ES. 1-1

$$\psi(x,t=0) = N \int dk\, e^{-|k|/k_0}\, e^{ikx}$$. ovviamente $k_0 > 0$

Ponendo $k = \frac{p}{\hbar}$ e con opportuna ridefinizione di N

$$\psi(x,t=0) = N' \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-|p|/\hbar k_0}\, e^{ipx/\hbar}$$

Quindi ricordando la formula di inversione x la trasf. di Fourier, si ha

$$\psi(p,t=0) = N'\, e^{-|p|/\hbar k_0}$$

Trovo N', imponendo $\int |\psi(p,t=0)|^2\, dp = 1$:

$$1 \overset{deve}{=} \int dp\, |\psi(p,t=0)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |N'|^2\, e^{-2|p|/\hbar k_0}\, dp =$$

$$= 2|N'|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2p/\hbar k_0}\, dp = 2|N'|^2 \left.\frac{e^{-2p/\hbar k_0}}{(-2/\hbar k_0)}\right|_0^{+\infty} =$$

$$= \hbar k_0 |N'|^2 \qquad \Rightarrow N' = \frac{1}{\sqrt{\hbar k_0}}$$

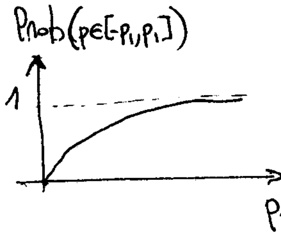
Quindi

$$\psi(p,t=0) = \frac{1}{\sqrt{\hbar k_0}}\, e^{-|p|/\hbar k_0} \qquad \psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{\hbar k_0}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-|p|/\hbar k_0}\, e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

a-b)

$$\text{Prob}(p \in [-p_1,p_1], t=0) = \int_{-p_1}^{p_1} dp\, |\psi(p,t=0)|^2 = \frac{2}{\hbar k_0} \int_0^{p_1} e^{-2p/\hbar k_0}\, dp$$

$$= \frac{2}{\hbar k_0} \left.\frac{e^{-2p/\hbar k_0}}{(-2/\hbar k_0)}\right|_0^{p_1} = 1 - e^{-2p_1/\hbar k_0}$$



Ogni componente del pacchetto evolve con un fattore di fase $e^{-iE_p t/\hbar}$, dove $E_p = \frac{p^2}{2m}$ (particella libera).

Quindi :

$$\psi(p,t) = e^{-iE_p t/\hbar}\, \psi(p,t=0) = e^{-i\frac{p^2}{2m}\frac{t}{\hbar}}\, \psi(p,t=0)$$

Segue che, poiché $|\psi(p,t)|^2 = |\psi(p,t=0)|^2$,

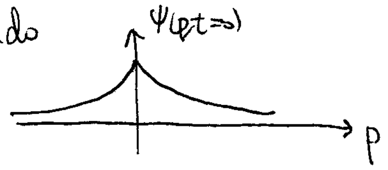
$$\mathrm{Prob}(p,t) = \mathrm{Prob}(p,t=0)$$

e dunque

$$\mathrm{Prob}(p\in[-p_1,p_1],t) = \mathrm{Prob}(p\in[-p_1,p_1],t=0)$$

Quindi la probabilità rispetto a p NON DIPENDE DAL tempo.

c) Quindi a $t=0$ ho un pacchetto d'onda con momenti distribuiti secondo



Per discutere la forma del pacchetto d'onda devo calcolare esplicitamente $\psi(x,t=0)$:

$$\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{\hbar k_0}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\; e^{ipx/\hbar}\, e^{-|p|/\hbar k_0} =$$

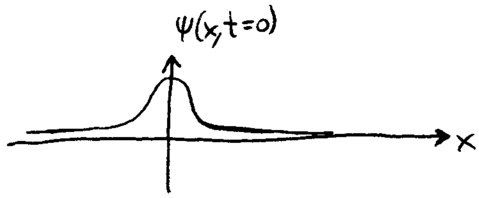
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2\pi k_0}}\left\{\int_0^{+\infty} dp\; e^{ipx/\hbar}\, e^{-p/\hbar k_0} + \int_{-\infty}^{0} dp\; e^{ipx/\hbar}\, e^{p/\hbar k_0}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2\pi k_0}}\left\{\left.\frac{e^{p\left(\frac{ix}{\hbar}-\frac{1}{\hbar k_0}\right)}}{\left(\frac{ix}{\hbar}-\frac{1}{\hbar k_0}\right)}\right|_0^{+\infty} + \left.\frac{e^{p\left(\frac{ix}{\hbar}+\frac{1}{\hbar k_0}\right)}}{\left(\frac{ix}{\hbar}+\frac{1}{\hbar k_0}\right)}\right|_{-\infty}^{0}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{\ }}\left\{\frac{-1}{\left(\frac{ix}{\hbar}-\frac{1}{\hbar k_0}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{ix}{\hbar}+\frac{1}{\hbar k_0}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{k_0}{\sqrt{2\pi k_0}}\left\{\frac{-1}{ixk_0-1} + \frac{1}{ixk_0+1}\right\} =$$

