momento della forza peso rispetto a qualunque

$$\vec{\tau}_P = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{g} = \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{g} = \vec{r}_{CM}' \times M\vec{g}$$

→ il momento risultante della $\vec{F}_P$ rispetto a polo qualunque è uguale al momento rispetto al polo della $\vec{F}_P$ risultante applicata al CM

Già visto, per caso generale,
momento di $\vec{F}_p$

$$\vec{\tau}_p = \vec{r}'_{CM} \times M\vec{g}$$

mom risp. a polo O'

$\vec{F}_p$ è forza conservativa: energia potenziale totale di $\vec{F}_p$

$U_i = + m_i g h_i$ (h = quota sul riferimento)

$U = g \Sigma m_i h_i = g M h_{CM}$

=> energia potenziale totale di $\vec{F}_p$
= en. potenziale di $\vec{F}_p$ per part. di massa M in CM

=> risultato non stretta condiz. CR
è risultato gen. per sist n-part

$$U_p = Mg h_{CM}$$

(sarebbe stato meglio in dinamica n-part.)

C.R.

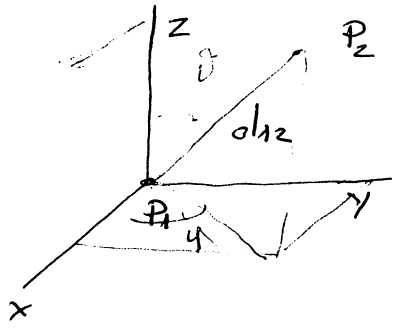
Sistema discreto rigido: n-particelle le cui mutue distanze sono costanti

per ogni coppia i,j $d_{ij} = cost_{ij}$

Cinematica

Quante variabili cinematiche indipendenti?

- 1 punto in 3-d → 3 coord → 3 param. liberi
- n punti 3-d → 3n param liberi
- per CR (discreto)



$P_1(x_1, y_1, z_1)$
$P_2(x_2, y_2 z_2)$ } 6 coord.

$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = d_{12}^2$ 1 eq

6 coord + 1 eq => 5 "gradi di libertà" parametri indip.

$P_3(x_3, y_3, z_3)$ → altre 3 coord.

ma anche 2 eq.

$(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2 + (z_1-z_3)^2 = d_{13}^2 \quad (= |\vec{P_3} - \vec{P_1}|^2)$

$(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2 + (z_2-z_3)^2 = d_{23}^2$

=> + 3 coord − 2 eq => + 1 g.d.l.

3 ~~punti~~ particelle a distanze fisse => 6 g.d.l.

per ogni altro punto che aggiungo ho

3 coord − 3 distanze fisse = 0 g.d.l.

(equazioni)

altre eq non indip.

C.R. => 6 g.d.l. => moto completam. descritto da 6 eq.

Per CR continuo tratto come particella ogni elemento "sufficientemente piccolo" (infinitesimo) di volume

massa: dm volume $dV = dx\,dy\,dz$

invece che da indice i sono identificati da coordinate x, y, z

$$m_i \to dm(x,y,z)$$

Definisco localmente **massa volumica** (o densità)

$$\rho(x,y,z) = \frac{dm}{dV}$$

Corpo si dice omogeneo quando $\rho = cost = \frac{M}{V}$

$$M = \sum_i m_i \longrightarrow M = \int dm = \int_V \rho\, dV$$

(talvolta sapremo calcolare $\int$)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \to \vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M} = \frac{\int_V \vec{r}\,\rho\, dV}{M}$$

per corpo rigido omogeneo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\rho}{M}\int_V \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\, dV$$

(lascio esempi a esercitazioni)

6 equazioni dinamica:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d(M\vec{v}_{CM})}{dt} = \vec{F}_E \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^E \end{cases}$$

In CR $\vec{F}_I$ non compiono lavoro $\Rightarrow \Delta E_K = W^E$ per sost. una delle 6

devo valere una delle cond. per scriverle così: tipicamente polo fisso in S.I., ma anche non risp. C.M. ....

n.b. le 6 eq. in gen. sono indip. perché, già visto $\vec{F}_E$ e $\vec{\tau}^E$ sono indip. (non posso ridurre tutto a ~~$\vec{F}^E$~~ $\vec{F}^E$ risp. opportuno polo)

Posso avere casi particolari di moto C.R.

a) moto puramente traslatorio: la congiungente tra qualunque coppia i,j trasla ∥ a se stessa

$\Rightarrow$ nulla si muove risp. C.M.

