ES. XIV [es.24] W.S., es. 3021 (pag 200) (Singoletto-Tripletto)

Due particelle di spin $\frac{1}{2}$ sono descritte da

$$H = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

$\vec{S}_1$ spin particella 1
$\vec{S}_2$ " " 2

Trovare spettro di H e autostati dell'energia

Lo spazio di Hilbert è 4 dimensionale, infatti una base di $\mathcal{H}$ è ovviamente data da $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ con $|\ \rangle = |m_1, m_2\rangle$
$\left(|\pm\rangle = |\pm\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$\vec{S}_1^2$ e $\vec{S}_2^2$ sono diagonali poiché s_1 e s_2 sono 1/2.
Quindi, su qualunque stato $\in \mathcal{H}_{HILBERT}$,

$$\vec{S}_1^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)\hbar^2 = \tfrac{3}{4}\hbar^2$$
$$\vec{S}_2^2 = \ \dots\ = \tfrac{3}{4}\hbar^2$$

La base mostrata sopra non diagonalizza H, infatti ad esempio $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |++\rangle = ?$

$$H = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\, \frac{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2}{2} =$$

$$= A(S_{1z} + S_{2z}) + \frac{B}{2}(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - \frac{B}{2}\cdot 2 \cdot \frac{3}{4}\hbar^2$$

Quindi se definisco $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, (che implica anche $S_z = S_{1z} + S_{2z}$),

$$\boxed{H = A S_z + \frac{B}{2}\vec{S}^2 - \frac{3}{4}B\hbar^2}$$

come operatore, è un multiplo dell'identità.

→ DISCUSSIONE GENERALE: INIZIO ←

Quindi adesso diagonalizzare H significa trovare autostati simultanei di S_z e $\vec{S}^2$. È possibile, infatti $[\vec{S}^2, S_z] = 0$ (farlo x esercizio)

Si usa la tecnica generale della composizione dei momenti angolari:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \ \Rightarrow \ \begin{cases} j = |j_1 - j_2|,\ |j_1 - j_2| + 1,\ \dots,\ j_1 + j_2 \\ m = m_1 + m_2 \end{cases}$$

• Fissato j, $|m| \leq j$

NUMERI QUANTICI CHE POSSONO ESSERE ASSUNTI DA $\vec{J}$

In termini di ket, x il nostro caso: $\leftarrow \vec{J}$ È ANCORA MOM. ANGOLARE x $[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$

due spin $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $s_1 \ (=j_1) = \frac{1}{2}$, $s_2 \ (=j_2) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ prodotto tensoriale tra $\mathcal{H}_{s_1}$ e $\mathcal{H}_{s_2}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{s_1} \otimes \mathcal{H}_{s_2} = [s_1] \otimes [s_2]$$

$$|s_1; m_1\rangle = \begin{matrix} |\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\rangle_{(1)} \\ |\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{2}\rangle_{(1)} \end{matrix} \qquad |s_2; m_2\rangle = \begin{matrix} |\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\rangle_{(2)} \\ |\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{2}\rangle_{(2)} \end{matrix}$$

$|m_1, m_2\rangle$ è un modo 'veloce' per indicare

$$|\tfrac{1}{2}; m_1\rangle_{(1)} \otimes |\tfrac{1}{2}; m_2\rangle_{(2)}$$

$[s_1]$ indica $\mathcal{H}_{s_1} = \mathrm{Span}\left(|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle_{(1)}, |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_{(1)}\right)$ e idem per $[s_2]$

prodotto cartesiano

NB $$U \otimes V \overset{def.}{=} \mathrm{Span}\left(\{u_1, \dots, u_m\} \times \{v_1, \dots, v_m\}\right)$$

base $\{u_1, \dots, u_m\}$ base $\{v_1, \dots, v_m\}$

$\Rightarrow$ ovviamente, $\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$

$$[\tfrac{1}{2}]_{(1)} \otimes [\tfrac{1}{2}]_{(2)} = \mathrm{Span}\left(\{|+\rangle_{(1)}, |-\rangle_{(1)}\} \times \{|+\rangle_{(2)}, |-\rangle_{(2)}\}\right) =$$

$$= \mathrm{Span}\left(|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\right)$$

