

Relatività

Emanuele Re

30/01/2024

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 2.5 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

Problema 1

Si consideri uno scattering $A_1 + A_2 \rightarrow X$, con A_2 a riposo nel sistema del laboratorio. Si trovi la massa e la velocità (nel sistema del laboratorio) del sistema “composto” X in funzione della velocità di A_1 e delle masse m_1 e m_2 . Quanto vale il modulo della velocità di X se $|\vec{p}_1| = 3 \text{ GeV}$, $E_1 = 5 \text{ GeV}$ e $m_2 = 3/4 m_1$?

Problema 2

Si consideri la densità di Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} m^2 A^\mu A_\mu - J^\mu A_\mu$$

con, al solito, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

- si determinino le equazioni del moto per il campo A .
- si verifichi, dalle equazioni del moto ricavate, che, se J^μ è conservata, allora la condizione del gauge di Lorenz è automaticamente soddisfatta.
- nel caso in cui $J^\mu = 0$, si determini il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$, e si discuta brevemente se è o meno gauge-invariante anche in relazione alle proprietà di gauge-invarianza di $\mathcal{L}$.

Problema 3

Nel sistema S , una particella di carica e e massa m si muove su un'orbita circolare di raggio R in presenza di un campo magnetico $\vec{B}$ costante ed uniforme diretto lungo l'asse z , perpendicolare al piano dell'orbita. Si assuma che la particella non irraggi.

- si determini il valore di $|\vec{B}|$ in funzione di R , e , m e ω , dove ω è la velocità angolare della particella.

- b) in S si ha che U^0 (e dunque P^0 , energia della particella) e' costante. Quale e' la ragione matematica, e quella fisica, per cui il modulo della velocita' della particella $\vec{u}$ e' costante, e dunque U^0 e' costante ?
- c) sia S' un sistema di riferimento in moto lungo l'asse x , con velocita' $\vec{v} = v\vec{e}_1$. In tale sistema di riferimento, si calcoli la componente temporale della quadrivelocita' U'^0 in funzione di ω , R , v e (delle componenti opportune di) $\vec{u}$.
- d) si calcoli $\frac{dP'^0}{d\tau}$, esprimendo il risultato in funzione dei dati del problema e delle componenti di $\vec{u}$ (o delle componenti di U^μ), **ma non** delle derivate temporali di $\vec{u}$. Si motivi brevemente perche' in S' l'energia della particella non e' conservata e, successivamente, si dimostri perche' il risultato ottenuto e' perfettamente consistente con un cambiamento di frame in presenza di campi elettromagnetici.
- NB: non e' indispensabile, ma per il punto d) puo' essere comodo esprimere il risultato di $\frac{dP'^0}{d\tau}$ usando le componenti opportune di U^μ .
-

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}' &= \gamma (\bar{\mathbf{E}} + \vec{v} \times \bar{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{v} \cdot \bar{\mathbf{E}}) \vec{v} \\ \bar{\mathbf{B}}' &= \gamma (\bar{\mathbf{B}} - \vec{v} \times \bar{\mathbf{E}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{v} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \vec{v}\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}'_{\parallel} &= \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} & \bar{\mathbf{B}}'_{\parallel} &= \bar{\mathbf{B}}_{\parallel} \\ \bar{\mathbf{E}}'_{\perp} &= \gamma (\bar{\mathbf{E}} + \vec{v} \times \bar{\mathbf{B}})_{\perp} & \bar{\mathbf{B}}'_{\perp} &= \gamma (\bar{\mathbf{B}} - \vec{v} \times \bar{\mathbf{E}})_{\perp}\end{aligned}$$