

Relatività

Emanuele Re

16/07/2025

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 2.5 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

Problema 1

I pioni atmosferici sono prodotti in collisioni tra protoni dai raggi cosmici e atomi presenti nell'atmosfera. Tali pioni decadono in muoni e neutrini (muonici):

$$\pi \rightarrow \mu + \nu_{\mu}$$

Si supponga di avere un pione con energia di 2 GeV (nel rest frame della Terra). Che energia ha il muone se continua a viaggiare nella stessa direzione del pione da cui decade (espressione analitica)? Tale espressione può essere semplificata considerando energia e massa del pione? Quale è l'espressione risultante? Quale è, in tale caso, l'energia del muone (valore numerico)? Il pione ha massa a riposo 140 MeV, la massa del neutrino può essere trascurata.

[I risultati analitici vanno quindi espressi in funzione di $m_{\pi}, m_{\mu}, E_{\pi}$.]

Problema 2

Si consideri in uno spazio tridimensionale un campo elettrico diretto lungo l'asse x :

$$E_x = \tilde{E}\omega \cos(\omega t)$$

e una carica di massa unitaria e carica q immersa in tale campo. Tale carica a tempo $t = 0$ ha velocità diretta solo lungo l'asse z . Assumendo che il campo magnetico rimanga identicamente nullo,

1. si determini il valore di \vec{v} al tempo t generico;
2. si determini l'andamento di \vec{v} per valori piccoli di t (fino al terzo ordine incluso) e si commentino le differenze rispetto allo stesso problema in ambito classico (non relativistico);
3. si verifichi che quadrivelocità e quadriaccelerazione sono perpendicolari secondo il prodotto scalare dello spazio di Minkowski.

Problema 3

In opportune unita', il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico si puo' scrivere come:

$$T_{\mu}^{\nu} = - \left[F_{\mu\sigma} F^{\nu\sigma} - \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) \right]$$

Sia data la soluzione di onda piana per il 4-potenziale A^{μ} :

$$A^{\mu} = \epsilon^{\mu} \sin(k \cdot x),$$

dove ϵ^{μ} e' un vettore non nullo.

- Esprimere il tensore T in funzione del 4-vettore k^{μ} .
- Si verifichi anche che le equazioni di Maxwell sono soddisfatte, ovvero che $\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0$.

Potete usare il gauge di Lorenz: $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$.

- Facoltativo: Nel caso in questione, verificare che affinche' T^{00} sia positivo definito (perche' deve esserlo?), allora ϵ^{μ} deve essere spacelike.
