

En. di onda stazionaria sinusoidale

$$y(x,t) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- calcolo identico a quello visto per energia propagata - non trattare per esteso a lezione  
elemento di lungh. a riposo  $dx$

$$\rightarrow dl = \sqrt{dx^2 + \left(dx \frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

$$\alpha \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \tan \alpha \approx \alpha \ll 1$$

$$dl = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$dl - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$dU = T(dl - dx) = T \frac{1}{2} A^2 k^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) dx$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \rho \omega^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) dx$$

$$dE_k = \frac{1}{2} \rho dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} A^2 \rho \omega^2 \sin^2(kx) \sin^2(\omega t) dx$$

$$U = \int_0^L dU = \frac{1}{4} L A^2 T k^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{4} A^2 \rho \omega^2 \cos^2 \omega t$$

$$E_k = \int_0^L dE_k = \frac{1}{4} L A^2 \rho \omega^2 \sin^2 \omega t$$

Per il singolo elemento di corda  $dx$  a istante  $t$   
 $dE = dE_k + dU = \frac{1}{2} A^2 \rho \omega^2 (\sin^2 kx \sin^2 \omega t + \cos^2 kx \cos^2 \omega t) dx$   
 energia totale del singolo elemento varia nel tempo

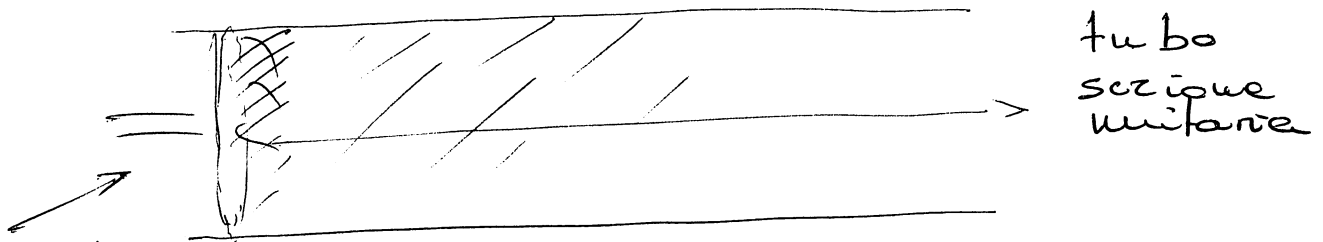
$$E_T = U + E_k = \frac{1}{4} L A^2 \rho \omega^2$$

$\rightarrow$  energia totale del singolo modo  
è costante nel tempo

On 20

onde acustiche: seno onde di pressione  
in un gas (o fluido)

1 dim e.g.



pistone  
comprime gas nelle immediate vicinanze

→ pressione in prossimità di pistone in movimento si altera risp. al valore all'equilibrio:  $p_0 \rightarrow p_0 + \delta p$

Suppongo  $\delta p \ll p_0$

perturbazione  $\delta p$  si propaga lungo tubo con la stessa legge trovata per gli spostamenti trasversali di corda tesa.

pressione è scalare definito per fluido

• Pressione

- tra poco la useremo come grandezza termodinamica macroscopica

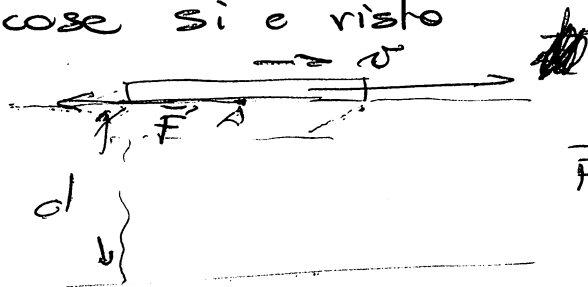
• è definita per fluidi

• Def: fluido: all'equilibrio meccanico <sup>(statico)</sup> è nulla la  $\vec{F} \parallel$  (tangenziale) che una qualunque porzione di fluido esercita su sup. con cui è a contatto.

