Relatività

Emanuele Re

19/05/2025

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 2.5 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia.

Problema 1
Due particelle di massa m_1 e m_2 si muovono, in un dato frame, lungo l'asse x, con velocita' costanti u_1 e u_2. Tali particelle collidono formando un'unica particella di massa m che si muove, sempre nello stesso frame, con velocita' u.

a) Verificare che $m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\ m_1 m_2\ \gamma(u_1)\gamma(u_2)(1 - u_1 u_2)$

b) Mostrare che l'espressione sopra puo' essere riscritta come $m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_1\, m_2\, \gamma(v)$ dove v e' la velocita' della particella 2 misurata nel rest frame della particella 1

c) Calcolare u

Problema 2
Sia data la seguente Lagrangiana per un campo scalare ϕ (a e' un parametro reale costante):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + a\ x_\mu\partial^\mu\phi$$

a) Determinare le equazioni del moto

b) Verificare esplicitamente che il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ non e' conservato. Commentare se opportuno.

c) Calcolare il tensore densita' di momento angolare

$$M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta}x^\gamma - T^{\alpha\gamma}x^\beta$$

per il sistema in questione e verificare che e' consevato, ovvero che $\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Commentare se opportuno.

Problema 3
Siano dati due frame K e K'. Nel frame K' si hanno campi $\bar{\mathbf{E}}'$ e $\bar{\mathbf{B}}'$ in una configurazione generica, cioe' campi non paralleli e tali che $\bar{\mathbf{E}}' \cdot \bar{\mathbf{B}}' \neq 0$ e $|\bar{\mathbf{E}}'|^2 - |\bar{\mathbf{B}}'|^2 \neq 0$. Trovare il frame K in cui $\bar{\mathbf{E}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ sono paralleli, ovvero la velocita' del boost che connette K e K', in funzione dei campi nel frame primed.
Suggerimenti:

- in K' si scelgano campi giacenti nel piano $y'z'$
- si assuma che i due sistemi K e K' siano connessi da un boost lungo l'asse x (che dunque coincide con l'asse x')
- la velocita' del boost da trovare puo' essere espressa (e dunque va espressa) in funzione di

$$\bar{\mathbf{E}}' \wedge \bar{\mathbf{B}}'$$
$$|\bar{\mathbf{E}}'|^2 + |\bar{\mathbf{B}}'|^2$$

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}}\right)\bar{\boldsymbol{v}} \\
\bar{\mathbf{B}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{B}}\right)\bar{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} \qquad \bar{\mathbf{B}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{B}}_{\parallel}$$
$$\bar{\mathbf{E}}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right)_{\perp} \qquad \bar{\mathbf{B}}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right)_{\perp}$$