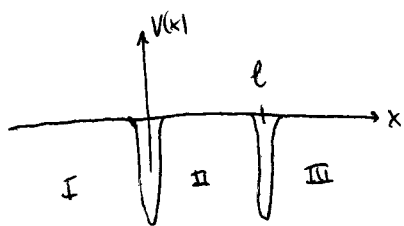


$$V(x) = -\alpha \delta(x) - \alpha \delta(x-l), \quad \alpha > 0$$



Calcolare stati legati, quanti sono, discutere le loro simmetrie e l'energia in funzione di α .

Considerazioni generali: Per $l \gg 1$ solo come 2 δ dell'esercizio precedente, cioè per ogni α c'è un solo bound state.

Quindi nei casi 2 stati legati.

CLASSICAMENTE: 2 stati DEGENERI, con stessa energia (particella sta o a sx o a dx)

MQ: nessun degeneri (in MQ il livello 1-dim. è NON DEGENERI)

stat legati: $\Rightarrow E = -\frac{\hbar^2 p^2}{2m}, \quad p > 0$

eq. Schrödinger:
lavoro delle δ



$$\psi'' = p^2 \psi \quad \Rightarrow e^{\pm px}$$

Al solito modo soluzioni di tipo $e^{\pm px}$ con le seguenti condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \psi'(0) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0) \\ \Delta \psi'(l) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(l) \\ \text{continuità I-II e II-III} \\ \psi \rightarrow 0 \text{ se } x \rightarrow \pm\infty \end{array} \right. \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_I = A e^{px} \\ \psi_{II} = C_1 e^{px} + C_2 e^{-px} \\ \psi_{III} = B e^{-px} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} [\psi_I \rightarrow 0 \text{ se } x \rightarrow -\infty] \\ [\psi_{III} \rightarrow 0 \text{ se } x \rightarrow +\infty] \end{array}$$

le condizioni (*) corrispondono al seguente sistema lineare:

(8)

$$\begin{cases} \text{I-II} & A = C_1 + C_2 & 1) \\ \text{II-III} & C_1 e^{pe} + C_2 e^{-pe} = B e^{-pe} & 2) \\ \text{IV(a)} & p(C_1 - C_2 - A) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} A & 3) \\ \text{IV(c)} & -B p e^{-pe} - p(C_1 e^{pe} - C_2 e^{-pe}) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} B e^{-pe} & 4) \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} B = \mp A e^{pe} \\ C_2 = \mp C_1 e^{pe} \end{cases} \quad \text{con la condizione} \quad e^{-2pe} = \left(\frac{\mu - 2p}{\mu} \right)^2, \quad \mu = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}$$

dalla 1) e 3) $-2pC_2 = -\mu(C_1 + C_2) \Rightarrow C_2 = -C_1 \frac{\mu}{\mu - 2p}$ (*)

$$A = C_1 + C_2 = -C_1 \frac{2p}{\mu - 2p} \quad (**)$$

2) $B = C_2 + C_1 e^{2pe}$ (***)

procedete a 4) $-p(C_2 + C_1 e^{2pe}) e^{-pe} - p(C_1 e^{pe} - C_2 e^{-pe}) = -\mu(C_2 + C_1 e^{2pe}) e^{-pe}$

da cui, cancellando:

$$-2pC_1 e^{pe} = -\mu(C_2 e^{-pe} + C_1 e^{pe})$$

$$-2p = -\mu \left(1 + \frac{C_2}{C_1} e^{-2pe} \right)$$

$$-2p = -\mu \left(1 - \frac{\mu}{\mu - 2p} e^{-2pe} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-2pe} = \left(\frac{\mu - 2p}{\mu} \right)^2}$$

La condizione appena trovata equivale a: $\pm e^{pe} = \frac{\mu}{\mu - 2p}$ o anche $\mp e^{-pe} = -\left(\frac{\mu - 2p}{\mu} \right)$