La sup. può essere sia sup. limite del fluido (parete di recipiente) che sup. ideale interna al fluido



- quando si sono introdotte forze viscosi si è visto

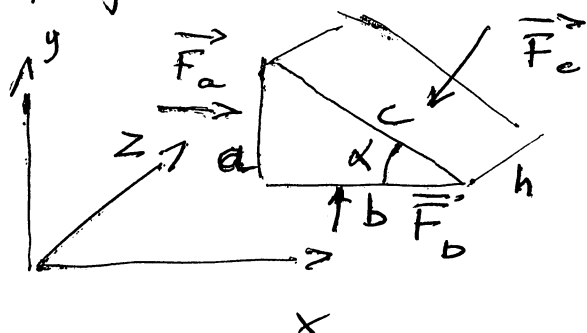


$$\vec{F} = -\eta \frac{A}{dl} \vec{v}$$

ma è  $\vec{F} \parallel$  a sup per  $v \neq 0$   
non ho equl. statico

considero elemento di fluido  
infinitesimo all'equilibrio statico  
con il fluido circostante

0.22 / 1.14 / 1.1



Per def. di fluido  $\vec{F}_a, \vec{F}_b, \vec{F}_c$   
possono avere solo comp.  $\perp$  a rispettive  
sup  $\vec{F}_a = -F_a \hat{u}_a$   $\vec{F}_b = -F_b \hat{u}_b$   $\vec{F}_c = -F_c \hat{u}_c$

Scrivo  $A = ah = c \sin \alpha h$

$$B = bh = c \cos \alpha h$$

$$C = ch$$

~~forza~~  $F_a = p_a A = p_a c \sin \alpha h$

$$F_b = p_b B = p_b c \cos \alpha h$$

$$F_c = p_c C = p_c ch$$

$$\hat{u}_a = -\hat{i} ; \hat{u}_b = -\hat{j} ; \hat{u}_c = \hat{i} \sin \alpha + \hat{j} \cos \alpha$$

In assenza di forze di volume (elemento  
infinitesimo)

$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$$

$$0 = h [p_a c \sin \alpha \hat{i} + p_b c \cos \alpha \hat{j} + p_c c \sin \alpha \hat{i} - p_c c \cos \alpha \hat{j}]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_a = p_c \\ p_b = p_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_a = p_b = p_c = p$$

$p$  è scalare definito in ciascun punto  
di fluido  $[p] = \frac{[N]}{[m^2]} = M L^{-1} T^{-2}$  (Pa: SI)

per fluido si definisce ~~compressibilità~~  
compressibilità

$$\beta = - \frac{P}{dV/V} \quad \text{ha le stesse dim. di pressione}$$

per liquido  $\beta \sim 10^9 \text{ Pa}$  (con  $\Delta P = 10^6 \text{ Pa}$   
richiama volume di  $1/1000$ )

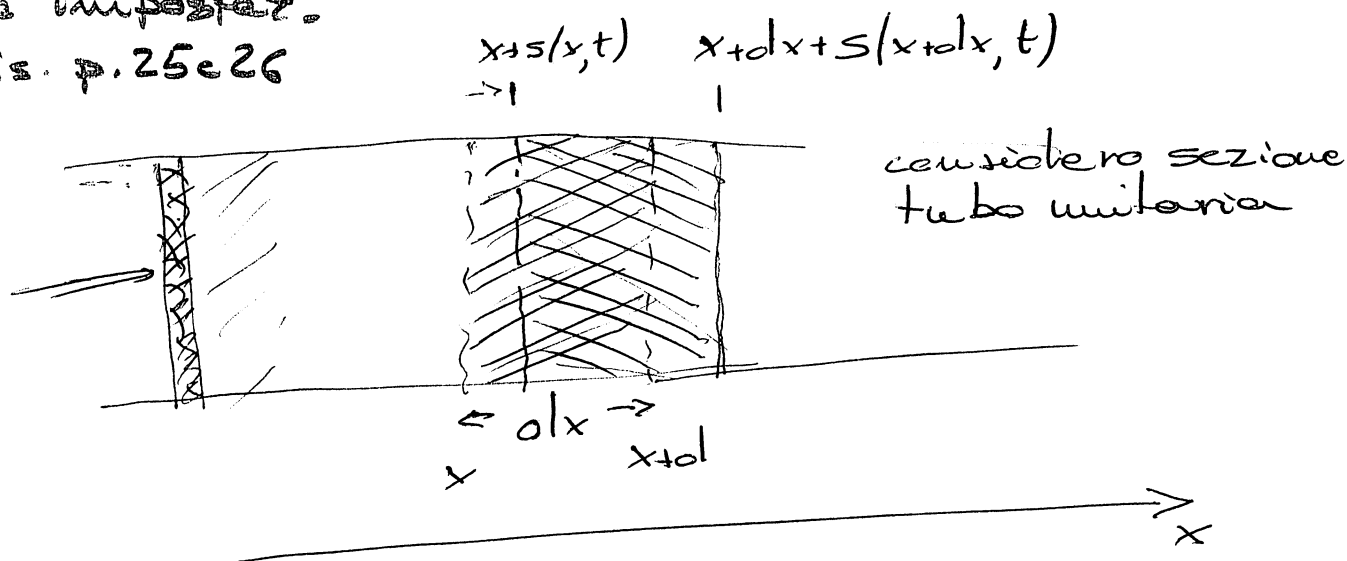
per gas ideale a temp. normale (costante)  
 $\beta \sim 10^5 \text{ Pa}$  ( Boyle  
 $PV = cT$  )