$$= \frac{k_0}{\sqrt{2\pi k_0}}\;\frac{2}{1+(k_0x)^2}$$



Adesso calcolo $\Delta x\,\Delta p$ a $t=0$:

$$\langle p\rangle = \int dp\; p\,|\psi(p,t=0)|^2 = 0 \qquad \text{(funzione DISPARI)}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int dp \; p^2 \; |\Psi(p,t=0)|^2 =$$

$$= \frac{1}{\hbar k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \; p^2 \; e^{-2|p|/\hbar k_0} = \frac{2}{\hbar k_0} \int_0^{+\infty} dp \; p^2 \; e^{-2p/\hbar k_0}$$

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} dx \, x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{\hbar k_0} \; \frac{2!}{(2/\hbar k_0)^3} = \frac{(\hbar k_0)^2}{2}$$

$$\langle x \rangle = \int dx \; x \; |\Psi(x,t=0)|^2 = \left(\frac{2k_0}{\sqrt{2\pi k_0}}\right)^2 \int dx \; x \left(\frac{1}{1+k_0^2 x^2}\right)^2 = 0 \qquad (\text{funz. DISPARI})$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{2k_0}{\sqrt{2\pi k_0}}\right)^2 \int dx \frac{x^2}{[1+k_0^2x^2]^2}$$

$$\rightarrow \text{trucco: } \frac{x^2}{[1+\alpha^2 x^2]^2} = \frac{-1}{2\alpha} \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1+\alpha^2 x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2k_0}{\sqrt{}}\right)^2 \left(\frac{-1}{2k_0}\right) \int dx \frac{d}{dk_0}\left(\frac{1}{1+k_0^2x^2}\right) =$$

$\rightarrow$ k_0 è un parametro rispetto alla variabile d'integrazione x

$$= \left(\frac{2k_0}{\sqrt{}}\right)^2 \left(\frac{-1}{2k_0}\right) \frac{d}{dk_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+k_0^2 x^2} =$$

$$\rightarrow x = \frac{x'}{k_0}$$

$$= \left(\frac{2k_0}{\sqrt{}}\right)^2 \left(\frac{-1}{2k_0}\right) \frac{d}{dk_0} \int \frac{1}{k_0} \frac{dx'}{1+x'^2} =$$

$$= \left(\frac{2k_0}{\sqrt{}}\right)^2 \left(\frac{-1}{2k_0}\right) \frac{d}{dk_0}\left(\frac{\pi}{k_0}\right) = \frac{4k_0^2}{2\pi k_0} \left(\frac{-1}{2k_0}\right)\left(\frac{-\pi}{k_0^2}\right) = \frac{1}{k_0^2}$$

Adesso ho tutto ciò che mi serve:

$$\Delta x \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{1/k_0^2} = \frac{1}{k_0}$$

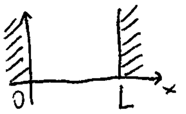
$$\Delta p \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{(\hbar k_0)^2}{2}} = \frac{\hbar k_0}{\sqrt{2}}$$

Quindi, a $t=0$,

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \qquad \left(\text{e, come deve essere, } \frac{\hbar}{\sqrt{2}} > \frac{\hbar}{2}\right)$$

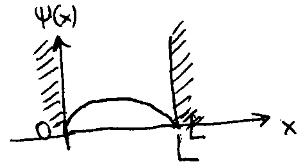
L'evoluzione temporale porta ad uno sparpagliamento del pacchetto nello spazio delle x; la distribuzione di probabilità per p (e dunque anche Δp) sono costanti nel tempo.

ES. 2-1

a) Se $V(x) =$  , sappiamo che le funzioni d'onda per gli stati legati sono:

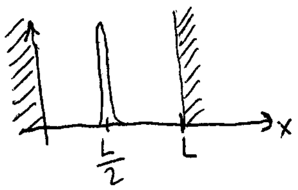
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad , \quad n=1,2,3,\dots$$

Il ground state si ha per $n=1$, quindi



$$E_0 = (\text{en. stato fondamentale}) = E_n\Big|_{n=1} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Per comodità futura, notiamo che $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}(k_n x)$, $k_n = n\frac{\pi}{L}$.

b) Adesso $V(x) =$  , cioè abbiamo aggiunto $\lambda\delta\left(x-\frac{L}{2}\right)$, $\lambda>0$

Chiamiamo ψ il nuovo ground state; le condizioni che deve soddisfare sono:

i) $\psi(0)=0$
ii) $\psi(L)=0$
iii) continuità.

