

Relatività

Emanuele Re

27/05/2022

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia.

Problema 1

Determinare la forma delle trasformazioni di Lorentz per le variabili di “cono luce”

$$x_{\pm} = x \pm c t$$

nel caso di moto relativo diretto lungo l'asse x . Esprimere il risultato finale in termini della rapidità ϕ , definita come

$$\tanh(\phi) = \frac{v}{c}$$

senza far comparire nel risultato funzioni trigonometriche iperboliche.

Problema 2

Un mesone K^0 (con massa M) a riposo decade in due pioni (entrambi con massa m) e in un fotone:

$$K^0(P) \rightarrow \pi^+(p_1) + \pi^-(p_2) + \gamma(k)$$

I quadrimomenti delle particelle sono indicati tra parentesi. Calcolare la velocità v dei pioni nel loro sistema del centro di massa (ovvero il sistema dove $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$). Il risultato va espresso in funzione delle masse delle particelle e dell'energia del fotone $k^0 = \omega$ misurata nel rest frame della particella K^0 che decade.

Problema 3

In un frame inerziale S una particella con carica q si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v lungo l'asse x .

- a) Trovare, in S , i campi $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ generati dalla particella, usando il fatto che, nel rest frame della particella (S'), i potenziali elettrico e magnetico sono

$$\phi'(t', \mathbf{x}') = \frac{q}{4\pi|\mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}'(t', \mathbf{x}') = \mathbf{0}$$

Si noti che i campi $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ sono misurati in S , e dunque sono funzioni di t e \mathbf{x} .

- b) Controllare il risultato ottenuto utilizzando i due invarianti del campo elettromagnetico, ovvero le combinazioni di \mathbf{E} e \mathbf{B} che non variano al variare del sistema di riferimento inerziale.

Problema 4

Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

con λ parametro reale arbitrario e al solito $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

1. Scrivere le equazioni del moto per tale Lagrangiana.
2. Tale Lagrangiana e' invariante di gauge? Che condizione deve soddisfare una trasformazione di gauge affinche' la Lagrangiana risulti invariante?