Ora sono in grado di costruire modelli  
di propagazione di perturbazione in fluido  
1-d.

Importante: studio effetto di spostamento  
longitudinale da equilibrio  
e relazione tra queste e variazione  
di pressione

Solo impostaz.  
e ris. p. 25 e 26

Om 24



densità  $\rho = \frac{dm}{dV}$  ( $\frac{m}{V} = \rho_0$  all'equil.)

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dV}{V}$$

quindi comprimibilità

$$\beta = - \frac{\frac{d\rho}{\rho}}{\frac{dV}{V}} = \frac{d\rho}{dP} \Rightarrow d\rho = \beta \frac{dP}{\rho}$$

$s(x, t)$ : spostamento longitudinale al  
tempo  $t$  di elem di volume  
in  $x$  a riposo

Suppongo  $s(x, t)$  piccolo (infinitesimo)  
Elem. di volume imperturbato tra  $x$  e  
 $x + dx$ :

$$dV = dx \quad dm = \rho_0 dx$$

perturbazione:

$$x \rightarrow x + s(x, t)$$

$$x + dx \rightarrow x + dx + s(x + dx, t)$$

$dm$ : costante

impert:  $dm = \rho_0 dx$

pert:  $dm = (\rho_0 + d\rho) (x + dx + s(x+dx, t) - x + s(x, t))$   
 $= (\rho_0 + d\rho) dx \left(1 + \frac{\partial s}{\partial x}\right)$

$$= \left( \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} + d\rho + \underbrace{d\rho \frac{\partial s}{\partial x}}_{\text{infinitesimale, ordine sup} \rightarrow \text{trascurare}} \right) dx$$

$$\rho_0 dx = \rho_0 dx \left( \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} + d\rho \right) dx$$

$$\Rightarrow d\rho(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{dP}{P} = \beta \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow dP = -\beta \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$P(x, t) = P_0 + dP = P_0 - \beta \frac{\partial s}{\partial x}$$

La forza agente sull'elemento di volume di massa  $dm$  è (al tempo  $t$ )

$$dF_x = P(x, t) - P(x+dx, t) = -\frac{\partial P}{\partial x} dx = +\beta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$$

$$dF_x = dm a_x = dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho_0 dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \right]$$

è eq. di D'Alembert per  $s(x, t)$  con

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho_0}{\beta} \quad c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

Ho trovato onde di spostamento longitudinali che si propaga

ma  $p$  ed  $s$  sono legate da rel. Om 26

$$p(x, t) = p_0 - \beta \frac{\partial s}{\partial x}$$

- se  $s(x, t)$  è sinusoidale  $p(x, t)$  è pure sinusoidale in ritardo di fase di  $\frac{\pi}{2}$
- per onde stazionarie sinusoidali,

nodi di  $s \leftrightarrow$  ventri di  $p$

ventri di  $s \leftrightarrow$  nodi di  $p$

eq. d'onda per  $p$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial s}{\partial x} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

inverti ordine deriv

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0} \quad \text{eq. D'Alembert per } p(x, t)$$
$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

onda è perturb. di  $p$  che si propaga  $p(x, t) = p_0 + \delta p(x, t)$

## Considerazioni importanti

- onda in fluido in 1-d vista come
  - onda spostam. longitud.
  - onda pressione

~~Matematici~~ appaiono descr. equivalenti ma non lo sono: in 2-d, 3-d spostam. è vettore  $\vec{p}$  è scalare

