sezione 6; eliminandoli sarebbe possibile compiere delle rotazioni con step inferiori a 3° e quindi, compatibilmente con la capacità risolutiva dei rivelatori, aumentare il numero di punti del piano che vengono analizzati e, di conseguenza, la precisione del metodo.

Inoltre, la sostituzione di alcuni dispositivi tra quelli in dotazione potrebbero facilitare alcune fasi del lavoro svolto. L'uso di rivelatori e amplificatori diversi complica le procedure iniziali di caratterizzazione e *matching*, pur non compromettendo l'esito finale; avere a disposizione amplificatori in grado di fornire una maggior scelta in termini di shaping time potrebbe portare ad ottenere una miglior configurazione del sistema in coincidenza; il danneggiamento della manopola del guadagno su uno degli amplificatori ne ha reso difficile l'utilizzo, portandoci a dover sovrastimare la dimensione della finestra energetica dello SCA.

Avere a disposizione un'unità delay con tempi regolabili nell'ordine dei μs consentirebbe un'analisi dettagliata delle false coincidenze, oltre a ottimizzare il processo di sovrapposizione degli impulsi in coincidenza (sezione 4.1).

Utilizzare contenitori di diverso spessore e altre sostanze per l'analisi nel mezzo materiale, oltre a consentire una più accurata valutazione del coefficiente di attenuazione, darebbe la possibilità di sperimentare nuove configurazioni interessanti anche dal punto di vista medico.

APPENDICE

9.1 Codice per la ricostruzione della posizione

```
//funzione per la conversione degrees to radians
float dtr (float deg)
{
    return deg*(3.141592/180.);
}

// funzione per il calcolo del raggio a cui si trova la sorgente
float raggio (float alfa, float beta, float fi, float R)
{
    float xsl, ysl;
    xsl =( R* tan(fi/2.) ) / ( tan(alfa-beta) - tan(fi/2.));
    ysl = xsl*tan(alfa-beta);
    float raggio;
    raggio = sqrt((xsl)*(xsl)+(ysl)*(ysl));
    return raggio;
}

// propagazione degli errori
double err_raggio (float alfa, float beta, float fi, float R, float err_alfa, float err_beta, float raggio)
{
    return raggio*((1+pow(tan(alfa-beta),2))/
    (tan(alfa-beta)-tan(fi/2))+tan(alfa-beta))*(sqrt(pow(err_alfa,2)+pow(err_beta,2))));
}

// per ottenere le coordinate cartesiane da quelle polari
float x_cartesiano (float alfa, float raggio)
{
    return raggio*cos(alfa);
}
float y_cartesiano (float alfa, float raggio)
{
    return raggio*sin(alfa);
}

// analisi dei dati
main ()
{
    int n;
    // struttura della matrice dei dati ( attenzione al numero di dati per ogni misura )
    std::cout << "dati disposti come:" << std::endl;
```

```

std::cout << "alfa , err_alfa , cont_alfa , err_cont_alfa , beta , err_beta ,
cont_beta , err_cont_beta," << std::endl;
std::cout << "considero i conteggi , normalizzati sui conteggi totali ,
come una probabilita" << std::endl;

float alfa[300], beta[300], err_alfa[300], err_beta[300], p_alfa[300],
err_p_alfa[300], p_beta[300], err_p_beta[300] ;
float fi=dtr(345);
float R=15.5;
float R_min=R*sin(fi/2);
int i=0, j=0;

n=60;

// lettura di un txt con la matrice dei dati
std::ifstream inFile("dati_fil15.txt", std::ios::in);
while(i<n)
{
    inFile >> alfa[i];
    inFile >> err_alfa[i];
    inFile >> p_alfa[i];
    inFile >> err_p_alfa[i];
    inFile >> beta[i];
    inFile >> err_beta[i];
    inFile >> p_beta[i];
    inFile >> err_p_beta[i];
    i++;
}

//conversione da gradi a radianti
for(i=0;i<n;i++)
{
    alfa[i]=dtr(alfa[i]);
    beta[i]=dtr(beta[i]);
    err_alfa[i]=dtr(err_alfa[i]);
    err_beta[i]=dtr(err_beta[i]);
}

//normalizzazione dei conteggi per ciascuna delle due scansioni
float somma_alfa=0.;
float somma_beta=0.;
int h;

for (h=0;h<n;h++)
{
    somma_alfa=somma_alfa+p_alfa[h];
    somma_beta=somma_beta+p_beta[h];
}

for (int h=0;h<n;h++)
{
    p_alfa[h]=p_alfa[h]/somma_alfa;
    p_beta[h]=p_beta[h]/somma_beta;
    err_p_alfa[h]=err_p_alfa[h]/somma_alfa;
    err_p_beta[h]=err_p_beta[h]/somma_beta;
}

//calcolo delle probabilita nelle varie posizioni
int t=n*n;
//matrice dei risultati: r, err_r, alfa, err_alfa, prob, err_prob
//prodotto cartesiano n*n
float r[10000];
float teta[10000];
float err_r[10000];
float err_teta[10000];
float p[10000];
float err_p[10000];

h=0;
int u=0;
while(h<t)
{
    for (i=0;i<n;i++)
    {
        r[h+i]=raggio(alfa[u], beta[i], fi, R);
        err_r[h+i]=err_raggio(alfa[u], beta[i], fi, R, err_alfa[u], err_beta[i], r[h+i]);
        teta[h+i]=alfa[u];
        err_teta[h+i]=err_alfa[u];
    }
}