Dalla teoria generale, + formalmente:

$$\cancel{[\tfrac{1}{2}] \otimes [\tfrac{1}{2}] = [0] \oplus [1]}$$

$$\cancel{\{|m_1, m_2\rangle\}}$$

$$[j_1] \otimes [j_2] = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} [j]$$

$\{|j_1; m_1\rangle\}$ $\{|j_2; m_2\rangle\}$ $\{|j; m\rangle\}$

in generale, x 2 momenti angolari j_1 e j_2

$$[\tfrac{1}{2}] \otimes [\tfrac{1}{2}] = [0] \oplus [1]$$

x il nostro caso

$\lvert\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$	$\lvert\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$	$\lvert 0, 0\rangle$	$\lvert 1 1\rangle$
$\lvert\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$	$\lvert\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$		$\lvert 1 0\rangle$
			$\lvert 1 -1\rangle$

basi dei vari spazi vettoriali in gioco

NB Somma diretta ($\oplus$) perché, avendo j DIVERSI, SONO SPAZI

NB $U \oplus V$, se $U \cap V = \{\underline{0}\}$ (cioè sp. vett. disgiunti)

$$U \oplus V \stackrel{def}{=} \text{Span}\left(\{u_1 \dots u_m\} \cup \{v_1 \dots v_m\}\right)$$

$\Rightarrow$ evidentemente $\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$

In generale, vale anche che, definito $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \Rightarrow \{\vec{J}^2, J_z\}$

e si ha: $\vec{J}^2 |j;m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j,m\rangle$

$$J_z |j;m\rangle = m\hbar |j;m\rangle$$

cioè gli stati $|j,m\rangle$ sono <u>AUTOSTATI</u> <u>SIMULTANEI</u> DI $\vec{J}^2$ e J_z.

Quindi nel nostro caso: $\vec{J}_1 = \vec{S}_1$, $\vec{J}_2 = \vec{S}_2$, $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}$

$$\begin{cases} \vec{S}^2 |1;m\rangle = 1(1+1)\hbar^2 |1;m\rangle = 2\hbar^2 |1;m\rangle \\ \vec{S}^2 |0;0\rangle = 0 \\ S_z |1;m\rangle = m\hbar |1;m\rangle \\ S_z |0;0\rangle = 0 \end{cases}$$

Rimane da stabilire il legame tra $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}_{m_1,m_2}$ e $\{|00\rangle, \{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}\}_{j,m}$, essendo entrambe basi di $\mathcal{H}$.

Per farlo si usa il fatto che $\vec{J}$ è un mom. angolare, nel senso che $[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$. Quindi

$$J_\pm = J_x \pm i J_y = (J_{1x} + J_{2x}) \pm i(J_{1y} + J_{2y}) = J_{1\pm} + J_{2\pm} \quad \begin{pmatrix} J_+ = J_{1+} + J_{2+} \\ J_- = J_{1-} + J_{2-} \end{pmatrix}$$

e sappiamo come $J_\pm$ agisce su $|j,m\rangle$

come J_{1+} " " $|j_1,m_1\rangle$

come J_{2+} " " $|j_2,m_2\rangle$

(infatti ricordiamo che $J_\pm |j m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, |j, m\pm 1\rangle$)

Specializziamoci al nostro caso:

$$S_\pm = S_{1\pm} + S_{2\pm}$$

$\uparrow$ agiscono solo su $(s_1 m_1)$; $\nwarrow$ agiscono solo su $(s_2 m_2)$

$$\boxed{|11\rangle = |++\rangle}$$

(è l'unico modo che ho per ottenere $m=1$, valendo come sempre $m = m_1 + m_2$)

$$\begin{cases} S_-|11\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-0}\,|10\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|10\rangle \\ S_{1-}|++\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\,|-+\rangle = \hbar\,|-+\rangle \\ S_{2-}|++\rangle = \ldots = \hbar\,|+-\rangle \end{cases} \Rightarrow \hbar\sqrt{2}|10\rangle = \hbar|-+\rangle + \hbar|+-\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)}$$

