

Relatività

Emanuele Re

10/05/2023

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

Problema 1

1. Si assumano come punto di partenza per l'esercizio le equazioni di Maxwell formulate usando il tensore $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$.

- (a) Da esse, ottenere inizialmente le equazioni di Maxwell per il quadripotenziale $A^\mu(x)$ senza fare ipotesi sulla scelta di gauge. Successivamente mostrare che, nel gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu$, esse si riducono a

$$\square A^\mu = 4\pi J^\mu. \quad (1)$$

- (b) A partire dalle equazioni (1) e assumendo ora di essere nel caso libero, cioè $J^\mu = 0$, mostrare che un'onda piana, definita da

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{ik \cdot x}$$

con $k^2 = 0$ e' soluzione delle equazioni di Maxwell. (ϵ^μ e' il vettore di polarizzazione e **non dipende** da x ; $k \cdot x$ e' il prodotto scalare relativistico tra i quadri-vettori k^μ e x^μ).

2. (Facoltativo per AA 22-23, richiesto per AA precedenti)

Un sistema di riferimento K' si muove con velocità $\vec{v} = v\vec{e}_2$ (diretta lungo l'asse y) rispetto al sistema del laboratorio K . Sia $T^{\mu\nu}$ un generico tensore. Esprimere le componenti T'^{00} , T'^{0j} ($j = 1, 2, 3$) e T'^{23} del tensore nel sistema K' in funzione delle componenti nel sistema K .

Problema 2

Un fascio di protoni colpisce un target di berillio producendo uno sciame di particelle nello stato finale. Due rivelatori sono posti dietro il bersaglio, simmetricamente rispetto al fascio di protoni. Ciascun rivelatore e' orientato a 45 gradi rispetto al fascio. Un rivelatore misura muoni μ^- , l'altro antimuoni μ^+ .

Quando il momento dei muoni $|\vec{p}_1|$ e degli antimuoni $|\vec{p}_2|$ e' $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = 2.2 \text{ GeV}$, si osserva un aumento del rate del processo, che viene interpretato come produzione di una particella di massa M_R che decade in una coppia $\mu^+\mu^-$. La massa del muone e' $m = 106 \text{ MeV}$.

- Qual'e' la massa M_R di tale particella?
- La risposta dipende significativamente da m ? Perche'?

Problema 3

Una particella relativistica di carica q e' immersa in un campo magnetico diretto lungo l'asse x la cui magnitudine oscilla nel tempo con frequenza ω nel sistema del laboratorio. Calcolare la dipendenza della velocita' della particella in funzione del tempo, misurata nel sistema del laboratorio. Si assuma la condizione iniziale $\vec{v}(t=0) = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$.

Problema 4

Sia x un vettore di tipo luce ($x_\mu x^\mu = 0$) e sia u un "vettore" a 2 componenti complesse definito, in funzione delle componenti di x^μ , come segue:

$$u(x) = N \begin{pmatrix} x^0 + x^3 \\ x^1 + ix^2 \end{pmatrix}.$$

N e' un fattore di normalizzazione reale. Sia X la matrice 2x2 complessa definita da

$$X = uu^\dagger$$

1. Mostrare che $\det(X) = 0$.
2. Richiedendo che $\text{Tr}(X) = 2x^0$, si mostri che $N = \pm 1/\sqrt{x^0 + x^3}$ (si scelga la soluzione positiva per il punto successivo).
3. Si assuma che un boost lungo l'asse z ($\vec{v} = v\vec{e}_3$) agisca sul "vettore" u come

$$u \rightarrow u' = A(v)u$$

dove

$$A(v) = \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{\theta/2} \end{bmatrix}$$

con $\tanh(\theta) = v$.

Ricordando che $\gamma = \cosh(\theta)$, mostrare che

$$u' = u(x')$$

dove $(x')^\mu$ e' il 4-vettore in cui viene mandato il 4-vettore x^μ sotto l'azione del boost lungo z menzionato sopra.