Relatività

Emanuele Re

21/07/2023

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia.

Problema 1
La vita media di un muone, nel suo rest-frame, e' di 2.2 μs, mentre la sua massa a riposo e' $m_\mu = 106$ MeV. Si consideri un acceleratore circolare di raggio $R = 50$ m. E' possibile, per un muone che viene mantenuto ad energia $E = 1$ GeV, percorrere una circonferenza? Se si', quanti giri della circonferenza puo' completare in media un muone con tale energia?

Problema 2
Siano dati un campo vettoriale A^μ e un campo scalare ϕ, e la densita' di Lagrangiana seguente:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \alpha(\partial_\mu\phi)A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$$

a) Trovare le equazioni del moto per i campi A^μ e ϕ.

b) (Domanda formulata male, non valutata)

Problema 3
Il 4-potenziale associato ad un'onda piana elettromagnetica libera e':

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{i(k\cdot x)}$$

dove ϵ^μ e k sono 4-vettori costanti e $(k \cdot x) = k^\mu x_\mu$.

a) Calcolare $F_{\mu\nu}$ e successivamente $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, mostrando che

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2((k \cdot A)^2 - k^2A^2)$$

b) Mostrare che, se A^μ e' soluzione delle equazioni di Maxwell con $J^\mu = 0$, allora si ha che $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ si annullano.

c) Dare un'interpretazione fisica del risultato (connettendo cio' che e' stato trovato con proprieta' note delle onde elettromagnetiche in assenza di sorgenti).

Problema 4

Si considerino due particelle relativistiche di massa m_1 e m_2 aventi quadrimomento $p_1^\mu = (E_1, \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{1})$ e $p_2^\mu = (E_2, \bar{\mathbf{p}}_\mathbf{2})$ in un sistema inerziale S.

a) Calcolare la velocità relativa v_{rel} della particella 1 nel rest frame della seconda particella (S_2), esprimendo il risultato finale solo in funzione di invarianti relativistici.

b) Argomentare, sulla base del risultato appena trovato (<u>senza fare altri calcoli!</u>), che la velocita' relativa appena calcolata corrisponde a quella della particella 2 nel rest frame della particella 1 (S_1).

c) Se le velocità delle particelle in S sono $\bar{\mathbf{v}}_\mathbf{1}$ e $\bar{\mathbf{v}}_\mathbf{2}$, verificare che

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(\bar{\mathbf{v}}_\mathbf{1} - \bar{\mathbf{v}}_\mathbf{2})^2 - (\bar{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \times \bar{\mathbf{v}}_\mathbf{2})^2}}{(1 - \bar{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \cdot \bar{\mathbf{v}}_\mathbf{2})}$$