

A $t=0$ la ψ di una particella di spin 0 è:

$$\psi(\vec{r}, t=0) = \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}} \left(1 + \frac{x+iy+z}{r} \right) \quad \text{con} \quad \int_0^{+\infty} dr r^2 |f(r)|^2 = 1$$

i) Distribuzioni di probabilità per L_z e $\vec{L}^2$

ii) Se $H = qL_z$, calcolare $\psi(\vec{r}, t)$

iii) $\langle \vec{L}^2 \rangle(t)$

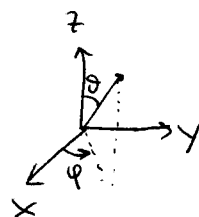
iv) Dato decomporre ψ nelle autofunzioni di L_z e $\vec{L}^2$. Sappiamo che queste sono le armoniche sferiche. Poiché abbiamo in ψ potenze di x, y, z di grado 0 e 1, ci aspettiamo $\ell=0, 1$.

Dalle note di Dean:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_{1-1} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi} \quad Y_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta \quad Y_{11} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$$

$\psi(\vec{r}, t=0) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \tilde{\psi}(\theta, \varphi)$ e per ciò che dobbiamo discretizzare in θ, φ e $\tilde{\psi}(\theta, \varphi)$:

$$\tilde{\psi}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left[1 + \frac{x+iy+z}{r} \right] = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left[1 + \sin\theta (\cos\varphi + i\sin\varphi) + \cos\theta \right]$$



$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left[1 + \sin\theta e^{i\varphi} + \cos\theta \right] = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left[\sqrt{4\pi} Y_{00} - 4\sqrt{\frac{\pi}{6}} Y_{11} + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{10} \right]$$

$$= \frac{Y_{00}}{\sqrt{2}} - \frac{Y_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{Y_{10}}{\sqrt{6}} = \sum_{\ell m} c_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad \text{con} \quad c_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_{11} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ c_{10} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

[In termini di Dirac: $|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |10\rangle$ con $|1\rangle = |1m\rangle$]

Notiamo che $\tilde{\psi}$ è normalizzato a 1, come ci aspettavamo dal fatto che $f(r)$ lo era.

$$\text{Prob}(L_z=0) = |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{Prob}(L_z=\hbar) = |c_{11}|^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}(\vec{L}^2=0) = \text{Prob}(\ell=0) = |c_{00}|^2 = \frac{1}{2} \quad \text{Prob}(\vec{L}^2=2\hbar^2) = \text{Prob}(\ell=1) = |c_{11}|^2 + |c_{10}|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

②

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-iHt/\hbar} \psi(\vec{x}, t=0) = e^{-igL_z t/\hbar} f(n) \tilde{\psi}(0, \varphi) =$$

$$= f(r) e^{-igL_z t/\hbar} \left[\frac{Y_{00}}{\sqrt{2}} - \frac{Y_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{Y_{10}}{\sqrt{6}} \right] =$$

$$= f(\omega) \left[\frac{Y_{\omega}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} Y_{11} + \frac{Y_{10}}{\sqrt{6}} \right]$$

In istanza di Dinac: $|\bar{\psi}(t)\rangle = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|10\rangle}{\sqrt{6}} - \frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} |11\rangle$

iii) Per calcolare $\langle \vec{L} \rangle(t)$, guardo solo la parte oscillante di ψ , cioè $\tilde{\psi}$.

Questo $\times$ $\vec{L} f(r) \tilde{\psi}(0,r) = f(r) \vec{L} \tilde{\psi}(0,r)$, cioè $\vec{L}$ è ~~invariante~~ levi
banale solo sulle coordinate angolari (θ, φ) . Inoltre in q.s. con solo
 $\tilde{\psi}(0,r)$ evolve nel tempo.

$$\langle L_z \rangle(t) = \langle \tilde{\psi}(t) | L_z | \tilde{\psi}(t) \rangle = \left(\frac{\langle 00 |}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 10 |}{\sqrt{6}} - \frac{e^{igt}}{\sqrt{3}} \langle 11 | \right) L_z \left(\frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|10\rangle}{\sqrt{6}} - \frac{e^{igt}}{\sqrt{3}} |11\rangle \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \frac{1}{\hbar} \left(-\frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} |11\rangle \right) =$$

g) Sopranino solo
 $\langle 111 \quad 111 \rangle$

$$= \frac{h}{3}$$

Per L_7 era banale - prendiamo la $|\hat{\Psi}\rangle$ espansa in autostati di L_7 .

