Relatività

Emanuele Re

17/07/2024

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 2.5 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia.

Problema 1
Si consideri un fotone di bassa energia che collide con un elettrone, e si assuma che inizialmente le due particelle viaggino nello stesso verso e direzione. Sia E_0 l'energia iniziale del fotone, v la velocita' iniziale dell'elettrone, m la sua massa, e θ l'angolo di scattering del fotone rispetto alla sua direzione iniziale.

a) si trovi l'energia E del fotone dopo l'urto in funzione di E_0, v, m e θ (puo' essere comodo scrivere la risposta usando anche γ).

b) sia k'_T il momentro trasverso del fotone dopo l'urto rispetto alla sua direzione iniziale (se direzione iniziale orientata lungo asse z, allora $k'_T = \sqrt{(k'_x)^2 + (k'_y)^2}$, dove k'^μ e' il 4-momento del fotone dopo l'urto). Si trovi il massimo valore di k'_T assumendo $E_0 = m$ e $v = 3/5$.

Problema 2
Si assumano come punto di partenza per l'esercizio le equazioni di Maxwell formulate usando il tensore $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$.

a) Da esse, ottenere inizialmente le equazioni di Maxwell per il quadripotenziale $A^\mu(x)$ senza fare ipotesi sulla scelta di gauge. Successivamente mostrare che, nel gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu$, esse si riducono a

$$\Box A^\mu = 4\pi J^\mu. \tag{1}$$

b) a partire dalle equazioni (1) e assumendo ora di essere nel caso libero, cioe' $J^\mu = 0$, mostrare che un'onda onda piana, definita da

$$A^\mu(x) = \varepsilon^\mu e^{ik\cdot x}$$

con $k^2 = 0$ e' soluzione delle equazioni di Maxwell. (ϵ^μ e' il vettore di polarizzazione e non dipende da x; $k\cdot x$ e' il prodotto scalare relativistico tra i quadri-vettori k^μ e x^μ).

c) mostrare che i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ associati ad un'onda piana sono perpendicolari alla direzione del moto, ovvero che

$$\vec{E} \cdot \vec{k} = \vec{B} \cdot \vec{k} = 0$$

Problema 3

Sia data la seguente Lagrangiana per un campo scalare reale $\phi(x)$ (λ costante)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \, .$$

a) Scrivere l'equazione del moto per il campo scalare $\phi(x)$.

b) Scrivere il tensore canonico energia-impulso.

c) Verificare che tale tensore è conservato, e commentare il risultato.