L7: Campo elettromagnetico

ESERCIZI SVOLTI : ES. II
ES. III

ESERCIZIO [redacted] DA GUARDARE : ES. I [redacted]

PER ALTRI ESERCIZI, vd. sito

ES. I [es. 5]

"Spettro livelli di Landau" [particella carica in campo magnetico uniforme]

1) Calcolare i commutatori $[v^i, v^j]$ di $\vec{v}$ per particella in campo $\vec{B}$ uniforme

2) Usando il risultato, riscrivere H in termini di $\vec{v}$ e trovarne lo spettro

1) Accopp. minimale: $\vec{p} \to \vec{\pi} = \vec{p} - q\vec{A}(\vec{x})$ nella Hamiltoniana

quindi: $m v_i = p_i - qA_i \Rightarrow v_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$

$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2}[p_i - qA_i, p_j - qA_j]$

Prima facciamo un caso esplicitando due valori x gli indici, poi caso generico:

$$[v_x, v_y] = \frac{1}{m^2}[p_x - qA_x, p_y - qA_y] = \frac{1}{m^2}\left\{[p_x, p_y] + q^2[A_x, A_y] - q[A_x, p_y] - q[p_x, A_y]\right\}$$

A_x e A_y dipendono da $\vec{x}$

$$= \frac{1}{m^2}\left\{0 + 0 - q\left([A_x, p_y] + [p_x, A_y]\right)\right\} =$$

$[\vec{p}, f(\vec{x})] = -i\hbar\vec{\nabla}$

$$= -\frac{q}{m^2}(-i\hbar)\left(-\partial_y A_x + \partial_x A_y\right) =$$

$$= \frac{i\hbar q}{m^2}\left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right) = \frac{i\hbar}{m^2} q B_z$$

Caso generale:

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2}\left\{-q\left([A_i, p_j] + [p_i, A_j]\right)\right\} =$$

$$= -\frac{q}{m^2}\left(-i\hbar\,\partial_i A_j + i\hbar\,\partial_j A_i\right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{m^2} q\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) = \frac{i\hbar}{m^2}\,\varepsilon_{ijk} B_k$$

2) Adesso scelgo $\vec{B} = B\vec{e}_z \Rightarrow [v_x, v_y] = \frac{i\hbar}{m^2} qB \qquad [v_x, v_z] = 0 = [v_y, v_z]$

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} = \frac{(m\vec{v})^2}{2m} = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

ma non tutto commuta!

Poiché $B_x, B_y = 0$ e ho solo $B_z \neq 0$ $(B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x)$ $\Rightarrow \boxed{A_z = 0} \Rightarrow p_z = m v_z$

Quindi H rimane

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$

Possiamo definire gli operatori

$$\begin{cases} q = \dfrac{m v_x}{qB} \\ p = m v_y \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow [q,p] = \frac{m^2}{qB}[v_x, v_y] = \frac{m^2}{qB}\frac{i\hbar}{m^2}qB = i\hbar$$

cioè q e p soddisfano le usuali regole di commutazione canoniche.

Invertendo (*) trovo v_x e v_y in funzione di q e p:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{qB}{m} q \\ v_y = \dfrac{1}{m} p \end{cases}$$

cioè:

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m}{2}\left[\left(\frac{qB}{m}\right)^2 q^2 + \frac{1}{m^2} p^2\right] =$$

$$= \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_c^2 q^2 \qquad \text{con } \omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

Adesso ho

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + H_{qp}, \quad \text{con } \left[H_{qp}, \frac{p_z^2}{2m}\right] = 0$$

$$H_{qp} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_c^2 q^2 \qquad [q,p] = i\hbar$$

$$[q, p_z] = [p, p_z] = 0$$

cioè H è somma di 2 parti che commutano tra loro: una è hamiltoniana di particella libera nella dimensione z, l'altra è un'hamiltoniana di un oscillatore armonico (nelle nuove variabili q, p).

