# Relatività

Emanuele Re

23/10/2023

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

**Tempo a disposizione: 3 ore.**

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia.

---

**Problema 1**
In una collisione tra due fotoni vengono prodotti due muoni. Detta $m$ la massa di un muone,

1. nel sistema del centro di massa, si calcoli l'energia minima che ciascun fotone deve avere affinche' la collisione possa avvenire

2. mostrare che si ha

$$s + t + u = 2m^2$$

   dove $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$, con $p_1$ e $p_2$ quadrimomenti dei fotoni e $p_3$ e $p_4$ quadrimomenti dei muoni.

**Problema 2**
Un pione di massa $m_\pi$ decade in un elettrone di massa $m$ e in un antineutrino di massa $m_\nu$. Calcolare la velocita' dell'antineutrino nel rest-frame dell'elettrone, in funzione **SOLO** delle masse delle particelle in gioco. Determinare il valore limite di tale velocita' nel limite in cui la massa del neutrino e' nulla.

**Problema 3**
In un sistema di riferimento inerziale $S$ e' data una particella di massa $m$ e carica $q$ che si muove con velocita' $\bar{\mathbf{u}}$ in un campo magnetico $\bar{\mathbf{B}}$ e campo elettrico $\bar{\mathbf{E}}$. Sappiamo che le equazioni della dinamica relativistica che soddisfano le componenti del quadrimomento $p^\mu = (\mathcal{E}, \bar{\mathbf{p}})$ sono

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= q\ \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \\ \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} &= q\ (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}}) \end{aligned}$$

Secondo uno dei principi della relativita' speciale, la forma delle equazioni che descrivono una legge fisica deve rimanere invariata in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Questo vuol dire che, in un sistema interziale $S'$ in moto con velocita' $v$ lungo l'asse delle $x$, devono valere le stesse equazioni precedenti, ma con tutte le grandezze primate.

Alla luce di cio', ricavare la legge di trasformazione dei campi elettrici nel passare da $S$ a $S'$, sapendo solo le leggi di trasformazione delle coordinate e dei quadrimomenti tra i due sistemi inerziali.

**Problema 4**

Sia $T$ un tensore di rango $(0,3)$ definito da:

$$T^{\alpha\beta\gamma} = x^\alpha B^\beta x^\gamma - B^\alpha x^\beta B^\gamma$$

dove $x^\alpha$ sono le coordinate dello spazio di Minkowski ($x^\alpha$ e' il 4-vettore posizione) mentre $B$ e' un generico campo vettoriale, ovvero $B^\alpha = B^\alpha(x)$.

1. Calcolare $V^{\beta\gamma} = \partial_\alpha(T^{\alpha\beta\gamma})$.
2. Usando il risultato precedente, argomentare perche', in generale, $V^{\beta\gamma}$ non e' nullo per un generico $B^\alpha(x)$.
3. In seguito, mostrare che, se $B^\alpha$ e' costante, allora $V$ si annulla solo per i punti in cui $x^\alpha = \frac{1}{5}B^\alpha$.

---

## Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}}\right)\bar{\boldsymbol{v}} \\ \bar{\mathbf{B}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{B}}\right)\bar{\boldsymbol{v}}\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\bar{\mathbf{E}}'_\parallel = \bar{\mathbf{E}}_\parallel \qquad \bar{\mathbf{B}}'_\parallel = \bar{\mathbf{B}}_\parallel$$

$$\bar{\mathbf{E}}'_\perp = \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right)_\perp \qquad \bar{\mathbf{B}}'_\perp = \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right)_\perp$$