ES. A1 Destri, 28/02/2006, es. 2

Particella in 3 dimensioni sottoposta a ~~???~~ potenziale armonico isotropico con frequenza ω e confinata nel semispazio $x \geq 0$.

1) autovalori e autofunzioni di $\hat{H}$
2) Prob (L_z) se osservo $H = \frac{9}{2}\hbar\omega$ e $L_x = 2\hbar$. [DIFFICILE]

1) $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$, $V(x) = \begin{cases} +\infty & x \leq 0 \\ \frac{m}{2}\omega^2(x^2+y^2+z^2) \end{cases}$

devo risolvere $\hat{H}\psi = E\psi$.
Essendo $\hat{H} = H_x + H_y + H_z$, cerco soluzione della forma $\psi = X(x)Y(y)Z(z)$.
Sappiamo che

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u'' + \frac{m\omega^2}{2}x^2 u = E u$$

è risolta da

$$u_n(x) = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \qquad \text{con } \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$$

$$H_n(\xi) = (-)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right)$$

$H_0(\xi) = 1$
$H_1(\xi) = 2\xi$
$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$
$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

quindi nel nostro caso l'equazione in 3 variabili è risolta da

$$\boxed{\psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{2}\, u^{(x)}_{n_x} u^{(y)}_{n_y} u^{(z)}_{n_z}}, \quad E = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

Il fattore $\sqrt{2}$ serve a normalizzare a 1 la $|\psi|^2$, infatti:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, |\psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z)|^2 = \int_0^{+\infty} dx\, 2|u_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, |u_{n_y}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, |u_{n_z}|^2$$

$$= \left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot[1]\,[1] = 1.$$

Condizioni al bordo:

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x=0, y, z) \overset{deve}{=} 0$$

$$\Rightarrow u_{n_x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{n_x \text{ DISPARI}}$$, cioè nella variabile x devo tenere solo i polinomi di Hermite dispari

Quindi:

$$|E\rangle = |n_x, n_y, n_z\rangle \quad , \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$$

n_x DISPARI !

$$E = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

<u>NB</u> Prima di procedere, passiamo all'uso di grandezze adimensionali: se fossimo in una dimensione, si può porre

$$\xi = \frac{x}{\ell} \qquad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$ (unica lunghezza che posso costruire con i parametri presenti in $\hat{H}$)

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\ell^2}\frac{d^2}{d\xi^2}$$

Quindi posso riscrivere l'eq. di S. nel seguente modo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\ell^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\psi + \frac{m\omega^2}{2}\ell^2\xi^2\psi = E\psi$$

Moltiplicando per $\frac{m\ell^2}{\hbar^2}$ otteniamo

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\psi + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\ell^2\frac{\xi^2}{2}\psi = E\left(\frac{m\ell^2}{\hbar^2}\right)\psi$$

↓ uso la definizione di ℓ

$$\boxed{-\frac{1}{2}\psi'' + \frac{\xi^2}{2}\psi = \left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)\psi} \quad (*)$$

Questa è l'equaz. di Hermite $\Rightarrow -\frac{1}{2}\psi'' + \frac{\xi^2}{2}\psi = \lambda\psi \quad , \quad \lambda = \left(n+\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow n + \frac{1}{2} = \frac{E}{\hbar\omega} \quad \Rightarrow \quad E = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Adesso l'equaz. (*) è adimensionale.

Quindi il problema in 3 dimensioni diventa adimensionale se faccio le sostituzioni

$$\frac{x}{\ell} \to x$$
$$\frac{y}{\ell} \to y$$ ← adesso sono ADIMENSIONALI.
$$\frac{z}{\ell} \to z$$

Questo equivale formalmente a porre $\frac{m\omega}{\hbar}=1$, cioè $\ell=1$.

