- sempre legata a moti dei pianeti

1. a lungo dominante sistema di Tolomeo (II sec. a.C.) geocentrico: terra al centro dell'universo
   Irregolarità / discrepanze di tale sistema corrette da Tolomeo e astronomi successivi con Epicicli: il centro dell'orbita dei pianeti descrive circonferenza attorno alla Terra.
2. 1500 ca. ~~Tolomeo~~ Copernico propone sistema geocentrico
3. Tycho Brahe (~ 1600) compie ~~più~~ osservazioni molto accurate (misure con strumenti di precisione) (osservazioni precise entro 2' di arco)
4. Keplero negli anni 1601-1612 elabora le osservazioni di Brahe

Leggi di Keplero

2ª (1602) il moto dei pianeti di ciascun pianeta spazza aree uguali in tempi uguali (precedentemente formulata come velocità inversamente prop. a distanza dal sole)

- quindi osservò che un'orbita ellittica si adatta bene ai dati dell'orbita di Marte attorno al sole (1605)

Quindi

1ª: i pianeti percorrono orbite ellittiche con il Sole in uno dei fuochi (ma gli eredi di Tycho detenevano proprietà delle osservazioni così Keplero non poté pubblicare risultati fino al 1609)

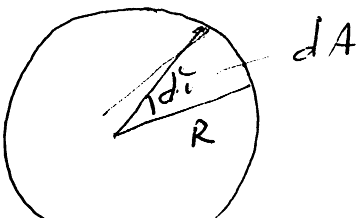
3ª (1618) i quadrati dei periodi dei moti orbitali stanno tra loro come (sono proporzionali a) i cubi delle distanze medie dal Sole (semiassi maggiori delle orbite) $T^2 = \text{cost}\, a^3$

nel 1610 Galileo aveva comunicato a Keplero la sua scoperta dei satelliti di Giove.

- Keplero compie osservazioni sul moto dei satelliti che corroborano ~~la sua~~ le sue leggi, ma questa volta con Giove in un fuoco

- Keplero riteneva che per il moto occorresse una forza: tanto maggiore la forza tanto maggiore il moto (la velocità). Conclude quindi che la maggiore velocità dei pianeti in prossimità del Sole sia dovuta alla maggiore forza esercitata da questo
  $\longrightarrow$ conclusione corretta da presupposti errati

Newton $\sim$ 1665: orbite $\sim$ circolari



$dA = R\,d\varphi$

3 legge Keplero

$T^2 = C_S R^3$

C_S è costante unica per sistema solare.

Se considero invece lune di Giove ho una diversa costante C_G

Attenzione: 2^a Kep. mi dice $\frac{dA}{dt} = \text{cost}$ ma è una costante differente per ciascuna orbita

$T^2 = c_S R^3$

ma per orbita circolare $\frac{dA}{dt} = \text{cost} \Rightarrow R\frac{dl}{dt} = \text{cost}$

$\Rightarrow \omega R = \text{cost} \Rightarrow \omega = c_R = \omega_R$

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{2\pi}{\omega_R} \\ T^2 = c_S R^3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1/\omega_R^2 = k_S R^3$$

ma $a_R = \omega^2 R = \frac{1}{k_S}\frac{R}{R^3} = \frac{1}{k_S}\cdot\frac{1}{R^2}$

e $F = ma \Rightarrow F(R) = \frac{1}{k_S}\frac{m}{R^2}$ (centripeta)

così Newton ottiene che la forza ~~...~~, centripeta, esercitata da Sole su pianeta è prop. a massa del pianeta e inversamente prop. al quadrato della dist. Sole-pianeta

$$F_{SP}(R) = \frac{1}{k_S}\frac{m_P}{R^2}$$

Anzitutto è interessante osservare che la forza gravitazionale è proporzionale alla m_P che determina inerzia del pianeta