Per calcolare $\langle L_x, y \rangle(t)$ usiamo gli operatori L_+ e L_- : ~~che~~ agiscono sulle componenti sugli autostati di $\{L^2, L_z\}$:

$$L_{\pm} |e, m\rangle = \hbar \sqrt{e(e+1) - m(m \pm 1)} |e, m \pm 1\rangle$$

(imagine the $L_+|e\rangle = 0$
 $L_-|e\rangle = 0$)

2. approx. verkethe die $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ $L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$

$$\langle L_+ \rangle(t) = \left(\frac{\langle 001 |}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 101 |}{\sqrt{6}} - \frac{e^{igt}}{\sqrt{3}} \langle 111 | \right) L_+ \left(\frac{|100\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|110\rangle}{\sqrt{6}} - \frac{e^{-igt}}{\sqrt{3}} |111\rangle \right) =$$

$$= \left(0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle + 0 \right) =$$

$$= -\frac{\hbar}{3} e^{igt}$$

$\langle L_- \rangle(t)$ si calcola in modo analogo. Per possibilità anche osservare che

$$\begin{aligned}\langle L_- \rangle(t) &= \langle \tilde{\Psi}(t) | L_- | \tilde{\Psi}(t) \rangle = \left(\langle \tilde{\Psi}(t) | (L_-)^+ | \tilde{\Psi}(t) \rangle \right)^* = \\ &= \left(\langle \tilde{\Psi}(t) | L_+ | \tilde{\Psi}(t) \rangle \right)^* = -\frac{t_1}{3} e^{-igt}\end{aligned}$$

Quindi adesso:

$$\langle L_x \rangle(t) = \left\langle \frac{L_+ + L_-}{2} \right\rangle(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{t_1}{3} \right) (e^{igt} + e^{-igt}) = -\frac{t_1}{3} \cos(gt)$$

$$\langle L_y \rangle(t) = \left\langle \frac{L_+ - L_-}{2i} \right\rangle(t) = \frac{1}{2i} \left(-\frac{t_1}{3} \right) (e^{igt} - e^{-igt}) = -\frac{t_1}{3} \sin(gt)$$

ES. II [0, 2] W.S. es. 3006, (pag 176)

Particella spintosa t.c. $\psi = K(x+y+2z)e^{-\alpha r}$, $\alpha, h \in \mathbb{R}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

a) $\vec{L}^2$

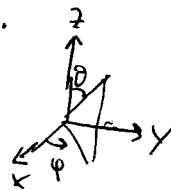
b) $\langle L_z \rangle$

c) $\text{Prob}(L_z)$

d) $\text{Prob}((\theta, \varphi) \in d\Omega)$

a) Essendo lo spinore di primo grado, ci aspettiamo che $l=1$.
Lo verifichiamo, scrivendo in coord. sferiche

$$\psi = K r e^{-\alpha r} \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r} + 2 \frac{z}{r} \right) =$$



$$= K r e^{-\alpha r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x+iy}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x-iy}{r} \right) + \frac{1}{2i} \left(\frac{x+iy}{r} \right) - \frac{1}{2i} \left(\frac{x-iy}{r} \right) + 2 \frac{z}{r} \right] =$$

$$= K r e^{-\alpha r} \left[\frac{1}{2} \sin\theta e^{i\varphi} + \frac{1}{2} \sin\theta e^{-i\varphi} + \frac{1}{2i} \sin\theta e^{i\varphi} - \frac{1}{2i} \sin\theta e^{-i\varphi} + 2 \cos\theta \right] =$$

$$= K r e^{-\alpha r} \left[\frac{1}{2} \sin\theta e^{i\varphi} (1-i) + \frac{1}{2} \sin\theta e^{-i\varphi} (1+i) + 2 \cos\theta \right] =$$

