ES. VI [es. 9] Tannoudji, es. 4.2 (pag. 84) (13)

"Oscillatore in campo elettrico" : Particella massa m in una dimensione, di carica q. Soggetta a forza armonica e campo elettrico costante

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - qEx \qquad \left(F_{el} = -\frac{\partial V_{el}}{\partial x} = qE\right)$$

a) Autovalori di $\hat{H}$

b) Se a $t=0$ sono nel ground state con $E=0$ $(|\psi(0)\rangle = |0\rangle)$ calcolare la prob. di essere nel ground state del sistema "accoppiato", cioè $E \neq 0$

c) momento di dipolo elettrico $d = qx$.
Calcolare $\langle d\rangle(t)$ se a $t=0$ sono in $|0\rangle$

a) $$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - qEx =$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

Quindi, con il cambio di variabile $x' = x - \frac{qE}{m\omega^2}$, si ha:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2} + \frac{m\omega^2}{2}x'^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

$$\Rightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

b) $$\psi(x) = \langle x|0\rangle_{E=0} = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$\left[e^{-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{L^2}}\right.$
L = lunghezza (usando $\hbar, m, \omega$)
$= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Autostati: $$\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n^{E\neq 0}(x) = \varphi_n^{E=0}(x - x_0)$$

con $x_0 = \frac{qE}{m\omega^2}$

$$\text{Prob}\left(H = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}\right) = |C_0|^2 \qquad \text{se } \Psi(x) = \sum_n c_n \tilde{\varphi}_n(x)$$

$$C_0 = \int dx\, \tilde{\varphi}_0^*(x)\, \Psi(x) =$$

$$= \int dx \left[\varphi_0^{E=0}(x-x_0)\right]^* \varphi_0(x) =$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + x^2\right)}$$

$$\cancel{= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega x_0^2}{2\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}}}$$

$$\cancel{= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{x_0^2}{2}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x^2 - xx_0 + \frac{x_0^2}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\left[\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2 + \frac{x_0^2}{4}\right]} =$$

$$= e^{-\frac{m\omega x_0^2}{4\hbar}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int dx'\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x'^2} = e^{-\frac{m\omega x_0^2}{4\hbar}}$$

$$\text{Prob} = e^{-\frac{m\omega x_0^2}{2\hbar}} = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{q^2E^2}{m^2\omega^4}} = \exp\left(-\frac{q^2E^2}{2\hbar m\omega^3}\right)$$

QU

NON FATTO

c) Usiamo eq. di Heisenberg (T. di Ehrenfest) per x'_H e p'_H.

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} x'_H = [x'_H, H] = \left[x'_H, \frac{p'^2_H}{2m}\right] = i\hbar \frac{p'_H}{m} \\ i\hbar \frac{d}{dt} p'_H = [p'_H, H] = \left[p'_H, \frac{m\omega^2}{2} x'^2_H\right] = \frac{m\omega^2}{2}\left(-2i\hbar x'_H\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x'_H = \frac{p'_H}{m} \\ \frac{d}{dt} p'_H = -m\omega^2 x'_H \end{cases}$$

(al solito, come le eq. del moto classiche)

Derivo la prima

$$\ddot{x}'_H = -\omega^2 x_H$$

che ha come soluzione generale, considerando anche le condiz. iniziali:

$$x'_H(t) = x'(0)\cos(\omega t) + \frac{p'(0)}{m\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

(non scrivo più la H di Heisenberg)

Usando $x' = x - x_0$, e dunque $x'(0) = x(0) - x_0$, si ha:

$$x_H(t) = x_0 + x'(t) = x_0 + x'(0)\cos\omega t + \frac{p'(0)}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t =$$

uso che $p'(0) = p(0)$

$$= x_0 + \big(x(0) - x_0\big)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$= x_0(1 - \cos\omega t) + x_H(0)\cos\omega t + \frac{p_H(0)}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

SONO NELLA RAPP. DI HEISENBERG, QUINDI HO FATTO EVOLVERE L'OPERATORE E IL VETTORE DI STATO È FISSO

$$\langle x\rangle(t) = \langle 0|[\ \dots\ ]|0\rangle \quad , \text{ con } |0\rangle = |0\rangle_{E=0}$$

(ground state problema senza E elettrico)

$$= \langle 0|\mathbb{1}|0\rangle(1-\cos\omega t)x_0 + \cos\omega t\,\langle 0|x_H(0)|0\rangle + \frac{\mathrm{sen}\,\omega t}{m\omega}\langle 0|p_H(0)|0\rangle$$

A $t=0$, $x_H(0) = x \Rightarrow \langle 0|x|0\rangle = \int dx\, x\,|\psi_0(x)|^2 = 0$

" " , $p_H(0) = p \Rightarrow \langle 0|p|0\rangle = \int dx\, \psi_0^*(x)\left(-i\hbar\frac{d\psi_0(x)}{dx}\right) \propto \int dx\, x\,|\psi_0(x)|^2 =$

