

Relatività

Emanuele Re

18/10/2022

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

Problema 1

Un mesone ρ di massa $m_\rho \simeq 770$ MeV può decadere in una coppia di muoni $\mu^+\mu^-$ ($m_{\mu^+} = m_{\mu^-} \simeq 106$ MeV) e in un fotone:

$$\rho \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma.$$

Qual'è la massima energia cinetica relativistica che il muone μ^+ può avere in tale decadimento, se calcolata nel rest-frame del mesone ρ ?

Problema 2

In un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{S}$ sono presenti un campo elettrico $\vec{E}$ ed un campo magnetico $\vec{B}$, uniformi e costanti, che formano tra loro un angolo θ con $0 < \theta < \pi/2$.

- Quali conclusioni del tutto generali si possono trarre sui campi $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ visti in un generico sistema di riferimento inerziale $\mathcal{S}'$?
- Calcolare, qualora sia possibile, la velocità $\vec{v}$ del sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ nel quale i campi risultano perpendicolari. Giustificare la risposta.
- Calcolare, qualora sia possibile, la velocità $\vec{v}$ del sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ nel quale i campi risultano paralleli. Giustificare la risposta.

Problema 3

In un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{S}$ sono presenti un campo elettrico $\vec{E} = (E, 0, 0)$ ed un campo magnetico $\vec{B} = (0, B, 0)$, uniformi e costanti, con $B = 3E$. Sia inoltre data una particella di carica q e massa m che all'istante $t = 0$ si trovi nel punto $\vec{x}(0) = (0, 1, 1)$, con velocità $\vec{v}(0) = (0, 1/2, 0)$. Si vuole studiare il moto di tale particella.

- A tal fine, sappiamo che esiste un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ nel quale le equazioni relativistiche che descrivono il moto risultano semplificate, perché uno dei due campi

e' zero in tale sistema. Determinare tale sistema e calcolare posizione e velocità iniziali della particella in tale sistema.

Attenzione al calcolo dell'istante iniziale in questo sistema.

b) In $\mathcal{S}'$, ricavare la velocità in funzione del tempo (ovviamente di $\mathcal{S}'$).

N.B. Ad ogni passaggio, dopo aver scritto le formule analitiche, avete la facoltà di sostituire i valori numerici dati, prima di proseguire al passaggio successivo, al fine di avere equazioni più compatte e semplici da maneggiare

Problema 4

Mostrare che le equazioni di Maxwell possono essere scritte come

$$\square F^{\mu\nu} = 4\pi(\partial^\mu J^\nu - \partial^\nu J^\mu).$$

Sapreste mostrarlo anche senza usare direttamente che $\square A^\mu = 4\pi J^\mu$?

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}' &= \gamma(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}})\bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{B}}' &= \gamma(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{E}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{B}})\bar{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}'_{\parallel} &= \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} & \bar{\mathbf{B}}'_{\parallel} &= \bar{\mathbf{B}}_{\parallel} \\ \bar{\mathbf{E}}'_{\perp} &= \gamma(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}})_{\perp} & \bar{\mathbf{B}}'_{\perp} &= \gamma(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{E}})_{\perp}\end{aligned}$$