$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}'_{CM} = 0$$ (non sto usando notazione Mazzoldi)

sono momenti rispetto a polo CM

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

Resto con solo 3 g.d.l. determinati da eq.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^E$$

$\Rightarrow$ moto CM (e di ogni punto di CR) è moto di singola part. massa M, $\vec{F}^E$ risulta qs. ho $\vec{r}_{CM}(t)$ e $\vec{P}(t)$

quindi $\vec{L}(t) = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$

$\Rightarrow$ le 3 eq. $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^E$ non sono indip. dalle prime 3

CR

rotazione:

b1) rotazione attorno ad asse fisso

→ 1 g.d.l. angolo di rot. attorno 6-3-2 asse eq. $\frac{dL_z}{dt} = \tau_z$

~~vedremo più avanti~~

~~b2) asse con punto fisso 6-3=3 g.d.l.~~

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ ma cambia solo in modulo e verso (~~vettore~~ comp. di $\vec{\omega}$ lungo asse)

b2) asse con punto fisso 6-3=3 g.d.l.

3 eq. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^E$

Si dimostra che in generale spostam. infinitesimo può essere descritto ~~come~~, per CR, come ~~rot~~ traslazione + rot infinitesime: $\vec{v}(t)$ $\vec{\omega}(t)$

→ il più generale moto CR è rototraslatorio

(Si pensi a dinamica: 3 eq. per dinamica CM + 3 eq. per moto risp. CM che sono eq. su mom. angolare totale:

$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$

risolte da: $\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^E$ dinamica di C.M.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^E$ può essere risp. CM

- Descrizione moto come trasl. + rot non univoca

e.g. O trasla + rot. attorno asse per O

moto punto P : $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$ (1)

" " Q : $\vec{v}_Q = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OQ}$ (2)

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{OP} - \vec{OQ}) = \vec{\omega} \times \vec{QP}$$

quindi vale anche

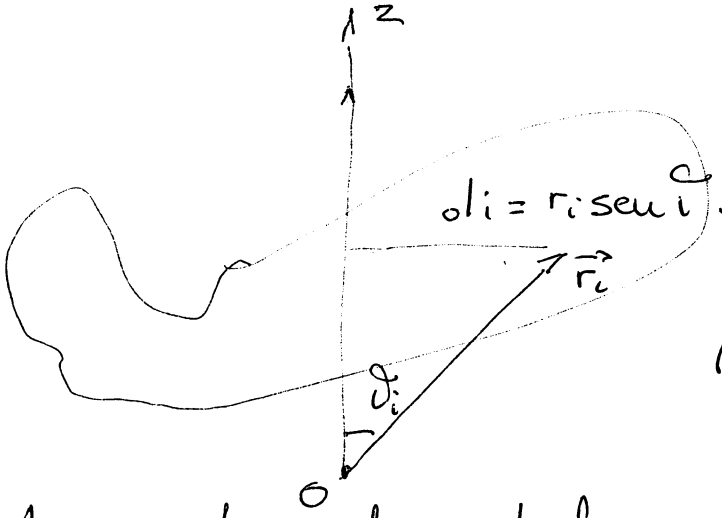
$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{QP}$$

che è la (1) scritta risp a punto Q invece che O

nota $\vec{\omega}$ è la stessa

$\Rightarrow$ comunque scelga il punto, che trasla, risp. cui descrivo rot. con $\vec{\omega}(t)$ la $\vec{\omega}(t)$ è la stessa (cambia invece la $\vec{r}_O(t)$)

Rotazioni rigide rispetto
asse fisso $\equiv z$ in rf. inerziale



$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$
(tratto per semplicità come discreto)

ho solo 1 g.d.l. → 1 eq. mole indipend.

può essere $\frac{dL_z}{dt} = \tau_z$ (1)

o anche (in forma $\int$) $\Delta E_K = W^{(E)}$ (2)

attenzione la (1) è suff. ma ~~non implica~~
il fatto che non usi $\frac{dL_y}{dt} = \tau_y$ e $\frac{dL_x}{dt} = \tau_x$
non implica che L_y e L_x
siano costanti
$\vec{\omega} \parallel \hat{k} \not\Rightarrow \vec{L} \parallel \hat{k}$
in gen. $\vec{L}$ non è $\parallel \vec{\omega}$ e
τ_x e $\tau_y \neq 0$ quindi dip
da t tutte le comp. di $\vec{L}$
Così il fatto che non uso
$\vec{F}^E = M\vec{a}_{CM}$ non implica $\vec{a}_{CM} = 0$
se CM non è sull'asse $\vec{a}_{CM} \neq 0$