```

```

        p[h+i]=p_alfa[u]*p_beta[i];
        err_p[h+i]=p[h+i]*((err_p_alfa[u]/p_alfa[u])+(err_p_beta[i]/p_beta[i]));
    }
    h=h+n;
    u++;
}

// scarto le coordinate senza senso fisico ( raggio > R o < r_min )
// converto da coord polari a coord cartesiane

float x[10000];
float y[10000];
float err_x[10000];
float err_y[10000];

u=0;
float b=0, c=0;
int s=0;
for (i=0;i<t;i++)
{
    if(r[i]<R && r[i]>R_min)
    {
        x[u]=x_cartesiano(teta[i],r[i]);
        y[u]=y_cartesiano(teta[i],r[i]);
        err_x[u]=sqrt((pow(err_r[i]*cos(teta[i]),2))+ (pow(err_teta[i]*r[i]*sin(teta[i]),2)));
        err_y[u]=sqrt((pow(err_r[i]*sin(teta[i]),2))+ (pow(err_teta[i]*r[i]*cos(teta[i]),2)));
        p[u]=10000*p[i];
        err_p[u]=10000*err_p[i];
        b=b+p[u];
        u++;
    }
}

// rinormalizzo le probabilità, una volta scartati i dati che non hanno senso fisico
// cerco la coppia di coordinate con associato il valore massimo di P

float g=0;
for (i=0;i<u;i++)
{
    p[i]=p[i]/b;
    err_p[i]=err_p[i]/b;
    c=c+p[i];
    if(p[i]>g)
    {
        g=p[i];
        s=i;
    }
}

// stampo in un file di output

std::ofstream outFile("risultati15.txt", std::ios::out);
{
    for(i=0;i<u;i++)
        outFile << x[i] << "\t\t" <<err_x[i] << "\t\t" << "\t\t" <<err_y[i] <<
            "\t\t" <<p[i] << "\t\t" <<err_p[i]<< std::endl;
}
// stampo il punto in cui ho trovato essere la sorgente
outFile <<std::endl << x[s] <<"\t" << err_x[s] <<"\t" << y[s] <<"\t" << err_y[s] <<
    "\t" << g << "\t" << err_p[s];

    outFile.close();
// eventuali grafici in root con la matrice di dati elaborati

// ...
}

```

9.2 Codice per il fit gaussiano del picco

```
function[Area, ErrArea] = GaussFit(file)
% Fitta i dati contenuti in file con una funzione Gaussiana sommata a una
% baseline lineare.
% L'equazione è nella forma:
%
%  $Y = a_1 \exp(-(x-b_1)/c_1)^2 + d_1 x + e_1$ 
%
% I valori che estraggo sono l'area (calcolata con il metodo dei trapezi
% partendo dal fit) e l'errore sull'area.

% Definisco la funzione da utilizzare come fit
Gauss = fitype('a1*exp(-((x-b1)/c1)^2) + d1*x + e1');
% Opzioni del fit, per assegnare i valori iniziali ai parametri. Se Start
% non è assegnato, il default è -Inf.
Options = fitoptions(Gauss);
Options.StartPoint = [0.5 660 50 1 5];

% Estrazione dei dati grezzi dal file di partenza
RawData = dlmread(file, '\t', [13 0 2059 0]);
% Selezione dell'area da osservare, un intorno del picco
RawData = RawData(560:760);
X = (560:760)';

% Filtro mediano (ogni punto viene mediato con il precedente e il
% successivo), smoothing della curva
i = 1;
while(i<=length(RawData))

    if(i==1)
        Data(i,1) = (RawData(i) + RawData(i+1))/2;
    elseif(i==length(RawData))
        Data(i,1) = (RawData(i) + RawData(i-1))/2;
    else
        Data(i,1) = (RawData(i) + RawData(i-1) + RawData(i+1))/3;
    end

    i = i + 1;
end

% Viene effettuato il fit vero e proprio. Coeff contiene i 5 coefficienti.
GFit = fit(X,Data,Gauss,Options);
Coeff = coeffvalues(GFit);

% Funzione della sola gaussiana & calcolo dell'area. L'errore sull'area
% estratta dal fit (in percentuale) è dato da 1/sqrt(area).
FittedFunction = Coeff(1)*exp(-((X-Coeff(2))/Coeff(3)).^2);
Area = trapz(FittedFunction);
ErrArea = 1/sqrt(Area);
```

