Relatività

Emanuele Re

30/06/2025

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 2.5 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia.

Problema 1

- La rapidita' e' una quantita' di fondamentale importanza per descrivere la cinematica delle particelle prodotte ai collisori adronici. Per una particella di quadrimomento $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$ in un frame S, la rapidita' y e' definita come

  $$y = \frac{1}{2} \log \frac{E + p_z}{E - p_z}$$

  Dimostrare che y', cioe' la rapidita' della particella misurata in un frame S' che si muove rispetto a S con velocita' v lungo l'asse z, e' data da

  $$y' = y - \bar{y}$$

  dove $\tanh(\bar{y}) = v$.

- Si consideri il processo di collisione di 2 particelle in 2 particelle, dove la conservazione dei quadrimomenti e'

  $$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$$

  - Mostrare che, se

    $$p_1^2 = p_2^2 = 0, \quad p_3^2 = m_3^2, \quad p_4^2 = m_4^2$$

    si ha

    $$s + t + u = m_3^2 + m_4^2$$

    dove $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$.
  - Si consideri ora il caso $m_3 = 0$. Per $t = 0$ si calcoli l'angolo tra $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_3$, mettendosi nel sistema di riferimento del centro di massa, ovvero il sistema in cui $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$.
    (suggerimento: e' comodo orientare $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ paralleli ad un asse cartesiano)

Problema 2
Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange per un campo scalare ϕ la cui densita' di Lagrangiana dipende non solo da ϕ e $\partial_\mu \phi$, ma anche dalla derivate seconde e terze del campo ϕ, ovvero e' del tipo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi,\ \partial_\mu \phi,\ \partial_\mu \partial_\nu \phi,\ \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \phi)$$

Problema 3
Si consideri il campo elettromagnetico A_μ accoppiato ad un campo scalare complesso $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$, dove ϕ_1 e ϕ_2 sono campi scalari reali. La densita' di Lagrangiana del sistema sia:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi)$$

dove $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$, i e' l'unita' immaginaria e al solito $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

<u>Si lavori nel gauge di Lorentz, ovvero $\partial_\mu A^\mu = 0$.</u>

1. Verificare che

$$\begin{aligned}(D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) &= (\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + (\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) \\ &+ q^2\ (\phi_1^2 + \phi_2^2)\ A_\mu A^\mu + 2\ q\ A_\mu\ \ (\phi_2 \partial^\mu \phi_1 - \phi_1 \partial^\mu \phi_2)\end{aligned}$$

2. Scrivere le 3 equazioni del moto per i campi A_μ, ϕ_1 e ϕ_2.

3. Riscrivere e combinare opportunamente le 3 equazioni del moto in modo che compaiano solo i campi A_μ, Φ e il suo complesso coniugato Φ^*. Per il campo Φ si deve ottenere

$$\left(\Box - q^2 A_\mu A^\mu - 2\ i\ q\ A_\mu \partial^\mu\right) \Phi = 0.$$

4. Verificare, usando le equazioni del moto, che la corrente J^μ, definita come

$$J^\mu = -i\ \Big(\Phi^* (\partial^\mu \Phi) - \Phi(\partial^\mu \Phi^*)\Big) - 2\ q\ A^\mu\ (\Phi^* \Phi)$$

   e' conservata, ovvero che $\partial_\mu J^\mu = 0$