

Relatività

Emanuele Re

20/09/2022

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

Problema 1

Sia dato un sistema inerziale S in cui vi sono un osservatore O che si muove con velocità \mathbf{v} diretta lungo l'asse x e una particella che si muove verso l'osservatore. Sia \mathbf{u} la velocità della particella e θ l'angolo formato da \mathbf{u} con l'asse x . Trovare la velocità della particella e l'angolo misurati dall'osservatore O (cioè misurati nel frame in cui O è a riposo). Commentare il risultato nel limite $u \rightarrow 1$.

Problema 2

Una particella di massa M e quadrimomento $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ decade in una particella più leggera, emettendo un fotone nella direzione del moto. Tramite un rivelatore posto nel laboratorio, si trova che il fotone ha energia ω . Trovare l'energia di tale fotone nel sistema di riferimento solidale alla particella che decade.

Problema 3

Un osservatore A misura i seguenti campi elettrici e magnetici:

$$\mathbf{E} = (\alpha, 0, 0) \quad \mathbf{B} = (\alpha, 0, 2\alpha).$$

Per l'osservatore B i campi sono invece:

$$\mathbf{E}' = (E'_x, \alpha, 0) \quad \mathbf{B}' = (\alpha, B'_y, \alpha).$$

- Trovare E'_x e B'_y .
- Un terzo osservatore C si muove, rispetto a B , con velocità costante v diretta lungo l'asse y del sistema B . Usando le leggi di trasformazione del tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$, trovare il campo elettrico \mathbf{E}'' (o il campo magnetico \mathbf{B}'') misurati da C .

Problema 4

Sia $T_{\mu\nu}$ il tensore canonico energia-impulso di un campo scalare $\phi(x)$. Si consideri il tensore modificato

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + a (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi^2,$$

con a parametro costante.

- a) Mostrare che, se $T_{\mu\nu}$ e' conservato, anche $T'_{\mu\nu}$ lo e'.
- b) Si ricorda che, dato un tensore energia-impulso, esistono 4 quantita' Q^μ , dette "cariche", definite da

$$Q^\mu = \int d^3x T^{0\mu}.$$

Mostrare che le cariche associate a $T'_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ sono le stesse.

- c) Si supponga ora che il campo scalare $\phi(x)$ soddisfi la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

con λ costante. Determinare a in modo che la traccia di $T'_{\mu\nu}$ sia nulla.

aiuto: Traccia di $T'_{\mu\nu} = T'^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}T'_{\mu\nu}$.