Inizio a usare $\Delta E_K = W$

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r_i})^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \operatorname{sen} \vartheta_i)^2 \omega^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i d_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

def: momento di inerzia $I = \sum_i m_i d_i^2$
(o analoga in forma integrale)
n.b. d_i è la distanza dall'asse di rot. di punto i-esimo
$\Rightarrow$ I dipende in generale dall'asse di rotazione

Il lavoro della risultante $\vec{F_i}$ delle forze esterne agenti su i è

$$\delta W_i = \vec{F_i} \cdot d\vec{s_i} = \vec{F_i} \cdot \vec{v_i}\, dt =$$

$$= \vec{F_i} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r_i})\, dt =$$

(uso teorema: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$)

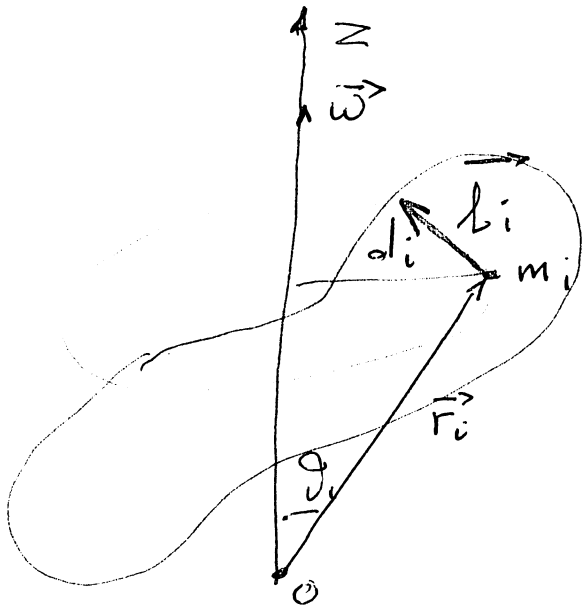
$$= \vec{\omega} \cdot (\vec{r_i} \times \vec{F_i})\, dt = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau_i}\, dt \quad \omega \tau_{iz}\, dt$$

$$= \tau_{iz}\, d\vartheta$$

$$\delta W = \sum_i \delta W_i = \sum_i \tau_{iz}\, d\vartheta = \tau_z\, d\vartheta$$

(τ_z è ~~momento lungo z~~ comp. z di mom. risp. o delle sole forze esterne)

$$W = \int \delta W = \int \tau_z\, d\vartheta = \frac{1}{2} I \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{in}^2$$



RRAF

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$v_i = \omega r_i \operatorname{sen}\vartheta = \omega dl_i$

O polo sull'asse di rot. z

momento angolare di m_i risp. O

$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$

uso teorema calcolo vettoriale (v. Mazzoldi aff.)

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$= m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\vec{r}_i$

$= m_i r_i^2 \vec{\omega} - m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\vec{r}_i$

$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

$l_{iz} = m_i r_i^2 \omega - m_i z_i^2 \omega = m_i dl_i^2 \omega$

$l_{ix} = - m_i \omega z_i x_i$

$l_{iy} = - m_i \omega z_i y_i$

quindi:

- $\vec{l}_i$ non è $\parallel z$, lo è per $z_i = 0$
- se $\omega = \text{cost}$ $l_{iz} = \text{cost}$, l_{ix} e l_{iy} non lo sono
  - ma $l_{iT} = (l_{ix}^2 + l_{iy}^2)^{1/2} = m_i \omega dl_i z_i$ è cost
  - $\vec{l}_i$ è vettore costante in modulo che precede attorno a z (con pulsaz. ω)

si può anche osservare

- $\vec{l_i} \perp \vec{r_i}$; $\vec{l_i} \perp \vec{v_i}$
- $\vec{l_i}$ nel piano definito da $\vec{\omega}$ e $\vec{r_i}$

per CR discreto (per continuo $\sum_i \to \int dV$)

$\vec{L} = \sum_i \vec{l_i}$

come $\vec{l_i}$ anche $\vec{L}$ in generale non è $\parallel z$

- se è verificato che per ogni $m_i(\vec{r_i})$ ho $m_j = m_i$ a coordinate $z_j = z_i$, $x_j = -x_i$, $y_j = -y_j$

