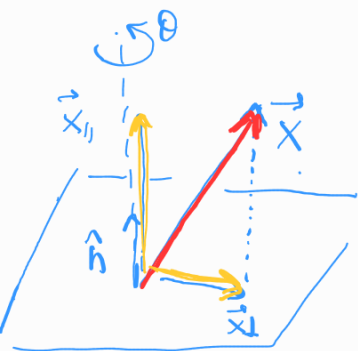


ROTATIONE DI UN VETTORE: DECOMPOSIZIONE $\parallel$ e $\perp$



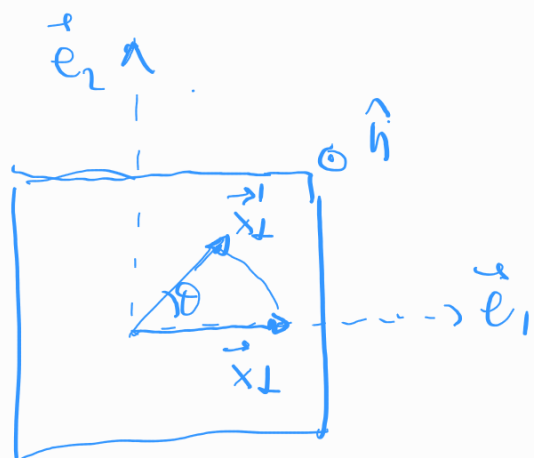
$$\vec{X} = \vec{X}_{\parallel} + \vec{X}_{\perp}$$

primed = rotato

$$\vec{X}'_{\parallel} = \vec{X}_{\parallel} \quad (\text{la parte parallela a } \hat{n} \text{ non cambia})$$

Il problema su $\vec{X}_{\perp}$ è decomporre $\vec{X}'_{\perp}$ usando 2 vettori $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ nel piano $\perp$.

$\odot \hat{n}$, uscente dal foglio



$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{X}_{\perp}}{|\vec{X}_{\perp}|}$$

$$\vec{e}_2 = \hat{n} \wedge \vec{e}_1 = \hat{n} \wedge \frac{\vec{X}_{\perp}}{|\vec{X}_{\perp}|}$$

$$\Rightarrow \vec{X}'_{\perp} = |\vec{X}_{\perp}| (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) = \cos \theta \vec{X}_{\perp} + \sin \theta (\hat{n} \wedge \vec{X}_{\perp})$$

Essendo $\hat{n} \wedge \vec{X}_{\parallel} = 0$, si ha $\hat{n} \wedge \vec{X}_{\perp} = \hat{n} \wedge \vec{X}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{X}' = \vec{X}_{\parallel} + \cos \theta \vec{X}_{\perp} + \sin \theta \hat{n} \wedge \vec{X}}$$

Scrivendo $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_\parallel$

$$\vec{x}' = \vec{x}_\parallel + (\cos\theta)(\vec{x} - \vec{x}_\parallel) + \sin\theta \hat{n} \wedge \vec{x}$$

$$= \cos\theta \vec{x} + (1 - \cos\theta)\vec{x}_\parallel + \sin\theta \hat{n} \wedge \vec{x} =$$

$$= \cos\theta \vec{x} + (1 - \cos\theta)(\hat{n} \cdot \vec{x}) \hat{n} + \sin\theta \hat{n} \wedge \vec{x}$$

Per rotazione infinitesime ($\theta = \varepsilon$, ε piccolo)

$$\vec{x}' = \vec{x} + \varepsilon \hat{n} \wedge \vec{x} + O(\varepsilon^2)$$