$$= K r e^{-\alpha r} \left[\frac{(1-i)}{2} \left(-4\sqrt{\frac{11}{6}} \right) Y_{11} + \frac{(1+i)}{2} \left(4\sqrt{\frac{11}{6}} \right) Y_{1-1} + 2 \left(2\sqrt{\frac{11}{3}} \right) Y_{10} \right] =$$

$$= K r e^{-\alpha r} \sqrt{\frac{11}{3}} \left[\sqrt{2} (i-1) Y_{11} + \sqrt{2} (i+1) Y_{1-1} + 4 Y_{10} \right] =$$

$$= f(r) \left[C_{10} Y_{10} + C_{11} Y_{11} + C_{1-1} Y_{1-1} \right]$$

Note
cleari

NB: si può arrivare direttamente usando le note di Jean che danno gli decomposizioni di polinomi.

$$\text{con } C_{10} = 4, \quad C_{11} = \sqrt{2}(i-1), \quad C_{1-1} = \sqrt{2}(i+1)$$

Quindi essendo ψ Y_{lm} con $l=1$, si ha che
 $L^2 = 1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$, con probabilità 1.

④

b-c) Calcolando $\text{Prob}(L_z)$,

Poiché L_z è lean banale solo sulla parte angolare della ψ , basta considerare $\tilde{\Psi}(\theta, \varphi) = \sum_{m} c_{lm} Y_{lm}$. Attenzione che adesso $\tilde{\Psi}$ non è normalizzato a 1.

$$\begin{aligned} \text{Prob}(L_z = \hbar) &= \frac{|c_{11}|^2}{\langle \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi} \rangle} = \frac{|c_{11}|^2}{\int d\Omega |\tilde{\Psi}|^2} = \\ &= \frac{|c_{11}|^2}{|c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 + |c_{1,-1}|^2} = \frac{2|i-1|^2}{16 + 2|i-1|^2 + 2|i+1|^2} = \frac{4}{16+4+4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Prob}(L_z = -\hbar) = \frac{|c_{1,-1}|^2}{|c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 + |c_{1,-1}|^2} = \dots = \frac{1}{6}$$

$$\text{Prob}(L_z = 0) = \frac{|c_{10}|^2}{|c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 + |c_{1,-1}|^2} = \frac{16}{16+4+4} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

~~$$\langle L_z \rangle = \sum_m |c_{lm}|^2 (m\hbar) = |c_{11}|^2 \hbar + |c_{10}|^2 0 + |c_{1,-1}|^2 (-\hbar) =$$~~

$$\langle L_z \rangle = \sum_m \text{Prob}(L_z = m\hbar) (m\hbar) = \frac{1}{6} \hbar + \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} (-\hbar) = 0$$

Forse utile: $\psi = f(r) \tilde{\Psi}(\theta, \varphi) = f(r) \sum c_{lm} Y_{lm}$

~~$$\langle L_z \rangle = \frac{\langle \psi | L_z | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{1}{\int r^2 dr |f(r)|^2 \int d\Omega |\sum c_{lm} Y_{lm}|^2} \int r^2 dr f^*(r) (\sum c_{lm} Y_{lm})^* \hat{L}_z f(r) (\sum c_{lm} Y_{lm})$$~~

~~$$= \frac{1}{\int r^2 dr |f(r)|^2 \int d\Omega |\sum c_{lm} Y_{lm}|^2} \int r^2 dr |f(r)|^2 \int d\Omega (\sum c_{lm} Y_{lm})^* \hat{L}_z (\sum c_{lm} Y_{lm})$$~~

~~$$= \frac{\int d\Omega (\sum c_{lm} Y_{lm})^* \hat{L}_z (\sum c_{lm} Y_{lm})}{\int d\Omega |\sum c_{lm} Y_{lm}|^2} =$$~~