$$\Rightarrow E = \frac{p_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \qquad \omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

ES. II [es. 1]

Particella di massa m e carica q, in 3 dimensioni, si muove in $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$

1) spettro energia

2) calcolare $\langle \vec{V} \rangle$ in uno stato $|\psi\rangle$ t.c. $\langle \psi | \vec{p} | \psi \rangle = \langle \vec{p} \rangle = 0$

1) Sappiamo che $H = \dfrac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\varphi$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \Rightarrow \boxed{\varphi = -E_0 x}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \Rightarrow B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$

. Scelta del gauge + semplice è in questo caso $\boxed{A_z = 0, A_x = 0, A_y = B_0 x}$

Quindi:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - qB_0 x)^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - qE_0 x$$

Osservazione: H non dipende da y né da z $\Rightarrow$ $[H, p_y] = 0$, $[H, p_z] = 0$

Cioè p_y e p_z sono conservati. Quindi posso pensare direttamente, da qui in poi, che p_y e p_z non siano più operatori, ma siano già l'autovalore di $\hat{p}_y$ e $\hat{p}_z$ assunto dall'autostato di H.

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{qB_0}{m} p_y x + \frac{1}{2m}(qB_0)^2 x^2 - qE_0 x =$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m}(qB_0)^2 \left[x - \frac{m}{(qB_0)^2} q\left(E_0 + \frac{B_0 p_y}{m}\right)\right]^2 - \frac{1}{2m}(qB_0)^2 \frac{(mq)^2}{(qB_0)^4}\left(E_0 + \frac{B_0 p_y}{m}\right)^2$$

Se definisco $x_0 = \dfrac{mq}{(qB_0)^2}\left(E_0 + \dfrac{B_0 p_y}{m}\right)$, ottengo:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \cancel{\frac{p_y^2}{2m}} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 (x - x_0)^2 - \frac{m}{2B_0^2}\left[E_0^2 + \cancel{\left(\frac{B_0}{m}\right)^2 p_y^2} + \frac{2E_0 B_0}{m} p_y\right]$$

cioè, con il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ p_{x'} = p_x \end{cases} \qquad \left(\text{infatti } -i\hbar \partial_{x'} = -i\hbar \partial_x \right)$$

che è t.c. $[x', p_{x'}]$ sono canonica variabili che soddisfano la regola di comm. canonica

Si arriva a:

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_{x'}^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x'^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{E_0}{B_0}\right)^2 - p_y\left(\frac{E_0}{B_0}\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{p_z^2}{2m} - p_y\left(\frac{E_0}{B_0}\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{E_0}{B_0}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$\omega = \frac{|q|B_0}{m}$$

2) Se $\langle \vec{p} \rangle = 0$, poichè $[H, p_y] = [H, p_z] = 0$, allora sicuramente $p_y \equiv 0$, $p_z \equiv 0$ (sono identicamente nulli, non solo come valori d'aspettazione)

Invece $[H, p_x] \neq 0 \Rightarrow \langle p_x \rangle = 0$ ma non posso dire che $p_x \equiv 0$

Devo calcolare $\vec{v}$:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{m}\langle \vec{p} - q\vec{A} \rangle = \frac{-q}{m}\langle \vec{A} \rangle \qquad \rangle\ \vec{A} = B_0 x\, \vec{e}_y \text{ è il gauge che ho scelto}$$

$$= -\frac{q}{m} B_0 \vec{e}_y \langle x \rangle = -\frac{qB_0}{m}\vec{e}_y \langle x' + x_0 \rangle$$

Osserviamo che $\langle p_x \rangle = 0 \Rightarrow \langle p_{x'} \rangle = 0$ ma sappiamo che per un oscillatore armonico, se abbiamo $\langle p_{x'} \rangle = 0$, allora si ha $n = 0 \Rightarrow \langle x' \rangle = 0$