  → z è asse di simmetria per CR

  allora $L_x = 0$ $L_y = 0$

  $(l_{x_j} = -l_{x_i}$, $l_{y_j} = -l_{y_i})$

⇒ se z è asse di simmetra $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$

- interessante L_z (sempre)

$$L_z = \sum_i l_{z_i} = \omega \sum_i m_i d_i^2 = I\omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z \Rightarrow \boxed{I \frac{d\omega}{dt} = \tau_z}$$

o anche $\boxed{\tau_z = I\alpha}$

è eq. del moto 1-d contenente $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ derivata seconda di coord. ϑ

$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2)$ contiene $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$

→ integrale 1° del moto

Se asse z non è asse di simm.

posso avere $\vec{\omega} = cost. \Rightarrow L_z = cost$

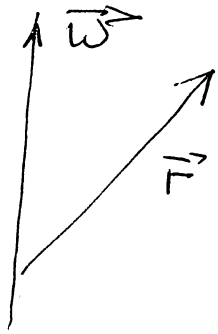
$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0$$

ma le componenti x, y dipendono da t

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

per $\omega = cost$ $|\vec{L}|$ cost. e $\vec{L}$ precede con puls. ω attorno z

Già visto caso di vettore che precede unif. attorno asse



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

precessione di

vale per Vqualunque vettore costante in modulo

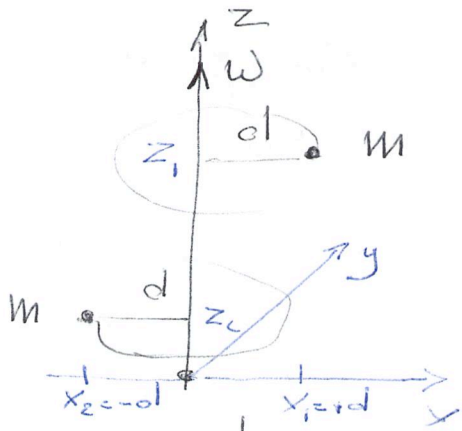
allora $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

poiché $\vec{\omega} \parallel \hat{k}$ $\tau_z = \omega_x L_y - \omega_y L_x = 0$

consistente con $\omega = cost$ e $\tau_z = I \frac{d\omega}{dt}$

τ_x e τ_y sono invece $\neq 0 \Rightarrow$ forze di vincoli hanno momento risp O non nullo

Esempio



due masse in moto circ. uniforme attorno z

$m_1 = m \quad (x_1, 0, z_1) \qquad x_1 = d$

$m_2 = m \quad (-x_1, 0, z_2)$

$$L_z = 2 m d^2 \omega$$

$$L_x = - m \omega z_1 x_1 + m \omega z_2 x_1$$

$$= + m \omega x_1 (z_2 - z_1) = + m \omega d (z_2 - z_1)$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

$$\tau_z = \tau_x = 0$$

$$\tau_y = - \omega_z L_x = + m \omega^2 d (z_2 - z_1)$$

(verso y negativa)

ottengo lo stesso ris. dal moto circ. unif.

$$\vec{F}_1 = F_{1x} \hat{i}$$

$$F_{1x} = - m d \omega^2 \quad \text{in } z_1$$

$$F_{2x} = + m d \omega^2 \quad \text{in } z_2$$

sono coppia → risultante nulla momento indip. dal polo

$$\vec{\tau} = m d \omega^2 (z_2 - z_1) \hat{j}$$

CR continui - calcolo I

esempi

1) sbarra omogenea sottile lungh. ℓ massa M

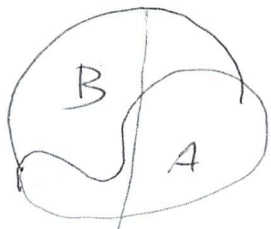
I per asse $\perp$ a sbarra per centro (= CM)

Uso formula generale

$m_i \longrightarrow \rho(\vec{r})\, dV$

$$I = \int_V (x^2+y^2)\,\rho(\vec{r})\, dV = \int_V (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

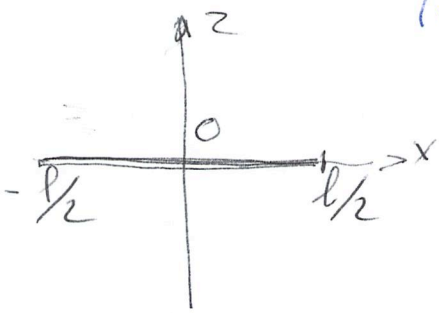
n. b.



$$I = \int_V (x^2+y^2)\,\rho\, dV = \int_{V_A} (x^2+y^2)\,\rho\, dV + \int_{V_B} (x^2+y^2)\,\rho\, dV$$

$I = I_A + I_B \longrightarrow$ momento di inerzia è additivo

(ovvio è $\sum I_i$)



$\int$ è solo su asse X

ρ è massa per unità di lungh.