~~$$= \frac{\sum_{lm} |c_{lm}|^2 (m\hbar)}{\sum_{lm} |c_{lm}|^2}$$~~

da cui si vede che $\hat{L}_z$ è diagonale

$$d) \text{Prob}((\theta, \varphi) \in d\Omega) = \frac{\int_0^{+\infty} dr r^2 |\Psi(r, \theta, \varphi)|^2}{\int_0^{+\infty} dr r^2 \int d\Omega |\Psi(r, \theta, \varphi)|^2} =$$

$$= \frac{\int_0^{+\infty} dr r^2 |f(r)|^2 |\tilde{\Psi}(\theta, \varphi)|^2}{\int_0^{+\infty} dr r^2 |f(r)|^2 \int d\Omega |\tilde{\Psi}(\theta, \varphi)|^2} =$$

$$= \frac{|\tilde{\Psi}(\theta, \varphi)|^2}{\int d\Omega |\tilde{\Psi}(\theta, \varphi)|^2} = \frac{|\sum c_{\ell m} Y_{\ell m}|^2}{\int d\Omega |\sum c_{\ell m} Y_{\ell m}|^2} = \frac{|c_{\ell m} Y_{\ell m}|^2}{\sum |c_{\ell m}|^2}$$

$$= \frac{1}{24} \left| c_{00} Y_{00} + c_{11} Y_{11} + c_{1-1} Y_{1-1} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{24} \left| 4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \right) + \sqrt{2} (i-1) \left(-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \right) + \sqrt{2} (i+1) \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \right) \right|^2$$

$$= \frac{1}{24} \left| 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{4} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{2} \left((1-i)e^{i\varphi} + (1+i)e^{-i\varphi} \right) \right|^2 =$$

~~1/24~~

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2 \operatorname{Re}(z) = 2 \operatorname{Re}((1-i)e^{i\varphi}) = \\ &= 2(\cos \varphi + \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{24} \left| 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta + \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sin \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left(2 \cos \theta + \sin \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) \right)^2$$

Es. III [0.32]

Oscillatore armonico bidimensionale $V(x, y) = \frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$

1) degenerazione energetica

2) per i primi 3 livelli energetici, calcolare i possibili valori di L_z .

$$1) H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 y^2$$

$\Rightarrow$ è un hamiltoniano separabile
di due hamiltoniane indipendenti
($[H_x, H_y] = 0$)

$$\Rightarrow E = \left(m_x + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega + \left(m_y + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega = (m_x + m_y + 1) \hbar \omega = (n+1) \hbar \omega$$

$$\begin{aligned} / m &= m_x + m_y \\ m &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

5) di solito derivando
sappiamo che è 1. Qui
però le derivazioni
esplicitamente la normalizzazione
di Ψ . Tuttavia possiamo
evitare di calcolarla.

Fissato m , ci sono $m+1$ stati con le stesse energie:

⑥

m	m_x	m_y
0	0	0
1	0	1
	1	0
2	0	2
	1	1
	2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\Rightarrow E_m = (m+1)\hbar\omega \quad \text{e' degenera } m+1 \text{ volte}$$

2) Per calcolare valori possibili di L_z , devo vedere che autofunzione di L_z compaiono in ψ .

Ricordiamo che $L_z = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}$ e che $L_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\Phi_m(\varphi) = \langle \varphi | m \rangle = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$m=0 \quad \psi_{00} = \psi_0(x)\psi_0(y) \propto e^{-k(x^2+y^2)}$$

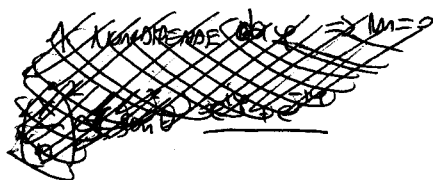
$$\text{NON DIPENDE da } \varphi \Rightarrow m=0 \Rightarrow \boxed{L_z=0}$$

$$m=1 \begin{cases} \psi_{10} = \psi_1(x)\psi_0(y) \propto x e^{-k(x^2+y^2)} \\ \psi_{01} = \psi_0(x)\psi_1(y) \propto y e^{-k(x^2+y^2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_z = \pm \hbar}$$

$$m=2 \begin{cases} \psi_{20} = \psi_2(x)\psi_0(y) \propto (x^2 - y^2) e^{-k(x^2+y^2)} \\ \psi_{11} = \psi_1(x)\psi_1(y) \propto xy e^{-k(x^2+y^2)} \\ \psi_{02} = \psi_0(x)\psi_2(y) \propto (y^2 - x^2) e^{-k(x^2+y^2)} \end{cases}$$

$$\text{Devo guardare i polinomi} \Rightarrow \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2, \left(\frac{y}{a}\right)^2, \frac{xy}{a^2}, 1 \right\}$$