Quindi, con la scelta $\frac{m\omega}{\hbar}=1$ si ha, per il caso 1-d:

$$u_n(x) = N_n H_n(x)\, e^{-x^2/2} \qquad , \quad N_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(\pi)^{-1/4}$$

$$\epsilon_n = n+\tfrac{1}{2} \qquad , \quad E_n = \epsilon_n \hbar\omega$$

e per il problema in questione si ha:

$$\Psi_{n_x n_y n_z} = \sqrt{2}\, u_{n_x}(x)\, u_{n_y}(y)\, u_{n_z}(z) \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}, \quad n_x \text{ DISPARI}$$

$$\rightarrow |E\rangle = |n_x n_y n_z\rangle$$

2) ~~[illegible]~~
Verifichiamo che una misura simultanea di $\hat{H}$ e $\hat{L}_x$ sia possibile; devo verificare che commutano.
Fisicamente devono commutare perché il problema ha simmetria cilindrica per rotazioni attorno all'asse x, quindi H e L_x devono commutare.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

$$\hat{L}_x = yp_z - zp_y$$

$[\hat{H}, \hat{L}_x]$ contiene $[p_x^2+p_y^2+p_z^2, yp_z - zp_y]$ e $[x^2+y^2+z^2, yp_z - zp_y]$

che sono separatamente nulli. Ad es. per il primo:

$$[\vec{p}^{\,2}, yp_z - zp_y] = [p_y^2, yp_z - zp_y] + [p_z^2, yp_z - zp_y] =$$
$$= [p_y^2, y]p_z - [p_z^2, z]p_y = -2i\hbar p_y p_z + 2i\hbar p_z p_y = 0$$

Il 2° è analogo.

Quindi H e L_x ammettono una base comune di autostati

Sappiamo che $E = \frac{9}{2}\hbar\omega \Rightarrow n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow n_x + n_y + n_z = 3$

Combinazioni possibili (n_x DISPARI)

n_x	n_y	n_z	
1	2	0	$\Psi_{120} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{8}}[2x(4y^2-2)]e^{-r^2/2}(\pi)^{-3/4}\sqrt{2} = NF(r)\,\frac{1}{4}\left[\frac{2x(4y^2-2)}{r^3}\right]$
1	1	1	$\Psi_{111} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}[2x\,2y\,2z]e^{-r^2/2}(\pi)^{-3/4}\sqrt{2} = NF(r)\,\sqrt{8}\,\frac{xyz}{r^3}$
1	0	2	$\Psi_{102} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{8}}[2x(4z^2-2)]e^{-r^2/2}(\pi)^{-3/4}\sqrt{2} = NF(r)\,\frac{1}{4}\left[\frac{2x(4z^2-2)}{r^3}\right]$
3	0	0	$\Psi_{300} = \frac{1}{\sqrt{48}}[8x^3-12x]\,e^{-r^2/2}(\pi)^{-3/4}\sqrt{2} = NF(r)\,\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{8x^3-12x}{r^3}\right]$

con $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $N=\sqrt{2}(\pi)^{-3/4}$, $F(r)=r^3 e^{-r^2/2}$

Adesso devo cercare quale comb. lineare di queste 4 autofunzioni è t.c. $L_x = 2\hbar$, cioè $m_x = 2$.

Conosciamo le armoniche sferiche (come polinomi in x, y, z) nella base in cui è diagonale L_z.

Quindi per cercare $m_x = 2$, facciamo il seguente cambio di variabili:

$$(x, y, z) \longmapsto (\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{y})$$

$$m_x = 2 \longmapsto m_{\tilde{z}} = 2$$

⇐ DEVO MANTENERE LA TERNA DESTRORSA PER PRESERVARE LE REGOLE DI COMMUTAZ. DEL MOMENTO ANGOLARE !!!

Quindi:

$$\psi_{120} \longrightarrow \tilde{\psi}_{120} = NF(r)\ \frac{1}{4}\ \frac{2\tilde{z}(4\tilde{x}^2-2)}{r^3}$$

$$\psi_{111} \longrightarrow \tilde{\psi}_{111} = NF(r)\ \sqrt{8}\ \frac{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}{r^3}$$

$$\psi_{102} \longrightarrow \tilde{\psi}_{102} = NF(r)\ \frac{1}{4}\ \frac{2\tilde{z}(4\tilde{y}^2-2)}{r^3}$$

$$\psi_{300} \longrightarrow \tilde{\psi}_{300} = NF(r)\ \frac{1}{4\sqrt{3}}\ \frac{8\tilde{z}^3-12\tilde{z}}{r^3}$$

$$\boxed{\tilde{\psi} = a_{120}\tilde{\psi}_{120} + a_{111}\tilde{\psi}_{111} + a_{102}\tilde{\psi}_{102} + a_{300}\tilde{\psi}_{300}}$$

è lo stato + generico con $E = \frac{9}{2}\hbar\omega$. Cerco i coefficienti $a\_$ t.c. $m_{\tilde{z}} = 2$.