Quindi:

$$\langle d\rangle(t) = q\langle x\rangle(t) = q x_0(1-\cos\omega t) =$$

$$= q x_0\left(1 - \cos\left(2\frac{\omega t}{2}\right)\right) = q x_0\left(1 - \cos^2\frac{\omega t}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\omega t}{2}\right) =$$

$$= 2 q x_0\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

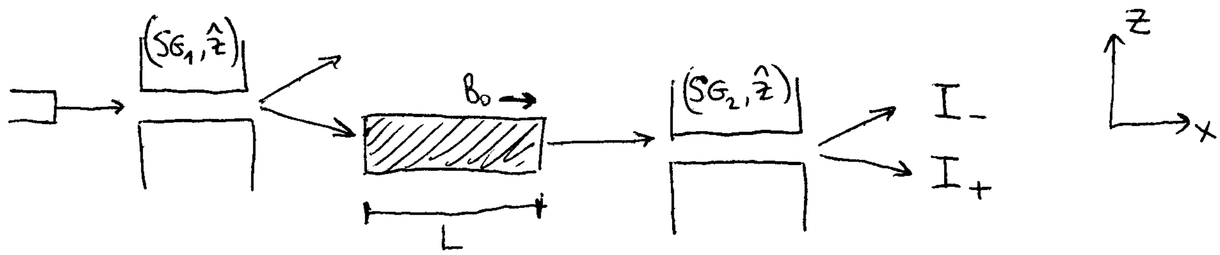
ES. X [es. 21] W.S., es. 3040 (pag. 233)

[Vedi es_L6.pdf] STERN-GERLACH

Fascio di atomi d'argento diretto lungo l'asse x con velocità V passa attraverso $(SG_1, \hat{z})$, poi in una regione lunga L con campo magnetico uniforme $B_0 \vec{e}_x$ (lungo il moto) e infine in un'altra regione con gradiente di campo magnetico lungo z, cioè $(SG_2, \hat{z})$.

Se all'uscita di SG_1 si seleziona il fascio con $S_z = \frac{\hbar}{2}$, calcolare le intensità dei fasci all'uscita di SG_2.

situazione:



Ricordiamo che per un atomo d'argento

$$\vec{\mu} = \frac{-|e|}{mc} \vec{S} \quad , \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \qquad \text{(un elettrone} \rightarrow \text{spin } \tfrac{1}{2})$$

Ricordiamo anche che un fascio che attraversa SG subisce una forza data da:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\vec{\nabla}(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

In $(SG, \hat{z})$ si ha $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ con un gradiente $\frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0$, quindi

$$\vec{F} = +\vec{\nabla}(\mu_z B_z) = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

All'uscita di $(SG_1, \hat{z})$ abbiamo selezionato $S_z = \frac{\hbar}{2}$, quindi

$$|\psi(t=0)\rangle = |+, \hat{z}\rangle$$

Poiché abbiamo attraversamento in campo $B_0 \vec{e}_x$, decompongo $|\psi(t=0)\rangle$ su autostati di S_x: sappiamo che

$$|+, \hat{z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+, \hat{x}\rangle + |-, \hat{x}\rangle\right] \quad \text{dove} \quad S_x |\pm, \hat{x}\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm, \hat{x}\rangle$$

Infatti se $|+,\hat{z}\rangle = \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, allora $|\pm,\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\ \pm 1\end{vmatrix}$.

Quindi

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+,\hat{x}\rangle + |-,\hat{x}\rangle\right]$$

Nella regione con $B_0\vec{e}_x$ si ha che

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = +\frac{|e|}{mc}\vec{S}\cdot\vec{B} = \frac{|e|}{mc}\frac{B_0\hbar}{2}\sigma_x$$

e ovviamente gli autostati sono $|\pm,\hat{x}\rangle$:

$$H|\pm,\hat{x}\rangle = \pm\frac{|e|}{mc}\frac{B_0\hbar}{2}|\pm,\hat{x}\rangle$$

Dunque nel passaggio attraverso la regione con $B_0\vec{e}_x$ lo stato evolve così:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{|e|B_0}{2mc}t}|+,\hat{x}\rangle + e^{+i\frac{|e|B_0}{2mc}t}|-,\hat{x}\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i(\dots)}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} + e^{+i(\dots)}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{|e|B_0}{2mc}t\right)\\ -i\,\mathrm{sen}\left(\frac{|e|B_0}{2mc}t\right)\end{pmatrix}$$

In tale regione il moto è rettilineo uniforme lungo x, quindi il tempo impiegato è $T = \frac{L}{V}$. Dunque prima di entrare in $(SG_2,\hat{z})$ lo stato del sistema è:

$$|\psi(T)\rangle = \begin{vmatrix}\cos\left(\frac{|e|B_0}{2mc}\frac{L}{V}\right)\\ -i\,\mathrm{sen}\left(\frac{|e|B_0}{2mc}\frac{L}{V}\right)\end{vmatrix}$$

Quindi:

$$I_+ = I_0\,\mathrm{Prob}\left(S_z = \frac{\hbar}{2}\right) = I_0\cos^2\left(\frac{|e|B_0}{2mc}\frac{L}{V}\right)$$

$$I_- = I_0\,\mathrm{Prob}\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = I_0\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{|e|B_0}{2mc}\frac{L}{V}\right)$$

dove I_0 è l'intensità del fascio all'entrata di $(SG_2,\hat{z})$