$\Rightarrow$ massa gravitazionale "passiva" proporzionale a massa inerziale

ma la 3ª legge di Keplero
è legge universale: vale con altra costante
per satelliti di Giove.
Vale quindi con costante K_P ~~e~~ per
moto attorno a pianeta P
Quindi la forza esercitata da pianeta P
su corpo (particella) di massa M è

$$F = \frac{1}{K_P} \frac{M}{R^2}$$

quindi forza esercitata da P su Sole

$$F_{PS} = \frac{1}{K_P} \frac{M_S}{R^2}$$

ma per 3° principio dinamica

$$F_{PS} = F_{SP} \Rightarrow \frac{1}{K_P} \frac{M_S}{R^2} = \frac{1}{K_S} \frac{M_P}{R^2}$$

$$\Rightarrow M_S K_S = M_P K_P$$

con M_S e M_P qualunque, quindi

$$M_S K_S = M_P K_P = \gamma$$

<u>costante universale</u>

allora $\frac{1}{K_S} = \frac{M_S}{\gamma}$ $\quad \frac{1}{\gamma} = G$

$$\boxed{F_{SP} = F_{PS} = G \frac{M_S M_P}{R^2}}$$

Legge della gravitazione di Newton

$$[G] = [N]\, M^{-2} L^{2} \quad (N \cdot m^{2} \cdot kg^{-2} \text{ in SI})$$

$$[N] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

$$[G] = M^{-1} L^{3} \cdot T^{-2} \quad (m^{3} \cdot kg^{-1}\, s^{-2} \text{ SI})$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^{3} kg^{-1} s^{-2}$$

ma come la misuro? devo conoscere
i valori delle due masse....
vedremo poi

$$F_{SP} = G \frac{M_S\, m_P}{R^{2}}$$

forza esercitata da Sole su pianeta
è prop. a M inerziale Sole (massa grav. attiva) e a m inerziale pianeta (massa grav. passiva) e all'inverso del quadrato della distanza

Domanda (Newton):
la forza che fa "cadere" una mela sulla terra ~~è la stessa che fa "cadere"~~ ~~fa~~ ha la stessa origine di quella che fa "cadere" la Luna sulla terra?

Per Terra - Luna posso ancora tenere valida approx corpi puntiformi, per Terra - mela no.

a. Come calcolo forza che Terra esercita su mela?

b. C'è anche altro problema: pianeta P esercita su Sole F_{PS} $\Rightarrow$ Sole si muove di moto accelerato: Keplero considera moto di pianeti risp. Sole: ho solo approssimazione che regge perchè $M_S \gg m_P$? e se è così vale (Keplero nella) descrizione di moto Luna risp. Terra!

Vediamo prima (b)

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{G m_2}{R^2} \\ a_2 &= G \frac{m_1}{R^2} \end{aligned}\right\} \text{ rispetto sist. inerziale}$$

con $\dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = - \dfrac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|}$

l'acc. di m_2 risp. m_1 è: $\vec{a}\,'_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$

quindi $|\vec{a}\,'_2| = |\vec{a}_2 - \vec{a}_1| = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| = \dfrac{G}{R^2}(m_1 + m_2)$

$$a_R = \frac{G}{R^2}(m_1 + m_2)$$

è il modulo dell'accelerazione relativa di un corpo rispetto all'altro.

Su entrambi agisce forza $F_{12} = G \dfrac{m_1 m_2}{R^2}$

Scrivendo $a_R = \dfrac{F_{12}}{\mu_{12}}$

μ_{12} ha dim. di massa e

$$\mu_{12} = \frac{F_{12}}{a_R} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

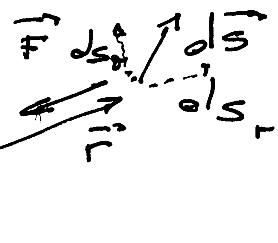
$\longrightarrow$ massa ridotta del sistema m_1, m_2

ognuno dei due corpi si muove rispetto all'altro come corpo di massa μ_{12} in sist. inerziale su cui agisca F_{12}

Quindi: la sola "correzione" a Keplero quando non valga l'approx $M \gg m$ è la sost $m \rightarrow \mu = \frac{mM}{m+M}$

$$\vec{F}_g = - G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \qquad \text{è conservativa ?}$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