Dalla (**): $\boxed{C_2 = -C_1 \frac{\mu}{\mu - 2p} = \mp C_1 e^{pe}}$

Dalla (***) : $B e^{-2pe} = C_1 + C_2 e^{-2pe} = C_1 \left[1 + \frac{C_2}{C_1} e^{-2pe} \right] = C_1 [1 \mp e^{-pe}] \stackrel{(**)}{=} \leftarrow$

$$= [1 \mp e^{-pe}] A \left(\frac{\mu - 2p}{-2p} \right) = A \left[1 - \left(\frac{\mu - 2p}{\mu} \right) \right] \left(\frac{\mu - 2p}{-2p} \right) =$$

$$= A \left(\frac{\mu - 2p}{-\mu} \right) = \mp A e^{-pe}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \mp A e^{pe}}$$

Quindi il sistema ha 2 soluzioni:

la relazione tra i parametri κ avere stati legati e^-

$$\boxed{e^{-2\ell} = \left(\frac{\mu - 2\ell}{\mu}\right)^2} \quad (*)$$

e, + in particolare:

$$e^{-\ell} = + \left(1 - \frac{2\ell}{\mu}\right) \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 e^{\ell} \\ B = -A e^{\ell} \end{cases}$$

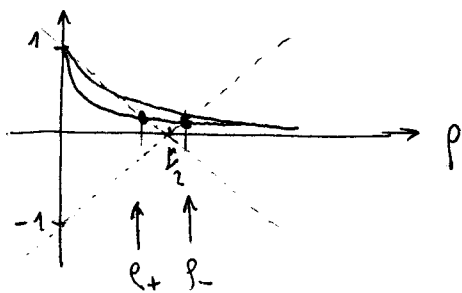
[segue sopra]

$$e^{-\ell} = - \left(1 - \frac{2\ell}{\mu}\right) \Rightarrow \begin{cases} C_2 = +C_1 e^{\ell} \\ B = +A e^{\ell} \end{cases}$$

[segue sotto]

Soluzioni di (*) [sempre mantenendo segni 'sopra' e 'sotto' distinti]

$$e^{-\ell} = \pm \left(1 - \frac{2\ell}{\mu}\right)$$



$\Rightarrow$ $\forall$ valore dei parametri, 1 soluzione d'è sempre
corrisponde a $\pm \left(1 - \frac{2\ell}{\mu}\right)$

Abbiamo due soluzioni se

$$\left. \frac{d}{d\ell} (e^{-\ell}) \right|_{\ell=0} < \left. \frac{d}{d\ell} \left(1 - \frac{2\ell}{\mu}\right) \right|_{\ell=0}$$

$$\text{cioè } \ell > \frac{\mu}{2}$$

Quindi: Se $\ell < \frac{\mu}{2} \Rightarrow$ 1 solo bound state, con $p = p_- > \frac{\mu}{2}$

Se $\ell > \frac{\mu}{2} \Rightarrow$ 2 bound state $\begin{cases} p = p_- > \frac{\mu}{2} \\ p = p_+ < \frac{\mu}{2} \end{cases}$

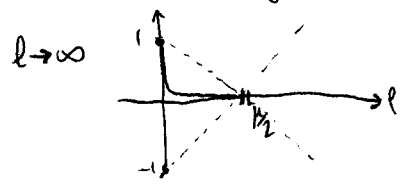
Quindi abbiamo

$$E_- = -\frac{\hbar^2}{2m} \ell_-^2$$

$$E_+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \ell_+^2$$

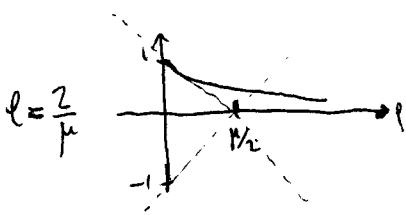
$$E_- < E_+ < 0$$

Discutiamo l'energia in funzione di l :



2 soluzioni coincidenti: $0 = \pm \left(1 - \frac{2\rho}{\mu}\right) \Rightarrow \rho_+ = \rho_- = \frac{\mu}{2}$

$$\Rightarrow E_+^A = E_-^A = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\mu}{2}\right)^2$$