La presenza della δ di Dirac aggiunge la seguente condizione (integrare eq. Schr. stati stazionari su $\left(\frac{L}{2}-\varepsilon, \frac{L}{2}+\varepsilon\right)$ e prendere limite $\varepsilon\to 0$)

iv) $\Delta\psi'\left(\frac{L}{2}\right) \overset{\text{def}}{=} \psi'\left(\frac{L}{2}_+\right) - \psi'\left(\frac{L}{2}_-\right) = + \frac{2m}{\hbar^2}\lambda\psi\left(\frac{L}{2}\right)$

Poniamo $E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $E>0$ $\Rightarrow$ $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar^2}$, $k>0$

e definiamo, in completa generalità,

$$\psi = \begin{cases} \psi_2 = A\, \text{sen}\, kx & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \psi_1 = B\, \text{sen}(k(x-L)) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Questa ψ è t.c. $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi$ per $x \ne \frac{L}{2}$

e rispetta i) e ii), cioè $\psi(0)=0$ e $\psi(L)=0$

Imponendo continuità e la iv) si ottiene:

$$\begin{cases} iii) \\ iv) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1\left(\frac{L}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{L}{2}\right) \\ \psi_1'\left(\frac{L}{2}\right) - \psi_2'\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\,\psi\left(\frac{L}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ BK\cos\left(\frac{KL}{2}\right) - AK\cos\left(\frac{KL}{2}\right) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2} A \,\mathrm{sen}\left(\frac{KL}{2}\right) \end{cases}$$

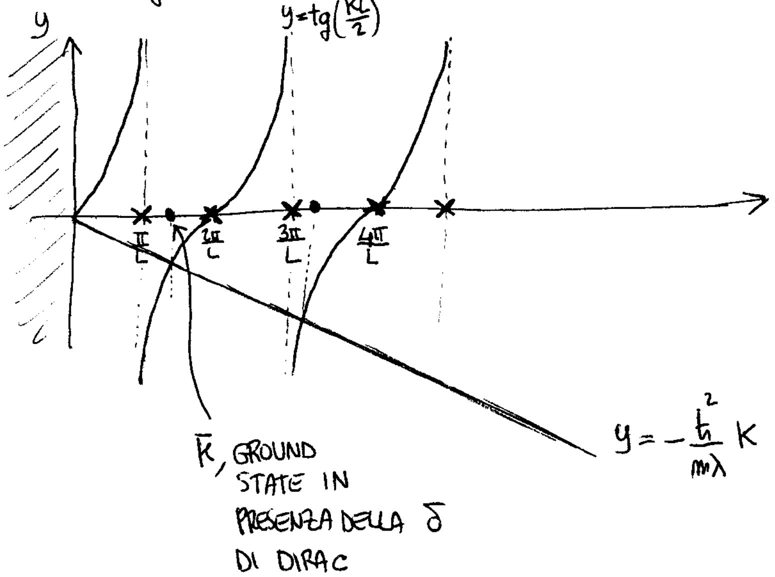
Quindi la condizione su K per avere stati legati è:

$$2K\cos\left(\frac{KL}{2}\right) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{KL}{2}\right)$$

cioè:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{KL}{2}\right) = -\frac{\hbar^2}{m\lambda} K$$

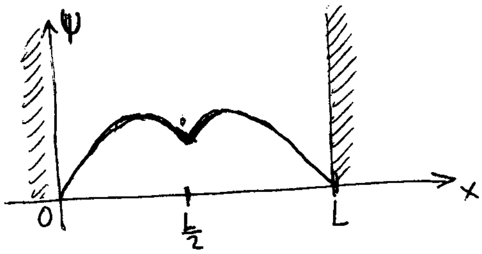
Risolviamo graficamente, ricordando che $K>0$



$\times$ = stati legati senza δ Dirac
$\bullet$ = stati legati con δ Dirac

Quindi: $\bar{E}_0 = \frac{(\hbar \bar{K})^2}{2m}$, $\frac{\pi}{L} \le \bar{K} \le \frac{2\pi}{L}$ $\quad (\Rightarrow \bar{E}_0 \geq E_0)$

Ground state: $\psi = \begin{cases} A\,\mathrm{sen}(\bar{K}x) \\ -A\,\mathrm{sen}(\bar{K}(x-L)) \end{cases}$



c) Nel limite $\lambda \to \infty$, la retta $y = -\frac{\hbar^2}{m\lambda}K$ coincide con l'asse x.