- $\tilde{\psi}$ ha polinomi di grado ≤ 3 ⇒ guardo solo $\tilde{Y}_{\ell m}$ con $\ell \leq 3$
- Tra tutte le $\tilde{Y}_{\ell m}$ con $\ell \leq 3$, il polinomio $\tilde{z}^3$ compare

  solo in $\tilde{Y}_{30}$, che ha $m_{\tilde{z}} = 0 \neq 2$ ⇒ $\boxed{a_{300} = 0}$

Quindi abbiamo

$$\boxed{\tilde{\psi} = a_{120}\tilde{\psi}_{120} + a_{111}\tilde{\psi}_{111} + a_{102}\tilde{\psi}_{102}}$$

- $\tilde{\psi}_{102}$ e $\tilde{\psi}_{120}$ contengono il polinomio $-4\tilde{z}$, con lo stesso coefficiente. Il polinomio $\frac{\tilde{z}}{r}$ ha sviluppo solo su $\tilde{Y}_{10}$, cioè $m_{\tilde{z}} \neq 2$ ↓

↳ Quindi in $\tilde{\Psi}$ non deve comparire $-4\tilde{z}$ $\Rightarrow \boxed{a_{102} = -a_{120}}$

Quindi ora abbiamo

$$\boxed{\tilde{\Psi} = a_{120}(\tilde{\Psi}_{120} - \tilde{\Psi}_{102}) + a_{111}\tilde{\Psi}_{111}}$$

ovvero:

$$\tilde{\Psi} = NF(r)\left[2a_{120}\frac{\tilde{z}\tilde{x}^2 - \tilde{z}\tilde{y}^2}{r^3} + a_{111}\sqrt{8}\frac{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}{r^3}\right] =$$

→ NOTE DI CLEARLI

$$= NF(r)\left[2a_{120}\left(\frac{2}{105}\sqrt{210\pi}\,|\tilde{3},-\tilde{2}\rangle + \frac{2}{105}\sqrt{210\pi}\,|\tilde{3},\tilde{2}\rangle\right) + \right.$$

$$\left. + a_{111}\sqrt{8}\left(\frac{i}{105}\sqrt{210\pi}\,|\tilde{3},-\tilde{2}\rangle - \frac{i}{105}\sqrt{210\pi}\,|\tilde{3},\tilde{2}\rangle\right)\right]$$

dove $L_{\tilde{z}}|\tilde{\ell},\tilde{m}\rangle = \tilde{m}\hbar|\tilde{\ell},\tilde{m}\rangle$.

Quindi per avere $m_{\tilde{z}} = 2$ devo annullare il coeff. di $|\tilde{3},-\tilde{2}\rangle$, cioè

$$\frac{\sqrt{210\pi}}{105}(4a_{120} + i\sqrt{8}\,a_{111}) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{a_{111} = i\sqrt{2}\,a_{120}} \quad (*)$$

La condizione (*) va completata con la normaliz. della $\tilde{\Psi}$:

$$\tilde{\Psi} = a_{120}(\tilde{\Psi}_{120} - \tilde{\Psi}_{102}) + a_{111}\tilde{\Psi}_{111} \quad \Rightarrow \boxed{2|a_{120}|^2 + |a_{111}|^2 = 1} \quad (**)$$

$$\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases} \begin{cases} a_{111} = i\sqrt{2}\,a_{120} \\ 2|a_{120}|^2 + 2|a_{120}|^2 = 1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} a_{111} = i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_{120} = \frac{1}{2} \end{matrix}}$$

(a parte un eventuale fattore di fase overall ininfluente)

Quindi alla fine abbiamo:

$$\boxed{\tilde{\Psi} = NF(r)\left[\left(\frac{\tilde{x}^2\tilde{z} - \tilde{z}\tilde{y}^2}{r^3}\right) + i2\frac{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}{r^3}\right]} \quad (***)$$

