Relatività

Emanuele Re

13/02/2023

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia.

Problema 1

A quale istante T di un orologio terrestre deve essere inviato un segnale elettromagnetico diretto ad un'astronave in moto di allontanamento con velocita' costante v, se si vuole che il segnale venga ricevuto al tempo T' dell'astronave, assumendo che gli orologi siano stati sincronizzati all'istante $t = t' = 0$ al momento del passaggio dell'astronave davanti all'osservatore terrestre?

Problema 2

(1a) Calcolare

$$C^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\alpha A^\alpha)^3 \,,$$

e, in seguito, calcolare la traccia del tensore $C^{\mu\nu}$ appena trovato.

(1b) Le rotazioni spaziali (in 3 dimensioni) fanno parte delle trasformazioni di Lorentz. Usando le leggi di trasformazione del tensore di Faraday $F^{\mu\nu}$, e considerando esplicitamente il suo "contenuto fisico"

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

ricavare come cambiano le componenti del campo elettrico e magnetico per una rotazione attorno all'asse y. Commentare il risultato ottenuto (e' quello che vi sareste aspettati?).

Problema 3
In un particolare decadimento in tre corpi di uguale massa m, nel sistema del centro di massa, i tre corpi si allontanano l'uno dall'altro con ugual energia E, formando angoli di $2\pi/3$ tra le loro direzioni di volo. Qual e' l'angolo che formano tra loro le direzioni di volo di due qualunque dei tre corpi, nel sistema di riferimento di quiete del terzo?

Problema 4
In un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{S}$ sono presenti un campo elettrico $\bar{\mathbf{E}} = (0, 0, E)$, ed un campo magnetico $\bar{\mathbf{B}} = (B, 0, 0)$, uniformi e costanti, con $E = 2B$. Sia inoltre data una particella di carica q e massa m che all'istante $t = 0$ si trovi nel punto $\bar{\mathbf{r}}(0) = (1, 1, 1)$, con velocita' $\bar{\mathbf{u}}(0) = (1/2, 1/2, 0)$. Si vuole studiare il moto di tale particella.

(a) A tal fine, sappiamo che esiste un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ nel quale le equazioni relativistiche che descrivono il moto risultano semplificate, perche' uno dei due campi e' zero in tale sistema. Determinare tale sistema e calcolare posizione e momento iniziali della particella in tale sistema.
Attenzione al calcolo dell'istante iniziale in questo sistema.

(b) In $\mathcal{S}'$, ricavare la velocita' in funzione del tempo (ovviamente del tempo t' misurato in $\mathcal{S}'$).

N.B. Ad ogni passaggio, dopo aver scritto le formule analitiche, se volete avete la facoltà di sostituire i valori numerici dati, prima di proseguire al passaggio successivo, al fine di avere equazioni più compatte e semplici da maneggiare.

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}}\right)\bar{\boldsymbol{v}} \\
\bar{\mathbf{B}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{B}}\right)\bar{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} \qquad \bar{\mathbf{B}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{B}}_{\parallel}$$

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right)_{\perp} \qquad \bar{\mathbf{B}}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right)_{\perp}$$