$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 \propto (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^2 = e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} + 2 \\ \left(\frac{y}{a}\right)^2 \propto \dots \end{cases}$$

$$m = \pm 2, 0$$

$$m = \pm 2, 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L_z = 0, \pm 2\hbar}$$

$$\begin{cases} \frac{xy}{a^2} \propto (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = e^{2i\varphi} + 1 - 1 - e^{-2i\varphi} \\ 1 \quad m=0 \end{cases}$$

$$m = \pm 2$$

Particella di spin 1 con $H = g\vec{B} \cdot \vec{S}$, $\vec{B} = B\vec{e}_x$ (uniforme).
 (quondando gradi di libertà spaziali)

a) Ricavare S_x, S_y, S_z usando come base quella degli autostati di $\vec{S}^2$ e S_z ($|s, m_s\rangle$)

Ricavare anche autostati di S_x e S_y .

b) Se $|\Psi(t=0)\rangle = |1, 1\rangle$, trovare $|\Psi(t)\rangle$

c) $\text{Prob}(|1, -1\rangle; t)$

a) Se $|s, m_s\rangle$ è base di autostati comuni a $\vec{S}^2$ e S_z , ^(e $s=1$) allora:

$$S_z |1, m\rangle = m\hbar |1, m\rangle \quad m = -1, 0, +1$$

Poss. scegliere $|1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ ovviamente $S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Per trovare S_x , si fa uso di $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$. In generale vale che

$$(S_x)_{mm'} = \langle 1, m | S_x | 1, m' \rangle$$

$$(S_y)_{mm'} = \langle 1, m | S_y | 1, m' \rangle$$

cioè, esplicitamente

$$S_x = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 | S_x | 1, 1 \rangle & \langle 1, 1 | S_x | 1, 0 \rangle & \langle 1, 1 | S_x | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, 0 | S_x | 1, 1 \rangle & \langle 1, 0 | S_x | 1, 0 \rangle & \langle 1, 0 | S_x | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, -1 | S_x | 1, 1 \rangle & \langle 1, -1 | S_x | 1, 0 \rangle & \langle 1, -1 | S_x | 1, -1 \rangle \end{pmatrix}$$

$$S_y = \dots$$

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \quad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

e sappiamo che $S_{\pm} |1, m\rangle = \hbar \sqrt{2 - m(m \pm 1)} |1, m \pm 1\rangle$

Quindi:

$$\begin{aligned} S_+ |1, 1\rangle &= 0 & S_- |1, 1\rangle &= \hbar\sqrt{2} |1, 0\rangle \\ S_+ |1, 0\rangle &= \hbar\sqrt{2} |1, 1\rangle & S_- |1, 0\rangle &= \hbar\sqrt{2} |1, -1\rangle \\ S_+ |1, -1\rangle &= \hbar\sqrt{2} |1, 0\rangle & S_- |1, -1\rangle &= 0 \end{aligned}$$

NB In questo esempio, e in generale dove non c'è il rischio di confondersi ($\Rightarrow$ cioè dove j HA solo un VALORE), non siamo più nei ket e l'indice che identifica S^2 , cioè s . $\Rightarrow |s, m_s\rangle \leadsto |m_s\rangle$
 In questo caso, essendo $s=1$, uso $|1\rangle \leadsto |1, 1\rangle$ $|0\rangle \leadsto |1, 0\rangle$ $|-1\rangle \leadsto |1, -1\rangle$

(8)

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle 11 | S_+ + S_- | 11 \rangle & \langle 11 | S_+ + S_- | 10 \rangle & \langle 11 | S_+ + S_- | -1 \rangle \\ \langle 01 | S_+ + S_- | 11 \rangle & \langle 01 | S_+ + S_- | 10 \rangle & \langle 01 | S_+ + S_- | -1 \rangle \\ \langle -1 | S_+ + S_- | 11 \rangle & \langle -1 | S_+ + S_- | 10 \rangle & \langle -1 | S_+ + S_- | -1 \rangle \end{pmatrix}$$