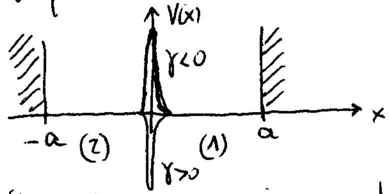
Quindi $\bar{K} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{2\pi}{L}$, ovvero: $\bar{E}_0 \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 4\,\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$.

Quindi $\frac{\bar{E}_0}{E_0} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 4$

ES. 2-2

(1) Soluzione generale dell'eq. di S. per il potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x \leq -a \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\gamma}{a}\,\delta(x) & -a < x < a \\ +\infty & x \geq a \end{cases}$$



Senza perdere generalità, essendo il potenziale simmetrico rispetto all'origine, studiamo separatamente soluzioni pari e dispari.
Infatti, se potenziale simmetrico per $x \to -x$, allora le autofunzioni hanno parità definita, cioè sono o pari o dispari.

a) soluzioni pari, $E>0$ $\qquad [\psi_1(-x) = \psi_2(x)]$

$$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}, \quad E>0, \quad k>0$$

$$\begin{cases} \psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \psi_2 = A e^{-ikx} + B e^{ikx} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \psi_1' &= ik\left(A e^{ikx} - B e^{-ikx}\right) \\ \psi_2' &= ik\left(-A e^{-ikx} + B e^{ikx}\right) \end{aligned}$$

annullamento ai bordi: $\psi_1(a) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{A e^{ika} + B e^{-ika} = 0}$

potenziale delta fonte: $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \Rightarrow ik(A-B) - ik(B-A) = -\frac{\gamma}{a}(A+B)$

$$\Rightarrow \boxed{A\left(2ik + \frac{\gamma}{a}\right) + B\left(-2ik + \frac{\gamma}{a}\right) = 0}$$

Dalle 2 eq. evidenziate segue:

$$\begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ 2ik + \frac{\gamma}{a} & -2ik + \frac{\gamma}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

che ha soluzione NON BANALE $(A=B=0)$ se $\det = 0$, cioè otteniamo la seguente condizione:

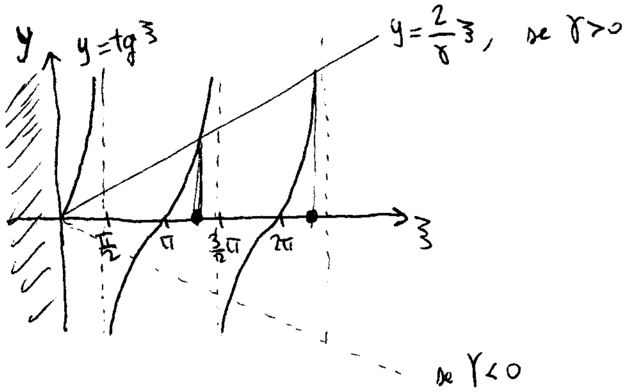
$$e^{ika}\left(-2ik + \frac{\gamma}{a}\right) - e^{-ika}\left(2ik + \frac{\gamma}{a}\right) = 0$$

$$\frac{\gamma}{a} \cdot 2i \operatorname{sen} ka - 2ik \cdot 2\cos ka = 0$$

$$\operatorname{tg} ka = \frac{2}{\gamma} ka$$

cioè, definendo $ka = \xi \ (>0) \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{tg}\xi = \frac{2}{\gamma}\xi} \quad (i)$$



NB $K=0$ non è accettabile perché sarebbe la soluzione identicamente nulla (costante + annullamento ai bordi)

Dopo lo spettro, cerco le autofunzioni:

$$A e^{iKa} + B e^{-iKa} = 0 \qquad \Rightarrow B = -A e^{2iKa}$$

Quindi:

$$\boxed{\psi_1(x) = A\left(e^{iKx} - e^{2iKa}\, e^{-iKx}\right) = }$$

$$= A e^{iKa}\left(e^{iK(x-a)} - e^{iK(a-x)}\right) =$$

$$= A e^{iKa} (2i)\, \mathrm{sen}[K(x-a)] =$$

$$= \boxed{\mathcal{N}\, \mathrm{sen}[K(x-a)]}$$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = \mathcal{N}\, \mathrm{sen}(K(x-a)) = \mathcal{N}\left(\mathrm{sen}Kx \cos Ka - \cos Kx\, \mathrm{sen}\, Ka\right) =$$

$$= \mathcal{N}\cos(Ka)\left[\mathrm{sen}Kx - \mathrm{tg}\, Ka \cos Kx\right] =$$

$$= \mathcal{N}_1\left(\mathrm{sen}Kx - \frac{2}{\gamma} Ka \cos Kx\right) \qquad \text{(ii)}$$

$$\boxed{\psi_2(x) = \psi_1(-x) = \mathcal{N}\, \mathrm{sen}[K(-x-a)]}$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = \mathcal{N}_1\left(-\mathrm{sen}Kx - \frac{2}{\gamma} Ka \cos Kx\right)$$