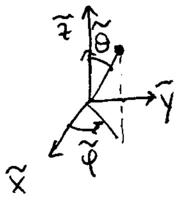
NB Qualche commento:

① $$|\tilde{\Psi}\rangle = NF(r)\left[\frac{2}{105}\sqrt{210\pi}\,|\tilde{3},\tilde{2}\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{8}\left(\frac{-i}{105}\sqrt{210\pi}\,|\tilde{3},\tilde{2}\rangle\right)\right] =$$

$$= NF(r)\frac{4}{105}\sqrt{210\pi}\,|\tilde{3},\tilde{2}\rangle$$

② Nello spazio cartesiano la normalizzazione a 1 di $|\tilde{\Psi}|^2$ è ovvia. Verifichiamola nelle coordinate $(r,\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$:

$$\langle\tilde{\Psi}|\tilde{\Psi}\rangle = \frac{N^2\cdot 16\cdot(210\pi)}{(105)^2}\langle\tilde{3}\tilde{2}|\tilde{3}\tilde{2}\rangle\Big|_{\tilde{z}>0}\int_0^{+\infty} dr\, r^2\, F(r)^2$$



dove $\boxed{N^2 = 2\pi^{-3/2}}$

$\boxed{\langle \tilde{3}\tilde{2}|\tilde{3}\tilde{2}\rangle\Big|_{\tilde{z}\geq 0} = \frac{1}{2}}$ (sarebbe 1 ma devo integrare su metà dominio, cioè $0<\cos\tilde{\theta}<1$, e la funzione è pari)

$$\int_0^{+\infty} dr\, r^2\, F(r)^2 = \int_0^{+\infty} r^8 e^{-r^2} dr = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \frac{d(r^2)}{2r} (r^2)^4 = \quad \Rightarrow r^2 = t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{7/2}\, dt$$

Qui compare una funzione importante, la Γ di Eulero:

$$\Gamma(x) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} dt\; e^{-t}\; t^{x-1}$$

Alcune proprietà:

(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ [integrazione per parti]

(ii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ $\left[\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} dt\; t^{-1/2} e^{-t} \overset{x=\sqrt{t}}{=} \int_0^{\infty} 2x\,dx\, \frac{1}{x} e^{-x^2} = \int_0^{+\infty} dx\; 2e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\right]$

Quindi: $\boxed{\int_0^{+\infty} dr\; r^2 F(r)^2 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) \overset{(i)}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})\right] \overset{(ii)}{=} \frac{105}{32}\sqrt{\pi}}$

Quindi:

$$\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = 2\cdot\pi^{-3/2}\; \frac{16\cdot 210\cdot\pi}{(105)\cdot(105)} \cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{105}{32}\sqrt{\pi} = 1$$

Dopo questi commenti, torniamo al problema: dalla ~~(***)~~ ritorniamo alla ψ nello spazio originale (x,y,z), cioè $(\tilde{z},\tilde{x},\tilde{y}) \to (x,y,z)$

$$\psi(x,y,z) = NF(r)\left[\frac{xy^2 - xz^2}{r^3} + 2i\,\frac{xyz}{r^3}\right]$$

Per trovare la probabilità per $\hat{L}_z$, devo decomporre ψ sugli autostati di $\hat{L}_z$:

$\downarrow$ uso le tabelle di Clebsch, per i polinomi xy^2, xz^2, xyz :

$$\Psi = NF(r)\Bigg[\Bigg(\cancel{\frac{\sqrt{6\pi}}{15}|1,-1\rangle} - \cancel{\frac{\sqrt{6\pi}}{15}|1,1\rangle} - \frac{\sqrt{35\pi}}{35}|3,-3\rangle - \frac{\sqrt{21\pi}}{105}|3,-1\rangle +$$

$$+\frac{\sqrt{21\pi}}{105}|3,1\rangle + \frac{\sqrt{35\pi}}{35}|3,3\rangle\Bigg) +$$

$$-\Bigg(\cancel{\frac{\sqrt{6\pi}}{15}|1,-1\rangle} - \cancel{\frac{\sqrt{6\pi}}{15}|1,1\rangle} + \frac{4\sqrt{21\pi}}{105}|3,-1\rangle - \frac{4\sqrt{21\pi}}{105}|3,1\rangle\Bigg) +$$