Quindi:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{qB_0}{m}\vec{e}_y \langle x_0 \rangle = -\frac{qB_0}{m}\vec{e}_y \frac{m}{B_0^2 q}\left\langle E_0 + \frac{B_0 p_y}{m} \right\rangle = \qquad \rangle\ p_y \equiv 0 \text{ per hp.}$$

$$= -\frac{E_0}{B_0}\vec{e}_y$$

ES. III [es. 4]

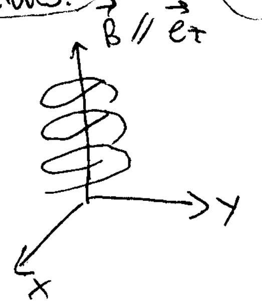
"Spettro e livelli di Landau in gauge simmetrico"

$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$

$B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ $\Rightarrow$ gauge "simmetrico" significa prendere $A_y = \frac{B_0 x}{2}$, $A_x = -\frac{B_0 y}{2}$, $A_x = 0$

Classicamente le costanti del moto sarebbero $\{H, p_z, L_z\}$. Con questa scelta di gauge, vedremo che anche in MQ avremo $[H, L_z] = 0$, che non sarebbe evidente mettendosi in un gauge non simmetrico. → Faremo anche vedere, quindi, che gli autostati di H sono anche autostati di L_z e ne vedremo anche gli autovalori

Il moto classico è



con $\omega = \text{cost}$, $V_z = \text{cost}$

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{\left(p_x + \frac{qB_0 y}{2}\right)^2}{2m} + \frac{\left(p_y - qB_0\frac{x}{2}\right)^2}{2m} =$$

$$= \frac{p_z^2}{2m} + \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{qB_0}{2}\right)^2 y^2 + \frac{1}{2m} qB_0 p_x y\right] + \left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{qB_0}{2}\right)^2 x^2 - \frac{1}{2m} qB_0 p_y x\right] =$$

$$= \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{q^2 B_0^2}{8m}(x^2 + y^2) + \frac{qB_0}{2m}(p_x y - p_y x)$$

$$= \frac{p_z^2}{2m} + \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2\right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 y^2\right) + \frac{qB_0}{2m} L_z$$

con $\omega = \frac{qB_0}{2m}$

Notiamo che $[H, p_z] = 0$ ma anche $[H, L_z] = 0$

dim: $[L_z, H]$ contiene $[L_z, x^2 + y^2]$ e $[L_z, p_x^2 + p_y^2]$. Sono entrambi nulli, infatti, ad esempio per il primo si ha:

$$[xp_y - yp_x, x^2 + y^2] = [-yp_x, x^2] + [xp_y, y^2] = -y[p_x, x^2] + x[p_y, y^2]$$
$$= -y(-2i\hbar x) + x(-2i\hbar y) = 0$$

Diagonalizziamo la parte che corrisponde ai 2 oscillatori armonici:

$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha x + i\frac{p_x}{\hbar\alpha}\right]$ $\qquad a_y = \cdots \qquad , \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

$N_x = a_x^+ a_x \quad , \quad N_y = a_y^+ a_y$

$$\Rightarrow H = \frac{p_z^2}{2m} + (N_x + N_y + 1)\hbar\omega + \omega L_z$$

Da questa espressione, NON È ANCORA EVIDENTE che lo spettro sia

$$E = \frac{p_z^2}{2m} + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \quad , \quad \omega_c = \frac{qB_0}{m}$$

Per ricavarlo, esprimo L_z in funzione di a_x, a_y, a_x^+, a_y^+:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a_x + a_x^+) & p_x = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a_x^+ - a_x) \\ y = \text{———} & p_y = \text{———} \end{cases}$$

$$L_z = xp_y - yp_x = i\frac{\hbar}{2}\left[(a_x+a_x^+)(a_y^+ - a_y) - (a_y + a_y^+)(a_x^+ - a_x)\right] = \quad [a_x, a_y] = 0$$

$$= i\hbar\,(a_x a_y^+ - a_x^+ a_y)$$

$$\Rightarrow H = \frac{p_z^2}{2m} + (a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1)\hbar\omega + i\hbar\omega(a_x a_y^+ - a_x^+ a_y)$$