NB Verifico che $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0)$:

$$\psi_1'(0) = \mathcal{N}_1 K\left(\cos Kx + \frac{2}{\gamma} Ka\, \mathrm{sen} Kx\right)\Big|_{x=0} = \mathcal{N}_1 K$$

$$\psi_2'(0) = \; ----- \; = -\mathcal{N}_1 K$$

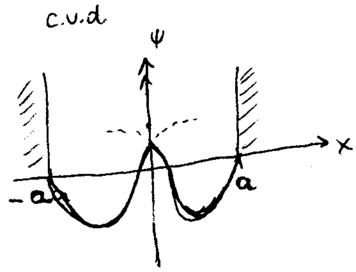
$$\psi(0) = \mathcal{N}_1\left(\frac{-2Ka}{\gamma}\right)$$

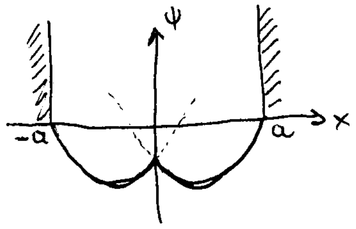
$$\Rightarrow \psi_1'(0) - \psi_2'(0) = 2\mathcal{N}_1 K = -\frac{\gamma}{a}\psi(0)$$

c.v.d

Forma delle autofunzioni (assumendo $\mathcal{N}>0$ come riferimento)

$$\gamma > 0 \Rightarrow \xi > \pi \Rightarrow K > \frac{\pi}{a} \Rightarrow \begin{cases} \psi(0) = -\mathcal{N}\, \mathrm{sen}\, Ka > 0 \\ T = \frac{2\pi}{K} < 2a \end{cases}$$





$$\gamma < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \xi < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2a} < K < \frac{\pi}{a} \Rightarrow \begin{cases} \psi(0) = -\mathcal{N}\, \mathrm{sen} Ka \\ 2a < T < 4a \end{cases}$$

NB Metodo alternativo:

generalmente si pone $\begin{cases} \psi_1 = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \\ \psi_2 = -A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \end{cases}$ (pari) (*)

questo si può anche scrivere nel modo seguente:
$$\begin{cases} \psi_1 = N \operatorname{sen}(kx+\varphi) \\ \psi_2 = N \operatorname{sen}(-kx+\varphi) \end{cases} \quad (**).$$

infatti, ad es. per ψ_1: $N \operatorname{sen}(kx+\varphi) = N(\operatorname{sen} kx \cos\varphi + \cos kx \operatorname{sen}\varphi) \overset{\text{deve}}{=} A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$

$N \cos\varphi [\operatorname{sen} kx + \operatorname{tg}\varphi \cos kx] = A[\operatorname{sen} kx + \frac{B}{A} \cos kx]$

quindi basta scegliere $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}}$ (iii)

Questo dimostra che si potrebbe partire da (**) anziché da (*)

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = N \operatorname{sen}(kx+\varphi) \\ \psi_2 = N \operatorname{sen}(-kx+\varphi) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \psi_1' = Nk \cos(kx+\varphi) \\ \psi_2' = -Nk \cos(-kx+\varphi) \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

annullamento ai bordi: $\psi_1(a) = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{sen}(ka+\varphi) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} ka \cos\varphi + \cos ka \operatorname{sen}\varphi = 0$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} ka = -\operatorname{tg}\varphi}$

potenziale della forma: $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \Rightarrow 2Nk \cos\varphi = -\frac{\gamma}{a} N \operatorname{sen}\varphi$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2ak}{\gamma}}$ (iv)

Dalle 2 eq. evidenziate segue l'equaz. per lo spettro degli autovalori:

$\operatorname{tg} ka = \frac{2}{\gamma} ka$ [come per il 1° metodo, eq. (i)]

L'uguaglianza dei 2 risultati è completamente provata se verifichiamo che

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 2^\circ \text{ metodo} \\ \downarrow \\ -\frac{2ak}{\gamma} \text{ [eq. (iv)]}}}{\operatorname{tg}\varphi} \overset{\text{(iii)}}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ 1^\circ \text{ metodo}}}{\frac{B}{A}}$$

