

Relatività

Emanuele Re

20/06/2022

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

Problema 1

La rapidità è una quantità di fondamentale importanza per descrivere la cinematica delle particelle prodotte ai collisori adronici. Per una particella di quadri-momento $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$ in un frame S , la rapidità y è definita come

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{E + p_z}{E - p_z}$$

Dimostrare che y' , cioè la rapidità della particella misurata in un frame S' che si muove rispetto a S con velocità v lungo l'asse z , è data da

$$y' = y - \bar{y}$$

dove $\tanh(\bar{y}) = v$.

Problema 2

Nel processo di collisione elastica tra un fotone ed un elettrone, in moto lungo la stessa direzione ed in versi opposti, determinare quale deve essere la velocità iniziale dell'elettrone affinché, nel caso di riflessione nella direzione opposta a quella di incidenza, il fotone riflesso abbia la stessa energia E di quello incidente.

Problema 3

In un sistema di riferimento inerziale S sia dato il seguente quadripotenziale A^μ :

$$A^\mu = (e^{-kz}, e^{-ky}, 0, 0)$$

dove k è una costante reale.

- A^μ soddisfa il gauge di Lorenz?

Il gauge di Coulomb è definito da $\text{div}(\mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. A^μ soddisfa il gauge di Coulomb? Giustificare le risposte.

- Qual'è il quadripotenziale A'^μ in un sistema di riferimento S' in moto rispetto ad S con una velocità v diretta lungo l'asse delle z ?
- A'^μ soddisfa il gauge di Lorenz? E il gauge di Coulomb? Giustificare le risposte.

Problema 4

Si assumano come punto di partenza per l'esercizio le equazioni di Maxwell formulate usando il tensore $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$.

- Da esse, ottenere inizialmente le equazioni di Maxwell per il quadripotenziale $A^\mu(x)$ senza fare ipotesi sulla scelta di gauge. Successivamente mostrare che, nel gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu$, esse si riducono a

$$\square A^\mu = 4\pi J^\mu. \quad (1)$$

- a partire dalle equazioni (1) e assumendo ora di essere nel caso libero, cioè $J^\mu = 0$, mostrare che un'onda piana, definita da

$$A^\mu(x) = \varepsilon^\mu e^{ik \cdot x}$$

con $k^2 = 0$ è soluzione delle equazioni di Maxwell. (ε^μ è il vettore di polarizzazione e non dipende da x ; $k \cdot x$ è il prodotto scalare relativistico tra i quadri-vettori k^μ e x^μ).

- mostrare che i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ associati ad un'onda piana sono perpendicolari alla direzione del moto, ovvero che

$$\vec{E} \cdot \vec{k} = \vec{B} \cdot \vec{k} = 0$$