Relatività

Emanuele Re

15/05/2024

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 2.5 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia.

Problema 1
Un atomo di massa m, a riposo, si trova in un livello energetico eccitato, dove ΔE e' l'incremento di energia rispetto al livello fondamentale. L'atomo torna al livello fondamentale emettendo un fotone. Calcolare frequenza del fotone emesso considerando l'effetto del recoil dell'atomo. Calcolare anche il limite del risultato trovato quando $\Delta E \ll m$, esprimendo cioe' la frequenza come quella che si avrebbe ignorando il recoil e isolando il termine dovuto al recoil come espansione in $\Delta E/m$, tenendo solo termini al primo ordine.

Problema 2
Il tensore energia-impulso di una stringa di tensione t e' dato da

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

dove ρ_0 e' la densita' di energia della stringa e σ e' la pressione (ossia lo "stress" esercitato dalla tensione t sulla sezione A della stringa: $\sigma = t/A$).

Si assuma che $\sigma < \rho_0$ e si discuta se

a) esiste un frame dove la componente di stress $(T')^{11}$ si annulla

b) esiste un frame dove la densita' di energia $(T')^{00}$ e' minore di ρ_0.

<u>NB</u>: Siamo in 1 dimensione temporale e 1 spaziale, cioe' gli indici μ e ν possono valere 0 o 1. Qualora servisse, la metrica sarebbe dunque $g_{\mu\nu} = diag(+1, -1)$.

Problema 3
Sia $T_{\mu\nu}$ il tensore canonico energia-impulso di un campo scalare $\phi(x)$. Si consideri il tensore modificato

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + a \; (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \, \Box) \; \phi^2 \, ,$$

con a parametro costante.

a) Mostrare che, se $T_{\mu\nu}$ e' conservato, anche $T'_{\mu\nu}$ lo e'.

b) Si ricorda che, dato un tensore energia-impulso, esistono 4 quantita' Q^μ, dette "cariche", definite da

$$Q^\mu = \int d^3x \; T^{0\mu}.$$

Mostrare che le cariche associate a $T'_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ sono le stesse.

c) Si supponga ora che il campo scalare $\phi(x)$ soddisfi la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

con λ costante. Determinare a in modo che la traccia di $T'_{\mu\nu}$ sia nulla.

<u>NB</u>: Traccia di $T'_{\mu\nu} = {T'^{\mu}}_{\mu} = g^{\mu\nu} T'_{\mu\nu}$.