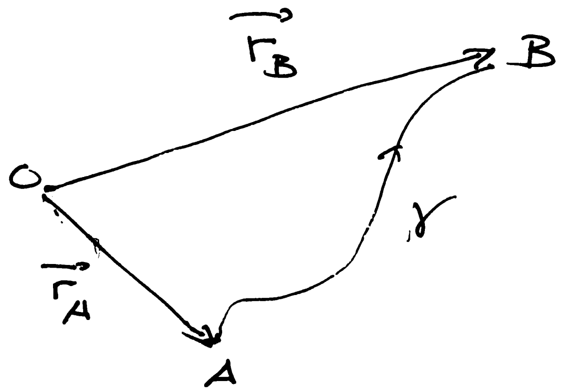
$$d\vec{s} = ds_r \, \hat{u}_r + ds_\vartheta \, \hat{u}_\vartheta$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(\vec{r}) \, \hat{u}_r$$ ha solo componente radiale

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F(r) \, ds_r = F(r) \, dr$$

$$W_{AB_\gamma} = \int_{\gamma A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma A}^{B} F(\vec{r}) \, dr$$

dipende solo da r se $F(\vec{r}) = F(r)$



Se posso scrivere $F(\vec{r}) = F(r)$:

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) \, dr$$

dipende solo da r_B ed r_A, non dalla traiettoria per andare $A \rightarrow B$

quindi

$$W_{AB} \neq \int_{r_A}^{r_B} F(r) \, dr = U(r_B) - U(r_A)$$

Il risultato ottenuto è conseguenza delle seguenti caratteristiche di $\vec{F}$:

- $\vec{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})\,\hat{u}_r$: in ogni punto la $\vec{F}$ è diretta lungo congiungente con O
  O : centro della forza
- $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)$: in ogni punto $P(\vec{r})$ l'intensità della forza dipende solo da distanza di P da O

Quindi: $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{u}_r$

Forze con queste caratteristiche si dicono: <u>forze centrali</u>

Dimostrato che:

<u>tutte le forze centrali sono conservative</u>

Vediamo calcolo esplicito dell' $E_P^{\text{Grav.}}$ per F_G

$$\cancel{\Delta U_{AB}}\; V_B - V_A = -W_{AB} = +\int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr = -\int_{r_A}^{r_B} G\,\frac{mM}{r^2}\,dr$$

$$= -G\,m\,M\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

posso scegliere arbitrariamente l'energia potenziale di riferimento perchè è fisicamente rilevante solo ΔV

- Di solito si pone $V(r) = -G\,\dfrac{mM}{r}$

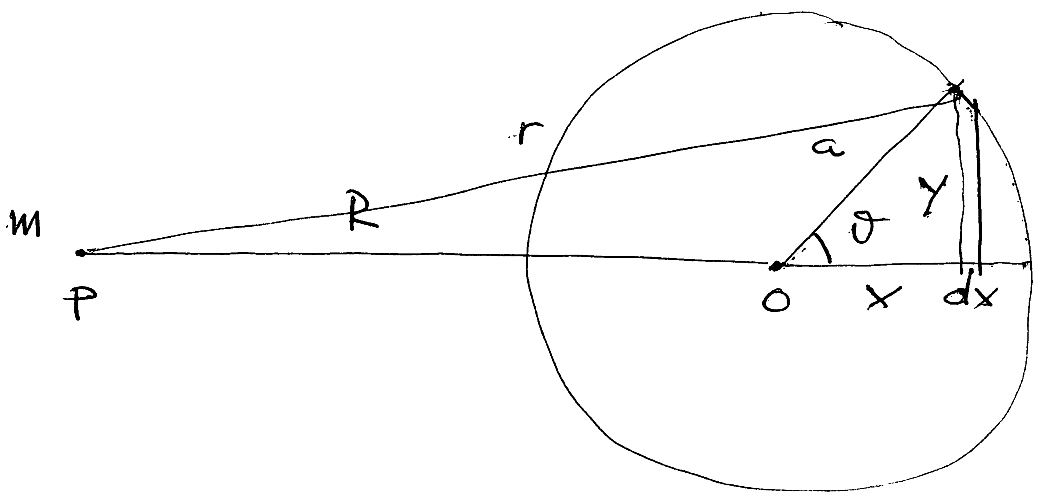
quindi $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$: energia pot. di riferimento $V=0$ è a $r=\infty$

