Relatività

Emanuele Re

18/02/2022

Sul primo foglio, in modo chiaro, riportare **nome, cognome, numero di matricola e firma**. Su eventuali fogli successivi riportare almeno il **nome e cognome**.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini saranno considerati solo parzialmente.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia.

Problema 1

Siano S e S' due sistemi di riferimento inerziali in moto con velocita' relativa $\vec{w}$ diretta lungo l'asse x, cioe' $\vec{w} = w\ \hat{x}$. Siano $\vec{v}$ e $\vec{v'}$ le velocita' di una particella misurate nei due sistemi S e S', e siano u^μ e u'^μ le quadrivelocita' della particella nei due sistemi.

1. Essendo le quadrivelocita' dei 4-vettori controvarianti, che relazione c'e' tra u^μ e u'^μ nel caso in questione?

2. Utilizzando le definizioni delle quadrivelocita' in funzione di $\vec{v}$ e $\vec{v'}$ e la relazione tra u^μ e u'^μ, si ricavi la usuale legge di composizione relativistica delle velocita' (cioe' la relazione tra le componenti di $\vec{v}$ e $\vec{v'}$).

[Consiglio: si faccia attenzione, nella derivazione, a usare una notazione con cui non si confondano i vari fattori γ in gioco.]

Problema 2

Due particelle "1" e "2" rispettivamente di massa m_1 e m_2 collidono producendo nello stato finale solo una nuova particella di massa M. Calcolare la massa e la velocita' $\vec{v}$ di questa nuova particella nel sistema di riferimento solidale con la particella "2" (rest-frame di "2"). I risultati vanno espressi in funzione solo di m_1, m_2 e di $\vec{v}_1$, dove quest'ultima e' la velocita' della particella "1" nel rest-frame della particella "2".

[Consiglio: non e' necessario, ma se volete potete assumere $\vec{v}_1$ allineata lungo un asse cartesiano del rest-frame di "2".]

Problema 3

In un sistema di riferimento inerziale S e' data una particella di massa m e carica q che si muove con velocita' $\bar{\mathbf{u}}$ in un campo magnetico $\bar{\mathbf{B}}$ e campo elettrico $\bar{\mathbf{E}}$. Sappiamo che le equazioni della dinamica relativistica che soddisfano le componenti del quadrimomento $p^\mu = (\mathcal{E}, \bar{\mathbf{p}})$ sono

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= q\ \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \\ \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} &= q\ (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}}) \end{aligned}$$

Secondo uno dei principi della relativita' speciale, la forma delle equazioni che descrivono una legge fisica deve rimanere invariata in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Questo vuol dire che, in un sistema interziale S' in moto con velocita' v lungo l'asse delle x, devono valere le stesse equazioni precedenti, ma con tutte le grandezze primate.

Alla luce di cio', ricavare la legge di trasformazione dei campi magnetici nel passare da S a S', sapendo solo le leggi di trasformazione delle coordinate e dei quadrimomenti tra i due sistemi interziali.

Problema 4

Si consideri il campo elettromagnetico A_μ accoppiato ad un campo scalare complesso $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$, dove ϕ_1 e ϕ_2 sono campi scalari reali. La densita' di Lagrangiana del sistema sia:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi)$$

dove $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$, i e' l'unita' immaginaria e al solito $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Si lavori nel gauge di Lorentz, ovvero $\partial_\mu A^\mu = 0$.

1. Verificare che

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) &= (\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + (\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) \\ &+ q^2\ (\phi_1^2 + \phi_2^2)\ A_\mu A^\mu + 2\ q\ A_\mu\ (\phi_2 \partial^\mu \phi_1 - \phi_1 \partial^\mu \phi_2) \end{aligned}$$

2. Scrivere le 3 equazioni del moto per i campi A_μ, ϕ_1 e ϕ_2.

3. Riscrivere e combinare opportunamente le 3 equazioni del moto in modo che compaiano solo i campi A_μ, Φ e il suo complesso coniugato Φ^*. Per il campo Φ si deve ottenere

$$\left(\Box - q^2 A_\mu A^\mu - 2\ i\ q\ A_\mu \partial^\mu\right) \Phi = 0.$$

4. Verificare, usando le equazioni del moto, che la corrente J^μ, definita come

$$J^\mu = -i\ \Big(\Phi^* (\partial^\mu \Phi) - \Phi (\partial^\mu \Phi^*)\Big) - 2\ q\ A^\mu\ (\Phi^* \Phi)$$

e' conservata, ovvero che $\partial_\mu J^\mu = 0$