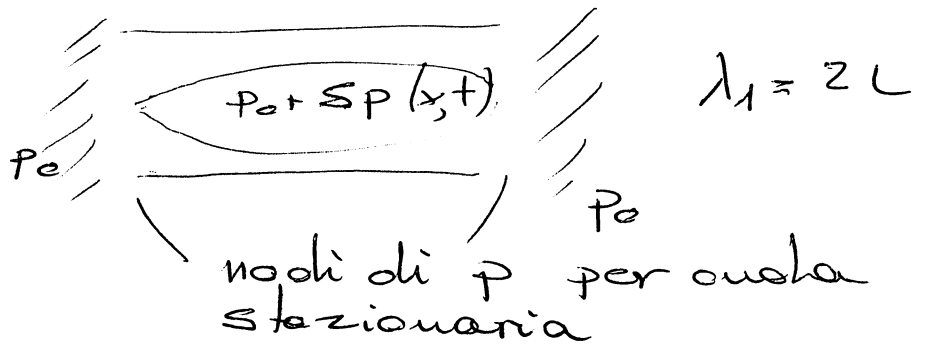
Somma perturb. di pos.:  $\vec{S}(x,t)$  • di press  $\delta P(x,t)$ ?

A. ) ) ) ) in  $\odot$   $\vec{S}_A + \vec{S}_B$  ?  
 oppure  $\delta P_A + \delta P_B$

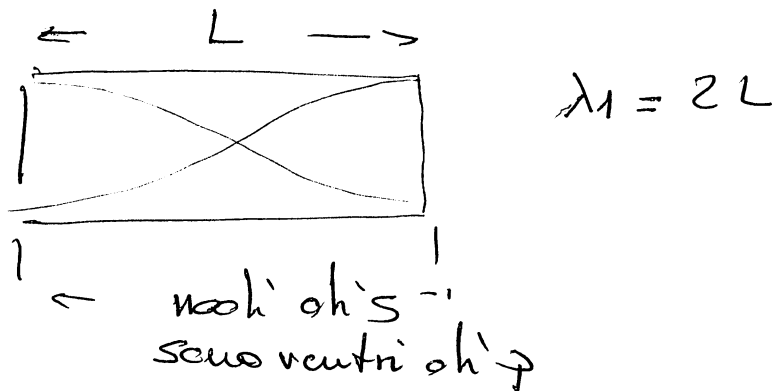
B. ) ) ) ) onda acustica è onda  
 di pressione (onda di energia)  
 $\Rightarrow$  somma  $\delta P$  scalare  
perché  $T$  varia  
 $v. = \Delta t \cdot c$

torno a onde in tubo

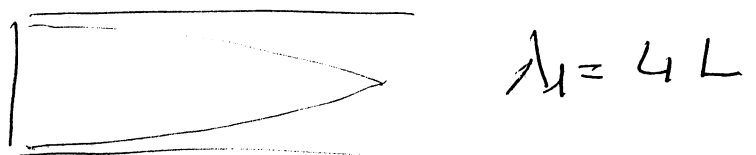
tubo aperto



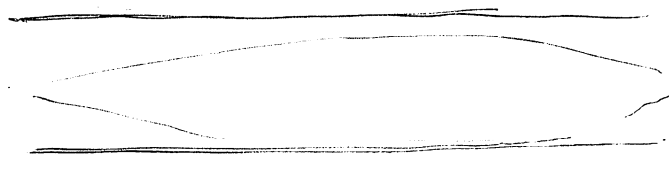
tubo chiuso



chiuso a una estremità

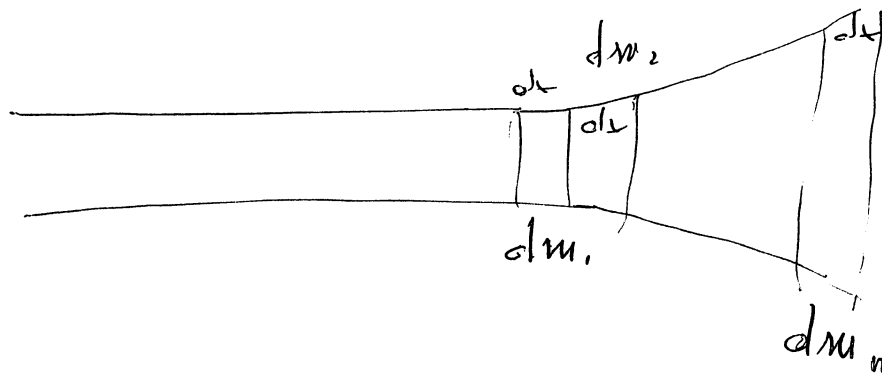


in realtà tubo aperto non  
 è come corda vincolata a vincolo ideale



ho trasferim.  
 di  $E$  all'esterno

per avere ~~trasferimento~~ maggior trasferimen-  
 to di  $E$



$m_1$   $m_n$

come in collisioni: se  $m_1 \ll m_n$   
 si trasferisce piccola frazione  $E$  in  
 collisione

