

Relatività

Carlo Oleari

29/11/2021

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

In un sistema di riferimento inerziale \mathcal{S} sono presenti un campo elettrico $\bar{\mathbf{E}} = (E, 0, 0)$, ed un campo magnetico $\bar{\mathbf{B}} = (0, B, 0)$, uniformi e costanti, con $B = 3E$. Sia inoltre data una particella di carica q e massa m che all'istante $t = 0$ si trovi nel punto $\bar{\mathbf{r}}(0) = (0, 1, 1)$, con velocità $\bar{\mathbf{v}}(0) = (0, 1/2, 0)$. Si vuole studiare il moto di tale particella.

a) A tal fine, sappiamo che esiste un sistema di riferimento \mathcal{S}' nel quale le equazioni relativistiche che descrivono il moto risultano semplificate, perché uno dei due campi è zero in tale sistema. Determinare tale sistema e calcolare posizione e velocità iniziali della particella in tale sistema.

Attenzione al calcolo dell'istante iniziale in questo sistema.

b) In \mathcal{S}' , ricavare la velocità in funzione del tempo (ovviamente di \mathcal{S}').

N.B. Ad ogni passaggio, dopo aver scritto le formule analitiche, avete la facoltà di sostituire i valori numerici dati, prima di proseguire al passaggio successivo, al fine di avere equazioni più compatte e semplici da maneggiare.

Problema 2

Sia data la seguente Lagrangiana per un campo scalare reale $\phi(x)$ (λ costante)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \phi^4.$$

a) Scrivere l'equazione del moto per il campo scalare $\phi(x)$.

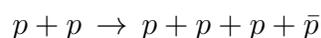
b) Scrivere il tensore canonico energia-impulso.

c) Verificare che tale tensore è conservato.

Commentare i risultati ottenuti.

Problema 3

Un modo per produrre antiprotoni (\bar{p}) è quello di fare scontrare due fasci di protoni (p) con sufficiente energia da dare origine a questa reazione:



- I) Calcolare l'energia minima che ognuno dei due protoni incidenti deve avere per far avvenire tale reazione nel sistema del centro di massa. Giustificare la risposta.
- II) Calcolare l'energia minima che deve avere il protone incidente nel sistema del laboratorio, in cui il secondo protone può considerarsi fermo. Giustificare la risposta.

Esprimere i risultati in termini della massa m del protone.

Problema 4

Un'astronave è diretta verso la Terra con velocità costante v . Dall'astronave si vuole inviare a Terra un segnale elettromagnetico di preavviso che deve giungere con un anticipo T prefissato (in tempo terrestre) rispetto al momento di arrivo dell'astronave. Con quanto anticipo T' (tempo dell'astronave) rispetto al momento dell'atterraggio dovrà essere inviato il segnale?

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}' &= \gamma (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}}) \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{B}}' &= \gamma (\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{E}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \bar{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}'_{\parallel} &= \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} & \bar{\mathbf{B}}'_{\parallel} &= \bar{\mathbf{B}}_{\parallel} \\ \bar{\mathbf{E}}'_{\perp} &= \gamma (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}})_{\perp} & \bar{\mathbf{B}}'_{\perp} &= \gamma (\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{E}})_{\perp}\end{aligned}$$