9.3 Codice di analisi degli spettri

```
function[Data] = PET(folder, d)
% Funzione che restituisce la distribuzione di probabilità sulla posizione
% della sorgente. Folder è la cartella dove si vuole lavorare, d la
% distanza della faccia dei rivelatori dal centro (default = 15.5 cm)

switch nargin
    case 1
        d = 15.5;
end

% Array preallocati
outRaw = zeros(30,9);
out = zeros(30,9);

% Ciclo su tutte le cartelle a vari angoli
j = 0;
while(j<=60)

    subfolder = [folder '\fase' num2str(j)];

    % Se la sottocartella non esiste (ovvero, non siamo arrivati fino a 60°
    % ma ci siamo fermati prima) interrompe il ciclo; maxJ è l'angolo più
```

```

% alto raggiunto.
if(exist(subfolder, 'file') == 0)
    maxJ = j;
    break
else
    maxJ = 60;
end

% Ciclo su tutti i file nella cartella
i = 0;
lastI = 0;
while(i<100)

    % Assegna il corretto nome al file a seconda di i
    if(i<10)
        filename = [subfolder '\00' num2str(i) '.txt'];
    else
        filename = [subfolder '\0' num2str(i) '.txt'];
    end

    % Controlla se il file esiste, altrimenti la cartella è finita;
    % passo alla successiva
    check = fopen(filename);
    if(check==-1)
        fclose('all');
        j = j + 15;
        % lastI serve per poter effettuare il loop di normalizzazione
        lastI = i;
        break
    else
        fclose('all');
    end

    % Fit del picco con una gaussiana, estraggo area ed errore
    % (percentuale) sull'area
    [Area, ErrArea] = GaussFit(filename);

    % Creo un array con tutto quel che mi serve: nella prima colonna
    % gli angoli; nelle colonne pari le aree; nelle colonne dispari gli
    % errori sulle aree.
    outRaw(i + 1, 1) = i * 3;
    outRaw(i + 1, (2 * j / 15) + 2) = Area;
    outRaw(i + 1, (2 * j / 15) + 3) = ErrArea * Area;

    i = i + 1;

end

% Normalizzazione dei dati. Sum è la somma di tutti gli elementi delle
% colonne pari (quindi la somma delle aree della specifica misura);
% divido le due colonne corrispondenti a quella misura per la somma e
% ottengo il vettore out normalizzato
Sum = sum(outRaw(:, (2 * (j - 15) / 15) + 2));

m = 1;
while(m<=lastI)

    out(m, 1) = (m - 3) * 3 + 6;
    out(m, (2 * (j - 15) / 15) + 2) = outRaw(m, (2 * (j - 15) / 15) + 2) / Sum;
    out(m, (2 * (j - 15) / 15) + 3) = outRaw(m, (2 * (j - 15) / 15) + 3) / Sum;

    m = m + 1;

end

end

% Chiamo alfa gli angoli visti dai rivelatori a 0 e beta gli angoli visti
% dalle altre disposizioni.
Fi = dtr(345 / 2);
alfa = 0;
counter = 0;
while(alfa < 180)

    alfaRad = dtr(alfa);
    beta = 0;
    while(beta < 180)

        betaRad = dtr(beta);

```

```

% Calcolo della posizione X e Y della sorgente con una determinata
% coppia di angoli alfa e beta
xS = (d * tan(Fi))/(tan(alfaRad - betaRad) - tan(Fi));
yS = xS * tan(alfaRad - betaRad);

% Calcolo del raggio corrispondente a questi valori di X e Y
R = sqrt(xS.^2 + yS.^2);

% Probabilità che gli angoli alfa e beta siano quelli dove vedo il
% massimo, pesate sui conteggi
p_alfa = out(alfa / 3 + 1, 2);
p_beta = out(beta / 3 + 1, 4);

% Probabilità che la coppia alfa/beta corrisponda alla posizione
% del massimo
P = p_alfa * p_beta;

% Siccome X e Y possono prendere dei valori strani per qualche
% coppia alfa e beta, escludo a priori quelli impossibili
if(R > d)
    beta = beta + 3;
    continue
end

counter = counter + 1;

% Riempio la matrice Data con X,Y,R e probabilità associata
Data(counter, 1) = xS;
Data(counter, 2) = yS;
Data(counter, 3) = R;
Data(counter, 4) = P;

beta = beta + 3;

end

alfa = alfa + 3;

end

[Max,Index] = max(Data(:,4));
RMax = Data(Index,3);

function [RadAngle] = dtr(DegAngle)
    RadAngle = DegAngle * 3.14159 / 180;

```