$m_1$   $m_2$   $m_n$

$\frac{m_2}{m_1} = \frac{m_n}{m_2}$  trasferisco  
 di più

$m_1$   $m_2$   $m_3$   $\dots$   $m_n$

$$\frac{m_k}{m_{k-1}} = \left( \frac{m_n}{m_1} \right)^{1/(n-1)}$$

# Note su comprimibilità di gas

- Newton ~~è~~ riteneva di dover usare la comprimibilità derivata da legge isoterma di Boyle  $\nabla V = \text{costante}$
- questa andrebbe bene se le variazioni di pressione avvenissero a temp. costante
- ~~in~~ invece le variazioni di pressione in onda acustica avvengono senza scambio di calore con volumetti adiacenti  
 $\Rightarrow$  devo usare eq. adiabatica  $\nabla V^\gamma = \text{cost}$

per  $\nabla V = C$        $p = C V^{-1}$

$$\frac{dp}{dV} = - C V^{-2} = - \frac{p}{V} \Rightarrow dp = -p \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \beta = + \frac{1}{p} \text{ isoterma}$$

$p V^\gamma = C$        $p = C V^{-\gamma}$

$$\frac{dp}{dV} = - C \gamma V^{-(\gamma+1)} = - \frac{\gamma p}{V} \Rightarrow dp = -\gamma p \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \beta = + \frac{\gamma}{p} \text{ adiabatica}$$

- La conduzione di calore nel gas causa l'attenuazione dell'onda acustica
  - Vedremo da legge conduzione di Fourier che per onde sinusoidali le frequenze superiori si attenuano + rapidamente
- $\Rightarrow$  in onda acustica dopo tempo sull.  
lungo sopravvivono basse frequenze ...

Onde su sup. fluido :

- 2 tipi
- a) onde di tensione sup. : dovute a tensione sup. che tende a rendere minima sup
  - b) onde di gravità : dovute a gravitazione che tende a riprist. sup = sup equipot.

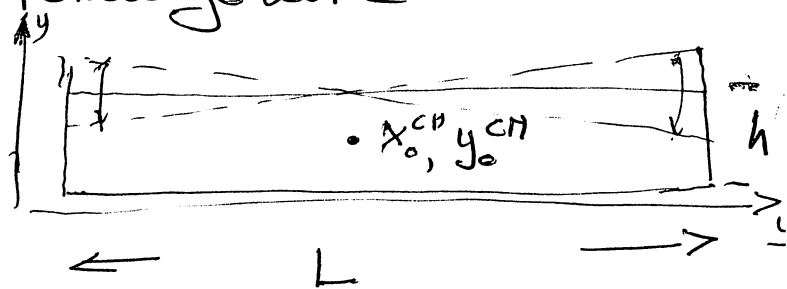
Le (a) sono ~~per~~ prevalentemente quelle prodotte da ochette nella vasca da bagno

Le (b) quelle ~~dell'acqua~~ che di solito chiamiamo "onde"

non c'è tempo per trattare ne le (a) ne le (b)

Ma si può fare un esercizio che dà indicazioni interessanti sulle (b)

Problema padella rettangolare contenente acqua



- supponiamo che mettendo in oscillazione l'acqua questa oscilli mantenendo piana la superficie libera
- studiando relazione tra  $\Delta y_{cm}$  e  $\Delta x_{cm}$  dimostrare che l'oscillazione è armonica con frequenza angolare data da :

$$\omega^2 = 12 g \frac{h}{L^2}$$

(si ricordi  $\Delta U = M g \Delta y_{cm}$ , quindi si ottenga  $U(\Delta x_{cm})$  ....)

per onde di gravità:

- acque profonde  $\omega = \sqrt{g k}$   $\rightarrow$  dispersivo

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

- acque basse  
profondità  $h$

$$\omega = \sqrt{g h} \quad k \quad \text{non disp.}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g h}$$