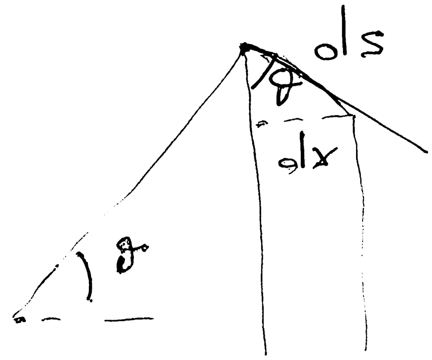
con questa convenzione $V(r)$ è definita negativa

Calcolo energia potenziale di interazione tra massa m puntiforme e massa M distribuita con simmetria sferica

- Guscio sferico omogeneo : massa M
  raggio a
  centro O

m in P $\qquad \overline{OP} = R$





$dx = ds \operatorname{sen}\vartheta$

densità di massa per unità di sup. del disco : μ

dM : massa della corona di raggio y e ds

$$dM = 2\pi y \, ds \, \mu = 2\pi a \operatorname{sen}\vartheta \, ds \, \mu = 2\pi a \, dx \, \mu$$

$r^2 = (R+x)^2 + y^2$; tutta la corona si trova a distanza r

$$= R^2 + \cancel{x^2} + 2Rx + a^2 - \cancel{x^2}$$

$$d(r^2) = 2r\,dr = 2R\,dx$$

$$dV = -G\frac{m\,dM}{r} = -G\,m\mu\frac{2\pi a\,dx}{r}$$

ma $\dfrac{dx}{r} = \dfrac{dr}{R}$

$$dV = -G\,m\mu\,2\pi a\,\frac{dr}{R}$$

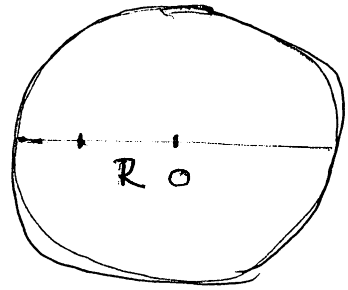
$$V = \int_{R-a}^{R+a} -\frac{G\,m\mu\,2\pi a}{R}\,dr$$

$$= -\frac{4\pi G\,m\mu\,a^2}{R}$$

ma $\mu = \dfrac{M}{4\pi a^2}$

$$\boxed{V = -\frac{GMm}{R}}$$ per punto P esterno a guscio sferico

Se punto P é interno a guscio $R < a$: gli estremi di integr. sono $a - R < r < R + a$

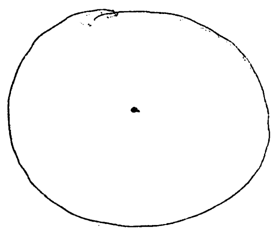


$$V = \int_{a-R}^{R+a} -\frac{G\,m\mu\,2\pi a}{R}\,dr$$

$$= -G\,m\mu\,4\pi a = -\frac{GMm}{a} = \text{costante}$$

Quindi: per P esterno a guscio V(R) é uguale a energia pot. che si ha per tutta M in O;
per P interno ($R < a$) $V(R) = \text{costante} \Rightarrow$
$F(R) = 0$

quindi se ho distrib. di massa a simmetria sferica : $\rho = \rho(r)$



la forza agente su massa m distante R dal centro è = alla forza che avrei su m se tutta la massa $M(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\, dr$

fosse posta nel centro

Nel caso di distribuzione sferica omogenea di raggio R_0 e massa M $\quad \rho = \frac{3M}{4\pi R_0^3}$