$\hookrightarrow \frac{\text{coeff. coseno}}{\text{coeff. seno}} = -\frac{2}{\gamma} ka$ [eq. (ii)]

b) soluzioni pari, $E<0$ $[\psi_1(x) = \psi_2(x)]$

$E = -\frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $E<0$, $k>0$

$$\begin{cases} \psi_1 = Ae^{kx} + Be^{-kx} \\ \psi_2 = Ae^{-kx} + Be^{kx} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \psi_1' = k(Ae^{kx} - Be^{-kx}) \\ \psi_2' = k(-Ae^{-kx} + Be^{kx}) \end{matrix}$$

annullamento ai bordi: $\psi_1(a)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ae^{Ka}+Be^{-Ka}=0}$

potenz. delta/forme: $\psi_1'(0)-\psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \quad \Rightarrow \quad K(A-B)-K(-A+B) = -\frac{\gamma}{a}(A+B)$

$$\Rightarrow \boxed{A\left(2K+\frac{\gamma}{a}\right)+B\left(-2K+\frac{\gamma}{a}\right)=0}$$

Dalle 2 eq. evidenziate, segue

$$\begin{pmatrix} e^{Ka} & e^{-Ka} \\ 2K+\frac{\gamma}{a} & -2K+\frac{\gamma}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ soluz. non banale se $\det=0$, cioè

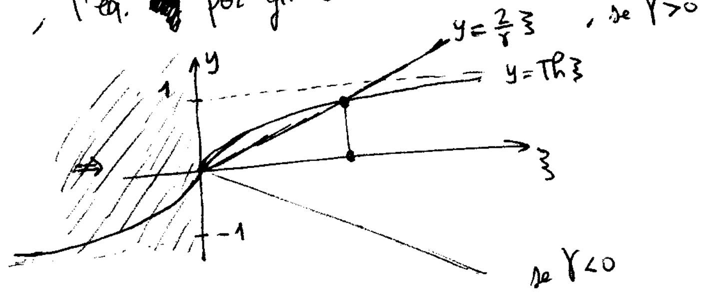
$$e^{Ka}\left(-2K+\frac{\gamma}{a}\right)-e^{-Ka}\left(2K+\frac{\gamma}{a}\right)=0$$

$$\frac{\gamma}{a}\left(e^{Ka}-e^{-Ka}\right)-2K\left(e^{Ka}+e^{-Ka}\right)=0$$

$$\mathrm{Th}\, Ka = \frac{2Ka}{\gamma}$$

cioè, se $Ka=\xi$ (>0), l'eq. per gli autovalori si risolve graficamente:

$$\boxed{\mathrm{Th}\,\xi = \frac{2}{\gamma}\xi} \quad \Rightarrow$$



Quindi, se c'è soluzione, è una soltanto. Le condizioni sono:

$$\begin{cases} \gamma>0 \\ \left.\frac{d}{d\xi}\mathrm{Th}\,\xi\right|_{\xi=0} > \left.\frac{d}{d\xi}\frac{2}{\gamma}\xi\right|_{\xi=0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma>0 \\ \left.\frac{1}{\mathrm{ch}^2\xi}\right|_{\xi=0} > \frac{2}{\gamma} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma>0 \\ \gamma>2 \end{cases}$$

Quindi c'è soluzione solo se $\boxed{\gamma>2}$

Adesso trovo esplicitamente le autofunzioni:

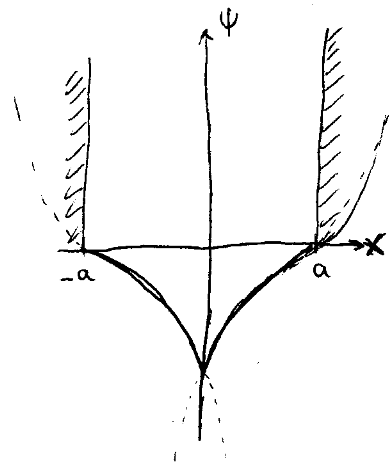
$B=-Ae^{2Ka}$

Quindi

$$\boxed{\psi_1(x)} = A\left(e^{Kx}-e^{2Ka}e^{-Kx}\right)=$$
$$=Ae^{Ka}\left(e^{K(x-a)}-e^{-K(x-a)}\right)=$$
$$=\boxed{N\,\mathrm{sh}[K(x-a)]}$$

$$\boxed{\psi_2(x) = -N\,\mathrm{sh}[K(x+a)]}$$

$\Rightarrow$



c) soluzioni dispari, $E>0$ $[\psi_1(-x) = -\psi_2(x)]$

$E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $E>0$, $k>0$

$$\begin{cases} \psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \psi_2 = -(A e^{-ikx} + B e^{ikx}) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \psi_1' &= ik(A e^{ikx} - B e^{-ikx}) \\ \psi_2' &= ik(A e^{-ikx} - B e^{ikx}) \end{aligned}$$