$$+2i\Bigg(\frac{i\sqrt{210\pi}}{105}|3,-2\rangle - \frac{i\sqrt{210\pi}}{105}|3,2\rangle\Bigg)\Bigg] =$$

$$= NF(r)\Bigg[\frac{\sqrt{35\pi}}{35}\big(|3,3\rangle - |3,-3\rangle\big) + \frac{2\sqrt{210\pi}}{105}\big(|3,2\rangle - |3,-2\rangle\big) + \frac{5\sqrt{21\pi}}{105}\big(|3,1\rangle - |3,-1\rangle\big)\Bigg]$$

$$\text{Prob}(L_z = +3\hbar) = \text{Prob}(L_z = -3\hbar) = \left[N^2\int dr\, r^2 F(r)^2\right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{35\pi}}{35}\right)^2$$

↖ normalizz. armoniche sferiche

$$= \left[\frac{105}{16\pi}\right] \cdot \frac{\pi}{70} = \frac{3}{32}$$

Ma posso anche evitare di usare $N^2\int dr\, r^2 F(r)^2$; infatti:

$$\text{Prob}(L_z = +3\hbar) = \text{Prob}(L_z = -3\hbar) = \frac{|c_{33}|^2}{|c_{33}|^2 + |c_{3-3}|^2 + |c_{32}|^2 + |c_{3-2}|^2 + |c_{31}|^2 + |c_{3-1}|^2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{35\pi}/35\right)^2}{2\left[\left(\frac{\sqrt{35\pi}}{35}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{210\pi}}{105}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{21\pi}}{105}\right)^2\right]} = \frac{(\pi/35)}{2\left[\frac{\pi}{35} + \frac{8\pi}{105} + \frac{\pi}{21}\right]} = \frac{(\pi/35)}{\left(\frac{32\pi}{105}\right)} = \frac{3}{32}$$

$$\text{Prob}(L_z = 2\hbar) = \text{Prob}(L_z = -2\hbar) = \frac{|c_{32}|^2}{\sum |c_{\ell m}|^2} = \frac{(8\pi/105)}{\left(\frac{32\pi}{105}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Prob}(L_z = \hbar) = \text{Prob}(L_z = -\hbar) = \frac{|c_{31}|^2}{\sum |c_{\ell m}|^2} = \frac{(\pi/21)}{\left(\frac{32\pi}{105}\right)} = \frac{5}{32}$$

Verifica: $\sum \text{Prob} = 1$, infatti: $2\cdot\left(\frac{3}{32}\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + 2\cdot\left(\frac{5}{32}\right) = 1$

Particella di massa m in 3 dimensioni, con potenziale armonico $V(\vec{x}) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$

1) costanti del moto
2) Una misura contemporanea di p_z ed E dà i risultati

$$p_z = \bar{p}_z$$
$$E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$$

a) Scrivere il + generico stato compatibile con la misura
b) Quanto è degenere l'energia $E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$?
c) Quali valori di L_z posso osservare ?

1) Le costanti del moto sono gli operatori commutanti con $\hat{H}$:

$[\hat{H},\hat{H}]=0$ [conservazione dell'energia]

$[\hat{H},\hat{p}_z]=0$ [H invariante per traslazioni lungo l'asse z]

$[\hat{H},\hat{L}_z]=0$ [H invariante per rotazioni attorno all'asse z]

dim $\hat{L}_z = xp_y - yp_x$

$$[p_x^2+p_y^2, xp_y-yp_x] = [p_x^2,x]p_y - [p_y^2,y]p_x =$$
$$= -2i\hbar p_xp_y + 2i\hbar p_yp_x = 0 \quad ([p_x,p_y]=0)$$
$$[x^2+y^2, xp_y-yp_x] = \ \cdots \ = 0$$

$[\hat{H},\hat{H}_{xy}]=0$ dove $H_{xy} = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$

dim $H = H_{xy} + \frac{p_z^2}{2m}$ e ovviamente $[H_{xy},H_{xy}]=0$
$[p_z^2, H_{xy}]=0$

Quindi sono costanti del moto $\{\hat{H},\hat{p}_z,\hat{L}_z,\hat{H}_{xy}\}$.