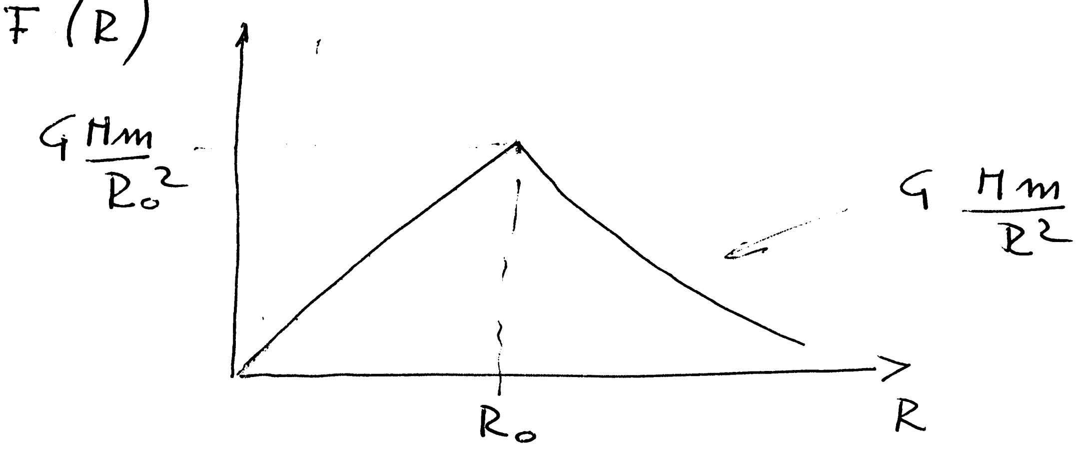
$$M(R) = \int_0^R \cancel{4\pi}\, r^2 \frac{3M}{\cancel{4\pi} R_0^3}\, dr = M\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \text{ per } R < R_0$$

$$= M \quad \text{per } R \geq R_0$$

$$F(R) = G m M \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \cdot \frac{1}{R^2} \qquad R < R_0$$

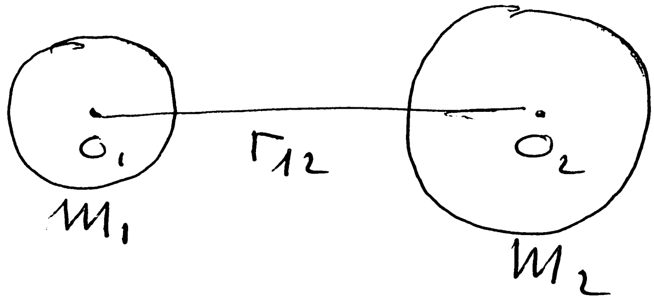
$$= G \frac{m M}{R_0^3} R$$

$$F(R) = \frac{G m M}{R^2} \qquad R > R_0$$



per 3° principio (o considerando che si è ottenuta V, e da questa F) la relazione trovata vale anche per forza esercitata da m puntiforme su distrib. di massa a simm. sferica

Da questo si ottiene che la forza che si esercita tra due distrib. sferiche di masse m_1 centrata in O_1 e m_2 centrata in O_2 è la stessa che se m_1 fosse tutta in O_1 e m_2 tutta in O_2



$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

Quindi se $M_\oplus$ è massa Terra
M_L è massa Luna
m " mela
$R_\oplus$ raggio Terra
R_L distanza tra centro Terra e centro Luna

per mela ho $$F_m = \frac{G M_\oplus m}{R_\oplus^2}$$

$$a_m = \frac{G M_\oplus}{R_\oplus^2}$$

per Luna $F_L = G \frac{M_\oplus M_L}{R_L^2}$

$$a_L = G \frac{M_\oplus}{R_L^2}$$

quindi $\frac{a_m}{a_L} = \frac{R_L^2}{R_\oplus^2}$

ma attenzione: è il rapporto tra le accelerazioni in un sistema inerziale; accelerazione di Luna verso C.M. del sistema Terra-Luna ecc.

Se misuro accelerazione rispetto a centro della terra

$$a_m = \frac{F_m}{\mu_m}$$

$$a_L = \frac{F_L}{\mu_L}$$

con $\mu_m = \frac{M_\oplus m}{M_\oplus + m} \simeq m$ quasi esatto

$\mu_L = \frac{M_\oplus M_L}{M_\oplus + M_L} \sim M_L$ ~~ma posso vedere dati~~ ~~di~~

ma se dispongo di misure precise questa appross. può essere eccessiva