dispari $\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A+B=0$

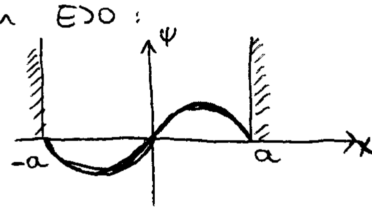
$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = A_1 \operatorname{sen} kx \\ \psi_2 = A_2 \operatorname{sen} kx \end{cases} \qquad \begin{aligned} \psi_1' &= A_1 k \cos kx \\ \psi_2' &= A_2 k \cos kx \end{aligned}$$

annullamento ai bordi: $ka = n\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{n\pi}{a}}$

potenziale delta forma: $\psi_1'(0) - \psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \Rightarrow k(A_1 - A_2) = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2}$

Quindi le autofunzioni dispari della buca senza la δ sono anche autofunzioni x questo caso, con $E>0$:

$\boxed{\psi_n(x) = N \operatorname{sen}(k_n x)}$, $k_n = \frac{n\pi}{a}$, $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$



d) soluzioni dispari, $E<0$ $[\psi_1(-x) = -\psi_2(x)]$

$k \to ik$, tenendo $k>0$ $\Rightarrow$ $E = -\frac{(\hbar k)^2}{2m}$

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A e^{-kx} + B e^{kx} \\ \psi_2(x) = -A e^{kx} - B e^{-kx} \end{cases}$$

dispari $\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A+B=0$

$\Rightarrow \psi(x) = N \operatorname{sh}(kx)$

annullamento ai bordi $\Rightarrow \psi(a) = 0 \Rightarrow \operatorname{sh} ka = 0 \Rightarrow k=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{NON C'È SOLUZIONE}}$

e) $E=0$ (ultimo caso da analizzare)

eq. Schroed.: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\gamma}{a}\delta(x)\psi = 0$ $\Rightarrow$ lontano da $x=0$, la soluzione è $\psi(x) = A + Bx$

caso pari $\begin{cases} \psi_1 = A+Bx & \psi_1' = B \\ \psi_2 = A-Bx & \psi_2' = -B \end{cases}$

annullam. ai bordi : $\psi_1(a)=0 \Rightarrow A+Ba=0 \Rightarrow B = -\frac{A}{a}$

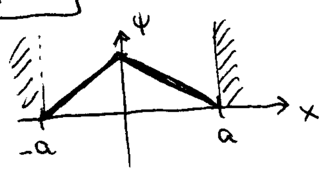
$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = A\left(1-\frac{x}{a}\right) & \psi_1' = -\frac{A}{a} \\ \psi_2 = A\left(1+\frac{x}{a}\right) & \psi_2' = \frac{A}{a} \end{cases}$$

pot. delta di Dirac : $\psi_1'(0)-\psi_2'(0) = -\frac{\gamma}{a}\psi(0) \Rightarrow -\frac{A}{a} - \frac{A}{a} = -\frac{\gamma}{a}A$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 2}$$

Quindi c'è soluzione solo se $\boxed{\gamma=2}$ e si ha

$$\psi(x) = \mathcal{N}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)$$



caso dispari $\begin{cases} \psi_1 = A+Bx \\ \psi_2 = -A+Bx \end{cases}$

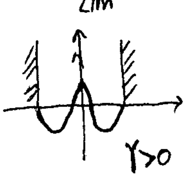
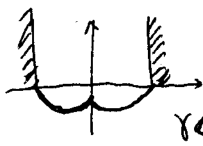
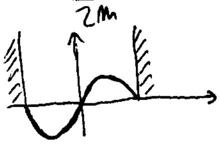
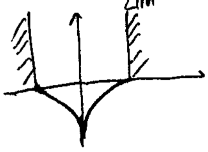
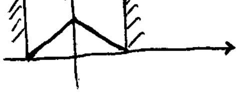
dispari $\Rightarrow \psi_1(0)=\psi_2(0)=0 \Rightarrow A=0$

$\Rightarrow \psi = Bx$

annullamento ai bordi $\Rightarrow \psi(a)=0 \Rightarrow B=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{NON C'È SOLUZIONE}}$

RIASSUNTO :

	pari	dispari
$E>0$	$E=\frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $\operatorname{tg} ka = \frac{2}{\gamma} ka$  $\gamma>0$  $\gamma<0$	$E=\frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $k = n\frac{\pi}{a}$ 
$E<0$	$E=-\frac{(\hbar k)^2}{2m}$, $\operatorname{Th} ka = \frac{2}{\gamma} ka$ $\boxed{\gamma>2}$ 	NO
$E=0$	$E=0$ $\boxed{\gamma=2}$ 	NO

(2) Valore di γ per cui il ground state ha $E=0$.

