Teoria e Fenomenologia delle Interazioni Fondamentali

Emanuele Re

13/12/2024

Tempo a disposizione: 3 ore.

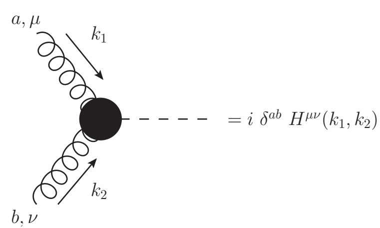
Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia e di riportali solo successivamente in bella copia. In bella copia devono comunque comparire sia i passaggi di calcolo non banali sia, dove opportuno, brevi commenti su proprieta' o considerazioni che si stanno usando da uno step al successivo.

Problema 1

1. Calcolare $|M_{Hgg}|^2$, cioe' la ampiezza quadra (sommata sulle polarizzazioni) per il decadimento $H \to gg$ utilizzando il coupling effettivo Hgg

$$H^{\mu\nu}(k_1, k_2) = A \; [\; g^{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2) - k_1^\nu \; k_2^\mu \;] \, ,$$

dove A e' una costante.



- Nel calcolo, utilizzare la seguente regola di somma sulle polarizzazioni dei gluoni $\sum \epsilon^\alpha \epsilon^{*,\beta} = -g^{\alpha\beta}$. Sapreste motivare brevemente perche' e' lecito utilizzare la formula che contiene anche polarizzazioni non fisiche?

2. Si considerino quark massless. Calcolare la ampiezza quadra (sommata sulle polarizzazioni) $|M_{Hgq\bar{q}}|^2$ per il processo $H(p) \to g(k_1)q(k_3)\bar{q}(k_4)$, utilizzando il coupling effettivo Hgg.

- Nel calcolo, utilizzare $\sum \epsilon^\mu(k_1)\epsilon^{*,\nu}(k_1) = -g^{\mu\nu}$, e tenere solo i termini piu' singolari nel limite $(k_3 + k_4)^2 \to 0$.

3. Estrarre la splitting function per il limite collineare $g \to q\bar{q}$, cioe', nel limite in cui $(k_3 + k_4)^2 \to 0$, verificare che

$$|M_{Hgq\bar{q}}|^2 \to |M_{Hgg}|^2 g_s^2 \frac{T_F}{(k_3 \cdot k_4)} [z^2 + (1 - z)^2]$$

Per farlo, utilizzare la seguente Sudakov decomposition per scrivere $|M_{Hgq\bar{q}}|^2$ in funzione di z:

$$\begin{aligned} k_3^\alpha &= k_2^\alpha\,(1-z) - k_T^\alpha + \xi_3 n^\alpha \\ k_4^\alpha &= k_2^\alpha\,z \qquad\quad + k_T^\alpha + \xi_4 n^\alpha \end{aligned}$$

dove $k_2^2 = 0$ e $(k_T \cdot k_T) = -|\vec{k}_t|^2$, usando come vettore ausiliario $n^\alpha = k_1^\alpha$. Il quadrivettore k_T e' quindi spacelike ed e' perpendicolare sia rispetto a k_2 che rispetto ad n: $(k_2 \cdot k_T) = 0$, $(n \cdot k_T) = 0$. Potrebbe essere utile esprimere $\xi_{3,4}$ in funzione di $|\vec{k}_t|^2$, z e $(k_1 \cdot k_2)$.

4. Verificare che il calcolo in 2. coincide con quello in cui la somma sulle polarizzazioni e' effettuata solo su stati fisici, cioe': $\sum \epsilon^\mu(k_1)\epsilon^{*,\nu}(k_1) = -g^{\mu\nu} + \frac{k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu}{(k_1 \cdot k_2)}$ (dove si e' scelto k_2, vettore light-like, come vettore ausiliario per esprimere la somma solo sulle polarizzazioni fisiche: $k_2^2 = 0$ e $(k_1 \cdot k_2) \neq 0$)

Problema 2
Si consideri il decadimento di un quark top in un quark bottom e in un bosone W:

$$t(p) \to \; b(k_1) \; + \; W^+(k_2)\,.$$

Si assuma che il quark b sia massless ($k_1^2 = 0$) e si considerino invece il top e il W massivi ($k_2^2 = M_W^2$, $p^2 = M_t^2$).

a) calcolare l'ampiezza quadra di questo decadimento.

b) calcolare la larghezza del decadimento (mostrando almeno i passaggi importanti per il calcolo dello spazio delle fasi).

c) calcolare il ratio Γ_L/Γ_T tra la larghezza di decadimento in bosoni polarizzati longitudinalmente e quella in bosoni trasversi (se possibile, si scriva la risposta solo in funzione di M_W e M_t).

   Per farlo, il suggerimento e' di mettersi nel rest frame del quark top, e di orientare il momento del bosone W lungo l'asse z. In queste ipotesi, si trovi come e' fatta la matrice che esprime la somma delle polarizzazioni trasverse del W

$$\Sigma^{\mu\nu} = \sum_T \epsilon^\mu(k_2)\epsilon^\nu(k_2)$$

   e, usandola, si ricavi l'ampiezza quadra per decadimento in W trasversi. Confrontando con il risultato al punto sopra, si puo' ricavare l'ampiezza quadra per W longitudinali.

Problema 3
(facoltativo, indipendente da punti precedenti)
Dimostrare che

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3\; 2\; k^0} = \frac{1}{(2\pi)^3\; 2}\; |\vec{k}_t|\; d|\vec{k}_t|\; dy\; d\phi$$

con ϕ angolo azimutale attorno all'asse z, $|\vec{k}_t|^2 = (k_x^2 + k_y^2)$ e $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{k^0+k^3}{k^0-k^3}\right)$.

Come step intermedio, calcolare attentamente dy/dk^3.