

Relatività

Emanuele Re

10/06/2024

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 2.5 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

Problema 1

Una particella di massa m ed energia E urta su un'altra particella identica a riposo nel lab frame.

1. calcolare la velocità del CoM frame (nel lab frame)
2. calcolare energia totale del sistema (nel CoM frame)
3. calcolare la velocità delle particelle dopo l'urto (nel lab frame) se, dopo l'urto, le due particelle si muovono lungo la stessa direzione.

Problema 2

In un sistema di riferimento inerziale \mathcal{S} sono presenti un campo elettrico $\vec{\mathbf{E}} = (E, 0, 0)$ ed un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}} = (0, B, 0)$, uniformi e costanti, con $B = 3E$. Sia inoltre data una particella di carica q e massa m che all'istante $t = 0$ si trovi nel punto $\vec{\mathbf{x}}(0) = (0, 1, 1)$, con velocità $\vec{\mathbf{v}}(0) = (0, 1/2, 0)$. Si vuole studiare il moto di tale particella.

- a) A tal fine, sappiamo che esiste un sistema di riferimento \mathcal{S}' nel quale le equazioni relativistiche che descrivono il moto risultano semplificate, perché uno dei due campi è zero in tale sistema. Determinare tale sistema e calcolare campi e posizione e velocità iniziali della particella in tale sistema.
Attenzione al calcolo dell'istante iniziale in questo sistema.

- b) (facoltativo) In \mathcal{S}' , ricavare la velocità in funzione del tempo (ovviamente di \mathcal{S}').

N.B. Ad ogni passaggio, dopo aver scritto le formule analitiche, avete la facoltà di sostituire i valori numerici dati, prima di proseguire al passaggio successivo, al fine di avere equazioni più compatte e semplici da maneggiare

Problema 3

a) Motivare se le seguenti identita' sono vere o false.

$$\begin{aligned}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) &= (\partial_\mu A^\mu)^2 \\ \partial_\mu \partial_\nu (A^\nu A^\mu) &= (\partial_\mu A^\mu)^2\end{aligned}$$

b) Il 4-potenziale di una carica nel suo rest frame e'

$$A^\mu(x) = \frac{Q}{4\pi r}(1, \vec{0}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Calcolare esplicitamente il tensore energia-impulso simmetrizzato nel punto $x = (t, 1, 0, 0)$ e poi calcolarne la traccia.

Si ricorda che il tensore energia-impulso simmetrizzato e' definito come segue:

$$T_s^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}\vec{\bar{E}}' &= \gamma (\vec{\bar{E}} + \vec{v} \times \vec{\bar{B}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{v} \cdot \vec{\bar{E}}) \vec{v} \\ \vec{\bar{B}}' &= \gamma (\vec{\bar{B}} - \vec{v} \times \vec{\bar{E}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{v} \cdot \vec{\bar{B}}) \vec{v}\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\begin{aligned}\vec{\bar{E}}'_\parallel &= \vec{\bar{E}}_\parallel & \vec{\bar{B}}'_\parallel &= \vec{\bar{B}}_\parallel \\ \vec{\bar{E}}'_\perp &= \gamma (\vec{\bar{E}} + \vec{v} \times \vec{\bar{B}})_\perp & \vec{\bar{B}}'_\perp &= \gamma (\vec{\bar{B}} - \vec{v} \times \vec{\bar{E}})_\perp\end{aligned}$$