Applicando S_- a $|10\rangle$, arrivo a trovare $|1-1\rangle$, che ci aspettiamo essere $|--\rangle$. Verifichiamolo:

$$\begin{cases} S_-|10\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1-1\rangle \\ S_{1-}|+-\rangle = \hbar\,|--\rangle \qquad S_{1-}|-+\rangle = 0 \\ S_{2-}|-+\rangle = \hbar\,|--\rangle \qquad S_{2-}|+-\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hbar\sqrt{2}\,|1-1\rangle = S_{1-}\left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) + S_{2-}\left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\hbar\sqrt{2}\,|1-1\rangle = \frac{|--\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|--\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|1-1\rangle = |--\rangle}$$

Per trovare $|00\rangle$, ci si ricorda che deve essere $\perp$ sia a $|11\rangle$, sia a $|10\rangle$, sia a $|1-1\rangle$

$$\Rightarrow \boxed{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)}$$

$\{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}$ "tripletto" $\qquad |00\rangle$ "singoletto"

$\to$ DISCUSSIONE GENERALE: FINE $\leftarrow$

NOTARE SIMM/ANTISIMM x SCAMBIO PARTICELLE. PRINCIPIO DI ESCLUSIONE DI PAULI E STATI TOTALM. ANTISIMM, ... [struttura della materia]

COMPOSIZIONE DI DUE MOMENTI ANGOLARI $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$: RIASSUNTO

$$V_{j_1} \rightarrow \{|j_1, m_1\rangle\} \quad \text{con} \quad m_1 = -j_1, -j_1+1, \dots, j_1$$

$$V_{j_2} \rightarrow \{|j_2, m_2\rangle\} \quad \text{con} \quad m_2 = -j_2, -j_2+1, \dots, j_2$$

Cerco base di $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$

Vale che (teoria generale) $$V_{j_1} \otimes V_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_j$$

con $V_j \rightarrow \{|j,m\rangle\}$ con $m = -j, -j+1, \dots, j$

Tutti i V_j sono $\perp$ l'uno rispetto all'altro, somma diretta ⇐

Sempre dalla teoria generale, vale anche che, se $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J}^2 |j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j,m\rangle \\ J_z |j,m\rangle = m\hbar \, |j,m\rangle \end{cases}$$

cioè $\{|j,m\rangle\}$ sono gli autostati del momento angolare totale.

CASO PARTICOLARE: SOMMA DI DUE SPIN $\frac{1}{2}$

Tutto come sopra, con le seguenti sostituzioni:

$j_1 \rightarrow s_1 = \frac{1}{2}$
$j_2 \rightarrow s_2 = \frac{1}{2}$
$j \rightarrow s$

$$V_{\frac{1}{2}} \otimes V_{\frac{1}{2}} = V_0 \oplus V_1$$

$$\underbrace{|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle_{(1)}}_{\in V_{\frac{1}{2}}} \otimes \underbrace{|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle_{(2)}}_{\in V_{\frac{1}{2}}} \qquad \underbrace{|0,0\rangle}_{\in V_0} \qquad \underbrace{\{|1,m\rangle\}_{m=0,\pm 1}}_{\in V_1}$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{S}^2 \, |s,m\rangle = s(s+1)\hbar^2 \, |s,m\rangle \\ S_z \, |s,m\rangle = m\hbar \, |s,m\rangle \end{cases}$$

Per esprimere $|0,0\rangle$ e $\{|1,m\rangle\}$ in funzione

di $\{|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle_{(1)}\} \otimes \{|\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\rangle_{(2)}\}$

[redacted]

1) si osserva che $|1,1\rangle = |++\rangle$
2) si applica [redacted] S_- a $|11\rangle$ e $S_{1-} + S_{2-}$ a $|++\rangle$
   ricordando che $S_- = S_{1-} + S_{2-}$
3) si uguagliano i risultati. Per $|--\rangle$ si applicano 1) 2) 3) a $|1,0\rangle$.
4) $|00\rangle$ si trova come stato ortogonale
   a $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$ e $|1,-1\rangle$ trovati in precedenza

$$|0,0\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$ singoletto

$$\left.\begin{aligned} |1,1\rangle &= |++\rangle \\ |1,0\rangle &= \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \\ |1,-1\rangle &= |--\rangle \end{aligned}\right\} \text{tripletto}$$

Tornando all' esercizio:

$$H = A S_z + \frac{B}{2} \vec{S}^2 - \frac{3}{4} B \hbar^2$$

è funzione di S_z e $\vec{S}^2$ e gli stati di singoletto e tripletto sono autostati simultanei di S_z e $\vec{S}^2$. Quindi sono anche autostati di questa H.

