

# Relatività

Emanuele Re

17/02/2025

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

**Tempo a disposizione: 2.5 ore.**

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

---

## Problema 1

Considerare la reazione  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ . Il lab frame sia quello in cui  $\vec{p}_2 = 0$ . Mostrare che

$$- E_{tot}^{(CM)} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1}$$

$$- E_1^{(CM)} = \frac{(E_{tot}^{(CM)})^2 + m_1^2 - m_2^2}{2E_{tot}^{(CM)}}$$

$$- |\vec{p}_1^{(CM)}| = m_2 |\vec{p}_1| / E_{tot}^{(CM)}, \text{ dove } \vec{p}_1 \text{ e' il momento della particella 1 nel lab frame.}$$

## Problema 2

Siano dati due sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  in moto con velocità  $v$ , connessi da una trasformazione di Lorentz, e sincronizzati al solito modo (quando  $x = x' = 0$ , si ha  $t = t' = 0$ ).

- Calcolare la velocità  $u$ , relativa a  $S$ , del piano sul quale, istante per istante, gli orologi situati nei due sistemi di riferimento continuano a segnare lo stesso tempo  $t = t'$ .
- Mostrare che  $u < v$ .
- In generale data una velocità  $v$ , la rapidità  $\phi$  è definita da  $v = \tanh(\phi)$ . Calcolare la relazione tra le rapidità associate a  $u$  e  $v$ .

## Problema 3

In un sistema di riferimento inerziale  $S$  è data una particella di massa  $m$  e carica  $q$  che si muove con velocità  $\vec{u}$  in un campo magnetico  $\vec{B}$  e campo elettrico  $\vec{E}$ . Sappiamo che

le equazioni della dinamica relativistica che soddisfano le componenti del quadrimomento  $p^\mu = (\mathcal{E}, \bar{\mathbf{p}})$  sono

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= q \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \\ \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} &= q (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}})\end{aligned}$$

Secondo uno dei principi della relatività speciale, la forma delle equazioni che descrivono una legge fisica deve rimanere invariata in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Questo vuol dire che, in un sistema inerziale  $S'$  in moto con velocità  $v$  lungo l'asse delle  $x$ , devono valere le stesse equazioni precedenti, ma con tutte le grandezze primarie.

Alla luce di ciò, ricavare la legge di trasformazione dei campi elettrici e magnetici nel passare da  $S$  a  $S'$ , utilizzando solo le leggi di trasformazione delle coordinate e dei quadrimomenti tra i due sistemi inerziali.