Definiamo
$$\begin{cases} a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - i a_y) \\ a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + i a_y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [a_+, a_+^+] = [a_-, a_-^+] = 1$$
$$[a_+, a_-] = 0$$

cioè: → stesse regole di commutazione degli operatori a e a^+ per oscillatore armonico

⇒ Quindi N_+ e N_-, op. [illegible] hanno ancora il significato di op. che contano i quanti.

$N_+ = a_+^+ a_+ \quad N_- = a_-^+ a_-$

Adesso usando
$$\begin{cases} a_x = \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}} \\ a_y = \frac{-a_+ + a_-}{i\sqrt{2}} \end{cases}$$

↓

otteniamo:

$$a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y = \left(\frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a_-^\dagger - a_+^\dagger}{-i\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{a_+^\dagger + a_-^\dagger}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a_- - a_+}{i\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\left[(a_+ + a_-)(a_-^\dagger - a_+^\dagger) + (a_+^\dagger + a_-^\dagger)(a_- - a_+)\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\left[\cancel{a_+ a_-^\dagger} + \underline{\underline{a_- a_-^\dagger}} - \underline{a_+ a_+^\dagger} - \cancel{a_- a_+^\dagger} + \cancel{a_+^\dagger a_-} + \underline{\underline{a_-^\dagger a_-}} - \underline{a_+^\dagger a_+} - \cancel{a_-^\dagger a_+}\right]$$

$$= \frac{i}{2}\left[(a_-^\dagger a_- + 1) + (a_-^\dagger a_-) - a_+^\dagger a_+ - (a_+^\dagger a_+ + 1)\right] =$$

$$= i\left[N_- - N_+\right] \qquad \Rightarrow \boxed{L_z = \hbar(N_+ - N_-)}$$

e vale anche che

$$a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y = \text{———} = N_+ + N_-$$

Quindi

$$\boxed{H = \frac{p_z^2}{2m} + (N_+ + N_- + 1)\hbar\omega + i\hbar\omega\left[i(N_- - N_+)\right]} =$$

$$= \frac{p_z^2}{2m} + (N_+ + N_- + 1)\hbar\omega + \hbar\omega(N_+ - N_-) =$$

$$= \frac{p_z^2}{2m} + (2N_+ + 1)\hbar\omega =$$

$$= \boxed{\frac{p_z^2}{2m} + \left(N_+ + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c} \qquad \omega_c = 2\omega = \frac{qB_0}{m}$$

Osservazioni

(1) Abbiamo ritrovato il risultato noto per lo spettro di H (livelli di Landau)

(2) Abbiamo visto che $[H, L_z] = 0 \rightarrow$ autostati simultanei

(3) Usando N_+ e N_-, abbiamo diagonalizzato simultaneamente H e L_z

(4) L'autostato generico si può quindi esprimere così:

$$|\psi\rangle = |p_z, m_+, m_-\rangle \qquad p_z \in \mathbb{R}, \quad m_+ = 0, 1, \dots \quad m_- = 0, 1, \dots$$

$$H|p_z, m_+, m_-\rangle = \frac{p_z^2}{2m} + \left(m_+ + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

$$L_z|p_z, m_+, m_-\rangle = (m_+ - m_-)\hbar$$

$\Rightarrow$ Spettro E ha degenerazione ∞, rimossa se viene dato L_z.

(5) Relazione tra (n_+, n_-) :
e degenerazione:
FISSATO n_+, ho ∞ valori di n_- per cui ho la stessa energia ma L_z diversi

(6) Poiché $L_z = (N_+ - N_-)\hbar$

$\Rightarrow$ $a_+^\dagger$ e $a_-^\dagger$ possono essere pensati come creatori di "quanti" di rotazione circolare