2) $[\hat{H},\hat{p}_z]=0$, quindi posso essere in un autostato simultaneo di H e p_z. Parto dal punto b)

b) Se $E=3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$, lo stato generico compatibile è t.c. $\begin{cases} n_x+n_y=2 \\ p_z = \pm\bar{p}_z \end{cases}$

Quindi

m_x	m_y
2	0
1	1
0	2

$\rightarrow$ 3 possibilità

$$p_z = \pm \bar{p}_z \rightarrow 2 \text{ possibilità}$$

$\Rightarrow$ se $E = 3\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$, la ~~[illegible]~~ degenerazione è 6 e lo stato + compatibile sarebbe

$$|\psi\rangle = |\bar{p}_z\rangle \otimes \left[a_{20}|2,0\rangle + a_{11}|1,1\rangle + a_{02}|0,2\rangle\right] + |-\bar{p}_z\rangle \otimes \left[b_{20}|2,0\rangle + b_{11}|1,1\rangle + b_{02}|0,2\rangle\right]$$

con $\hat{p}_z|\bar{p}_z\rangle = \bar{p}_z|\bar{p}_z\rangle$

$$\hat{H}_{xy}|m_x,m_y\rangle = (m_x+m_y+1)\hbar\omega\,|m_x,m_y\rangle$$

$$\hat{H}\,|\bar{p}_z,m_x,m_y\rangle = (m_x+m_y+1)\hbar\omega + \frac{\bar{p}_z^2}{2m}$$

a) Se misuro anche $p_z = \bar{p}_z$, la degenerazione è diminuita $(6\rightarrow 3)$ e lo stato + generico compatibile rimane

$$|\psi\rangle = |\bar{p}_z\rangle \otimes \left[a_{20}|2,0\rangle + a_{11}|1,1\rangle + a_{02}|0,2\rangle\right]$$

Se lo voglio esprimere come funzione d'onda nello spazio delle coordinate (x,y,z), si ha:

$$\psi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\psi\rangle = \langle z|\bar{p}_z\rangle\cdot\left(a_{20}\langle x,y|2,0\rangle + a_{11}\langle x,y|1,1\rangle + a_{02}\langle x,y|0,2\rangle\right) =$$

$$= \frac{e^{i\bar{p}_z z/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left[a_{20}\,\psi_{20}(x,y) + a_{11}\,\psi_{11}(x,y) + a_{02}\,\psi_{02}(x,y)\right]$$

prodotto autofunz. di oscillatore armonico in x e y.

c) Per stabilire i valori osservabili di $\hat{L}_z$, è rilevante solo la parte di funzione d'onda che dipende da x e y (infatti $\hat{L}_z f(z) g(x,y) = f(z)\,\hat{L}_z\, g(x,y)$)

Autostati di $\hat{L}_z$: $\langle\varphi|m\rangle = \Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$ $\quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots$ $\quad L_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$

Guardo quali autostati di L_z compaiono in Ψ; guardo solo le variabili (x,y):

$$\Rightarrow a_{20}\boxed{\Psi_{20}(x,y)} + a_{11}\boxed{\Psi_{11}(x,y)} + a_{02}\boxed{\Psi_{02}(x,y)}$$

polinomi presenti

$\Psi_{20}(x,y) \propto 4x^2-2$ $\quad \begin{cases} x^2 \propto \cos^2\varphi \propto \left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)^2 = e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}+2 & \Rightarrow m=0,\pm 2 \\ 1 & \Rightarrow m=0 \end{cases}$

$\Psi_{11}(x,y) \propto xy$ $\quad xy \propto \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \propto \operatorname{sen}2\varphi \propto e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi}$ $\quad \Rightarrow m=\pm 2$

$\Psi_{02}(x,y) \propto 4y^2-2$ $\quad \begin{cases} y^2 \propto \operatorname{sen}^2\varphi \propto \left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)^2 = e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}-2 & \Rightarrow m=0,\pm 2 \\ 1 & \Rightarrow m=0 \end{cases}$

Quindi i valori possibili di $\hat{L}_z$ sono $L_z=\{0, \pm 2\hbar\}$