Spettro:

		S^2	S_z		H (E)
tripletto	$\|11\rangle \to$	$2\hbar^2$	$\hbar$	$\to$	$A\hbar + B\hbar^2 - \frac{3}{4}B\hbar^2 = A\hbar + \frac{B}{4}\hbar^2$
	$\|10\rangle \to$	$2\hbar^2$	0	$\to$	$B\hbar^2 - \frac{3}{4}B\hbar^2 = \frac{B}{4}\hbar^2$
	$\|1-1\rangle \to$	$2\hbar^2$	$-\hbar$	$\to$	$-A\hbar + B\hbar^2 - \frac{3}{4}B\hbar^2 = -A\hbar + \frac{B}{4}\hbar^2$
singoletto	$\|00\rangle \to$	0	0	$\to$	$-\frac{3}{4}B\hbar^2$

ES. XV [es. 27] Tannoudji, es. 5.23 (pag. 150)

Due particelle non identiche di spin $\frac{1}{2}$. $S_{1x} = \frac{\hbar}{2}$, $S_{2y} = -\frac{\hbar}{2}$

Calcolare $\text{Prob}(s=1, m_s=0)$

$$|\psi\rangle = |+,\hat{x}\rangle_{(1)} \otimes |-,\hat{y}\rangle_{(2)}$$

con $|+,\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

$|-,\hat{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{(1)} + |-\rangle_{(1)}\right)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{(2)} - i|-\rangle_{(2)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[|++\rangle + |-+\rangle - i|+-\rangle - i|--\rangle\right]$$

$(|m_1, m_2\rangle)$, cioè $(|m_{s_1}, m_{s_2}\rangle)$

Decompongo $|\psi\rangle$ su stati di singoletto e tripletto:

$|11\rangle = |++\rangle$

$|1-1\rangle = |--\rangle$

$|10\rangle = \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

$|00\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \begin{cases} |+-\rangle = \frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} \\ |-+\rangle = \frac{|10\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Quindi:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[|11\rangle - i|1-1\rangle + \frac{|10\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}} - i\,\frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\text{Prob}(s=1;\, m_s=0) = |\langle 10|\psi\rangle|^2 = |\text{coeff di } |10\rangle|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

ES. XVI [ex 28]

Due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con momenti magnetici $\vec{\mu}_1$ e $\vec{\mu}_2$ immerse in $\vec{B}$

$H = -\vec{\mu}_1\cdot\vec{B} - \vec{\mu}_2\cdot\vec{B}$

Al $t=0$, il sistema è in singoletto. Calcolare Prob(tripletto ; t)

Scelgo $\vec{B} = B\vec{e}_3$ lungo l'asse di quantizzazione dello spin (come sempre)

$$H = -\mu_1 B S_{1z} - \mu_2 B S_{2z}$$

$$|\psi(t=0)\rangle = |00\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H|+-\rangle = B\frac{\hbar}{2}(\mu_2-\mu_1)|+-\rangle$$

$$H|-+\rangle = B\frac{\hbar}{2}(\mu_1-\mu_2)|-+\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}\,\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t}|+-\rangle - e^{i\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t}|-+\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(\dots)}\frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} - e^{i(\dots)}\frac{|10\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(e^{-i(\dots)} - e^{i(\dots)}\right)|10\rangle + \left(e^{-i(\dots)} + e^{i(\dots)}\right)|00\rangle \right] =$$

$$= -i\,\text{sen}\left(\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t\right)|10\rangle + \cos\left(\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t\right)|00\rangle$$

$$\text{Prob}(\text{tripletto};\, t) = \text{Prob}(|10\rangle;\, t) = \text{sen}^2\left(\frac{B}{2}(\mu_2-\mu_1)t\right)$$