Devo trovare condizione t.c. NON ci siano SOLUZIONI con $E<0$.
Quindi, poiché $E<0$ corrisponde solo a autof. pari, si ha

$\boxed{\gamma<2}$ $\Rightarrow$ No soluzioni con $E<0$

Per avere che ground state sia proprio con $E=0$, allora devo porre

$\boxed{\gamma=2}$ $\Rightarrow$ una soluzione con $E=0$

Quindi la condizione è $\boxed{\gamma=2}$. La autof. normalizzata è

$$\psi_0(x)=N\left(1-\frac{|x|}{a}\right)$$

Trovo N: $\quad 1 \overset{\text{deve}}{=} \int_{-a}^{a} dx\, |\psi_0(x)|^2 = |N|^2\, 2\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx =$

$$=2|N|^2 \int_0^a dx\left(1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{2x}{a}\right)=$$

$$=2|N|^2\left[a+\frac{a}{3}-a\right]$$

$$\Rightarrow N=\sqrt{\frac{3}{2a}}$$

$$\boxed{\psi_0(x)=\sqrt{\frac{3}{2a}}\left[1-\frac{|x|}{a}\right]}$$

(3) Evoluto temporale di $\psi(x,t=0)=N\left(1-\frac{|x|}{a}+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\right)$

decompongo ψ su autostati di $\hat{H}$:

$$\psi_0(x)=\sqrt{\frac{3}{2a}}\left[1-\frac{|x|}{a}\right]$$

$$\psi_n^{DISP}(x)=\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{sen}(k_n x) \qquad k_n=n\frac{\pi}{a},\quad n=1,2,\dots \qquad E_n=\frac{(k_n\hbar)^2}{2m}=\hbar\omega_n$$

Quindi:

$$\psi(x,t=0)=N\left[\sqrt{\frac{2a}{3}}\,\psi_0(x)+\sqrt{a}\,\psi_1(x)\right]$$

$$\psi(x,t)=N\left[\sqrt{\frac{2a}{3}}\,\psi_0(x)+\sqrt{a}\,e^{-iE_1t/\hbar}\,\psi_1(x)\right]$$

Per tornare nello stato iniziale:

$$\frac{E_1 t}{\hbar} = 2\pi \ell \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

cioè $t = \ell \frac{2\pi\hbar}{E_1} = \ell \frac{2\pi\hbar \cdot 2ma^2}{\hbar^2 \pi^2}$

$$\Rightarrow \boxed{t = \left(\frac{4ma^2}{\pi\hbar}\right) \cdot \ell} \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

Troviamo distrib. di probabilità per H:

$$|\psi(t)\rangle = N\left[\sqrt{\frac{2a}{3}}\,|0\rangle + \sqrt{a}\, e^{-i\omega_1 t}\, |E_1\rangle\right] \qquad \text{con } |\,\rangle = |E\rangle$$

È uno sviluppo in autof. normalizzate, quindi:

$$|N|^2 \cdot \left(\frac{2a}{3} + a\right) \stackrel{\text{deve}}{=} 1 \qquad \Rightarrow N = \sqrt{\frac{3}{5a}}$$

$$\text{Prob}(E=0, t) = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = |N|^2 \frac{2a}{3} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Prob}(E=E_1, t) = |\langle E_1|\psi(t)\rangle|^2 = |N|^2 a = \frac{3}{5}$$

Valore d'aspettazione di H: $\langle H\rangle(t)$

<u>modo 1</u> $\langle H\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle =$

$$= |N|^2 \left[\sqrt{\frac{2a}{3}}\langle 0| + \sqrt{a}\, e^{i\omega_1 t}\langle E_1|\right] \hat{H} \left[\sqrt{\frac{2a}{3}}|0\rangle + \sqrt{a}\, e^{-i\omega_1 t}|E_1\rangle\right]$$

$$= |N|^2 \left[\sqrt{\frac{2a}{3}}\langle 0| + \sqrt{a}\, e^{i\omega_1 t}\langle E_1|\right]\left[\sqrt{a}\, E_1\, e^{-i\omega_1 t}|E_1\rangle\right] =$$

$$= |N|^2 a E_1 = \frac{3}{5}\hbar\omega_1$$

<u>modo 2</u> $\langle H\rangle(t) = \sum_E \text{Prob}(E, t) \cdot E =$

$$= \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot E_1 = \frac{3}{5}\hbar\omega_1$$