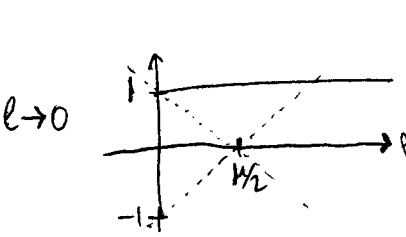


$\rho_+ \rightarrow 0$
 $\rho_- > \mu/2$

$$\Rightarrow E_+^B \rightarrow 0$$

E_-^B ha un valore $< E_-^A$

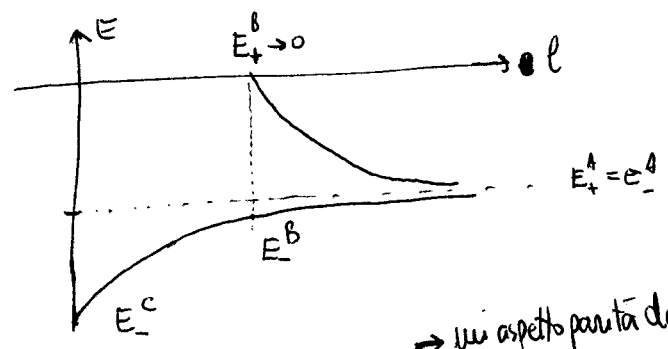
[CASO LIMITE X AVERE 2 SOLUZIONI]



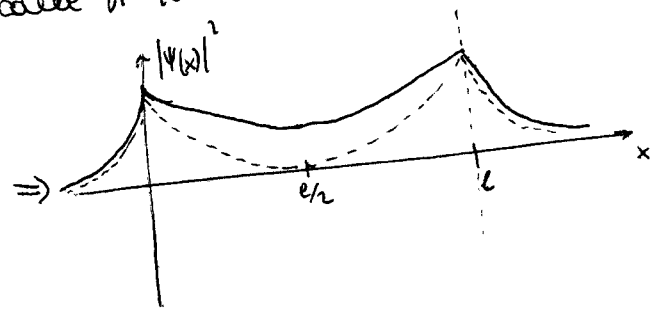
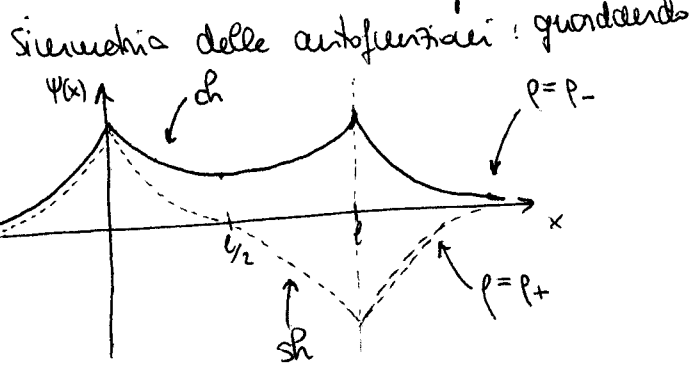
$\rho_+ = 0$ NON ACCETTABILE ($\int |\psi|^2 = +\infty$)
 $\rho_- > \mu/2$

$$\Rightarrow E_-^C \text{ ha un valore } < E_-^B$$

Quindi abbiamo ottenuto



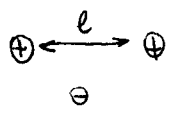
un aspetto particolarmente definito rispetto a $x = \frac{l}{2}$, x il potenziale è pari



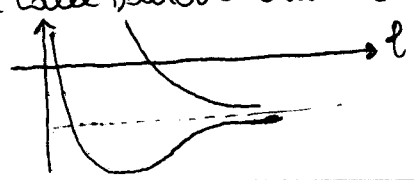
Simmetria delle autofunzioni: guardando come si inclinano A, B, C, e C₂

Soluzioni corrispondenti ad E_- [stato fondamentale] $\Rightarrow \psi_-$ SIMMETRICA RISPETTO A $x = \frac{l}{2}$
" " " E_+ [stato eccitato, quando esiste] $\Rightarrow \psi_+$ ASSIMMETRICA RISPETTO A $x = \frac{l}{2}$

Considero finale: approccio di nome H_2^+ [molecola diatmica ionizzata]



- in prima appross, modellizzo l'attrazione coulombiana con 2 delta [anche]
- poi studio repulsione dei due protoni con pot. coulombiano
- possiamo stimare l'energia del sistema con valore della E forte e della repulsione coulombiana $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ CI ASPETTIAMO UN l X CUI IL SISTEMA SIA STABILE, CIOE' UNO STATO DI EQUILIBRIO