Faccio esplicitamente la prima riga:

$$\langle 11 | S_+ + S_- | 11 \rangle = \langle 11 | (0 + \hbar\sqrt{2}|0\rangle) = 0$$

$$\langle 11 | S_+ + S_- | 10 \rangle = \langle 11 | (\hbar\sqrt{2}|1\rangle + \hbar\sqrt{2}|-1\rangle) = \hbar\sqrt{2}$$

$$\langle 11 | S_+ + S_- | -1 \rangle = \langle 11 | (\hbar\sqrt{2}|0\rangle + 0) = 0$$

Faccio tutti, si ha:

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \langle 11 | S_+ - S_- | 11 \rangle & \langle 11 | S_+ - S_- | 10 \rangle & \langle 11 | S_+ - S_- | -1 \rangle \\ \langle 01 | S_+ - S_- | 11 \rangle & \langle 01 | S_+ - S_- | 10 \rangle & \langle 01 | S_+ - S_- | -1 \rangle \\ \langle -1 | S_+ - S_- | 11 \rangle & \langle -1 | S_+ - S_- | 10 \rangle & \langle -1 | S_+ - S_- | -1 \rangle \end{pmatrix}$$

Faccio esplicitamente la seconda riga:

$$\langle 01 | S_+ - S_- | 11 \rangle = \langle 01 | (0 - \hbar\sqrt{2}|0\rangle) = -\hbar\sqrt{2}$$

$$\langle 01 | S_+ - S_- | 10 \rangle = \langle 01 | (\hbar\sqrt{2}|1\rangle - \hbar\sqrt{2}|-1\rangle) = 0$$

$$\langle 01 | S_+ - S_- | -1 \rangle = \langle 01 | (\hbar\sqrt{2}|0\rangle - 0) = \hbar\sqrt{2}$$

Faccio tutti si ha:

$$S_y = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ -\hbar\sqrt{2} & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & -\hbar\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio: verificare che $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$, cioè che soddisfano regole commutatore del momento angolare. Adesso ricaviamo gli autovettori di S_x e S_y , in funzione di quelli di S_z . Ricordiamo che

$$|1, 1\rangle \rightsquigarrow |1\rangle = |1, \hat{z}\rangle = |1, \hat{x}\rangle = |1\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$|1, 0\rangle \rightsquigarrow |0\rangle = |0, \hat{z}\rangle = |0, \hat{x}\rangle = |0\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$|1, -1\rangle \rightsquigarrow |-1\rangle = |-1, \hat{z}\rangle = |-1, \hat{x}\rangle = |-1\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$S_z |1, \hat{z}\rangle = \hbar |1, \hat{z}\rangle$$

$$S_z |0, \hat{z}\rangle = 0$$

$$S_z |-1, \hat{z}\rangle = -\hbar |-1, \hat{z}\rangle$$

Dobbiamo quindi trovare $|1, \hat{x}\rangle, |0, \hat{x}\rangle, |-1, \hat{x}\rangle$
 $|1, \hat{y}\rangle, |0, \hat{y}\rangle, |-1, \hat{y}\rangle$

Autovetori di S_x : è dato per 1, nei punti $\pm \hbar/2, 0$.

(9)

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$$\rightarrow \lambda = 0, \pm \sqrt{2} \Rightarrow S_x = \pm \hbar/2, 0$$

Autovetori di S_x :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} b \\ a+c \\ b \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$

$$\lambda = 0 (S_x = 0) \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a+c = 0 \end{cases} \rightarrow |0, \hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda = \sqrt{2} (S_x = \hbar/2) \rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2}a \\ (a+c) = \sqrt{2}b \\ b = \sqrt{2}c \end{cases} \rightarrow \text{scelgo } a=1 \quad |+, \hat{x}\rangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda = -\sqrt{2} (S_x = -\hbar/2) \rightarrow \begin{cases} b = -\sqrt{2}a \\ (a+c) = -\sqrt{2}b \\ b = -\sqrt{2}c \end{cases} \rightarrow \text{scelgo } a=1 \quad |-, \hat{x}\rangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix}$$

Esercizio di calcolo: ricavo autovetori di S_y : $|0, \hat{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $|\pm, \hat{y}\rangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ \pm i\sqrt{2} \\ -1 \end{vmatrix}$

b) $|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |+, \hat{z}\rangle$. $H = g\vec{B} \cdot \vec{S} = gBS_x$.

Quindi H è diagonale negli autostati di S_x .

Per questo nel tempo $|\psi(t)\rangle$ lo dico sempre decompono in autostati di H , cioè di S_x .

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{|+, \hat{x}\rangle + |-, \hat{x}\rangle}{2}}_{= \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}} + \underbrace{\frac{|0, \hat{x}\rangle}{\sqrt{2}}}_{= \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(t=0)\rangle = e^{-igBS_x t/\hbar} \left(\frac{|+, \hat{x}\rangle}{2} + \frac{|-, \hat{x}\rangle}{2} + \frac{|0, \hat{x}\rangle}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= e^{-igBt} \frac{|+, \hat{x}\rangle}{2} + e^{igBt} \frac{|-, \hat{x}\rangle}{2} + \frac{|0, \hat{x}\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-igBt} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} e^{igBt} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(gBt) \\ -i\sqrt{2} \sin(gBt) \\ -1 + \cos(gBt) \end{pmatrix}$$

c) $\text{Prob}(|\psi(t)\rangle = |-, \hat{z}\rangle; t) = |\langle -, \hat{z} | \psi(t) \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (-1 + \cos gBt) \right|^2 =$

$$L_z = \left| \frac{1}{2} \left(-1 + \cos^2 \frac{qBt}{2} - \sin^2 \frac{qBt}{2} \right) \right|^2 = \left| \frac{1}{2} (-2 \sin^2 \frac{qBt}{2}) \right|^2 = \sin^4 \left(\frac{qBt}{2} \right)$$

(10)

Es. V [0.26]

$$\psi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(Y_{10}(\theta, \varphi) + Y_{11}(\theta, \varphi) - Y_{1,-1}(\theta, \varphi) \right) \quad \text{calcolare } \langle \vec{L} \rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|11\rangle + |10\rangle - |1,-1\rangle)$$

$$\begin{aligned} \langle L_z \rangle &= \langle \psi | L_z | \psi \rangle = \frac{1}{3} (\langle 11| + \langle 10| - \langle 1,-1|) L_z (|11\rangle + |10\rangle - |1,-1\rangle) = \\ &= \frac{1}{3} (\quad) (\hbar |11\rangle - (-\hbar) |1,-1\rangle) = \\ &= \frac{1}{3} (\hbar - \hbar) = 0 \end{aligned}$$

$\langle L_x \rangle$: Ho 2 modi

1) Usare $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ e $L_{\pm} |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} |l, m\pm 1\rangle$

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{3} (\langle 11| + \langle 10| - \langle 1,-1|) (L_+ + L_-) (|11\rangle + |10\rangle - |1,-1\rangle) =$$

prima L_+
poi L_-

$$= \frac{1}{6} (\langle 11| + \langle 10| - \langle 1,-1|) (0 + \hbar\sqrt{2} |11\rangle - \hbar\sqrt{2} |10\rangle + \hbar\sqrt{2} |10\rangle + \hbar\sqrt{2} |1,-1\rangle + 0) =$$

$$= \frac{1}{6} (\langle 11| + \langle 10| - \langle 1,-1|) (\hbar\sqrt{2} |11\rangle + \hbar\sqrt{2} |1,-1\rangle) = 0$$

2) Sidero solo con $l=1$. Quindi rappresento 3-dim delle regole di commutazione del momento angolare, ~~non necessariamente~~ come funzione di L^2
 $\Rightarrow$ matrici e autovetture identiche all'esercizio precedente (per i vett. 3d)

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |1,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\langle L_x \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1) \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3\sqrt{2}} (11-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Esercizio calcolare $\langle L_y \rangle$ con 2 modi.