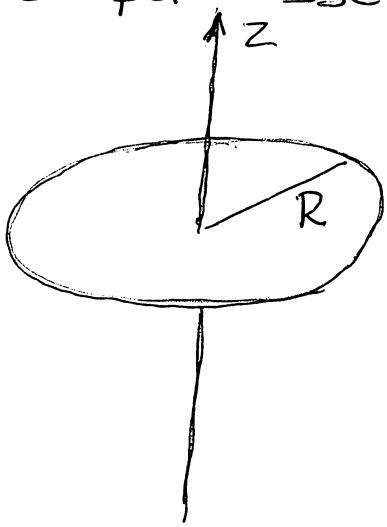
$$\rho = \frac{M}{\ell} \qquad dm = \rho\, dx$$

$$\frac{I}{2} = \int_0^{\ell/2} x^2\, dm = \int_0^{\ell/2} \rho x^2\, dx = \rho \cdot \frac{1}{24}\ell^3 = \frac{1}{24} M \ell^2$$

$$I_{sb_{CM}} = \frac{1}{12} M \ell^2$$

2) disco omogeneo M, R

I per asse ⊥ per centro (CM) disco



densità di massa per unità di sup

$$\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$$

una corona circolare a raggio r - r+dr

ha massa $dm = \rho 2\pi r dr$

e mom inerzia $dI = dm\, r^2 = \rho 2\pi r^3 dr$

$$I = \int_0^R \rho 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} \rho R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

per cilindro omogeneo di M, R

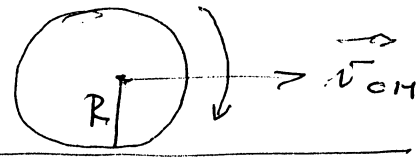
ottengo lo stesso risultato

Risultati ottenuti per RRAF
si estendono immediatamente a
moti rototraslatori in cui l'asse di rotazione
trasla // a se stesso: cambio descrizione
→ traslazione // di asse per CM (ho la stessa $\vec{\omega}$)
- momenti risp. CM (con tutti i vantaggi conseguenti
- moto CM ~~che~~ determinato da $\vec{F}^E = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Chiaramente i momenti che tendono
a ruotare asse devono essere nulli

9/12 Quanto appena fatto: calcolo mom.in. per asse
per CM è in gen. utile

Es. cilindro che rotola ~~sens~~

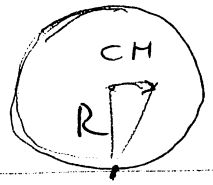


$\vec{\omega}$ entrante nel foglio

cilindro trasla e ruota attorno
suo asse

$$E_K = E_{K_{tr}} + E_{K_{rot}} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \omega^2$$

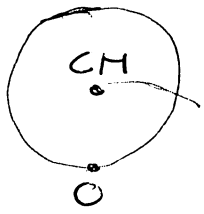
se rotola senza strisciare



$v_{CM} = \omega R$

O punto O istantaneam. in quiete

$$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{4} M v_{CM}^2$$



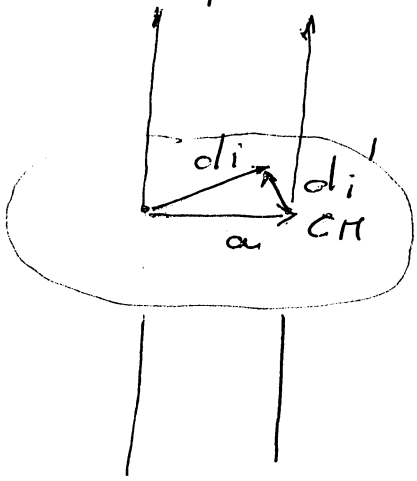
ma se O è fisso deve anche valere

$$E_K = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

Quanto vale I_O?

ricalcolo $I_O = \rho \int_{disco} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$?

non necessario se conosco I_{CM} per asse // passante per CM



$$I = \sum_i m_i d_i^2 = \sum_i m_i (\vec{d_i} \cdot \vec{d_i})$$

$$= \sum_i m_i (\vec{a} + \vec{d_i'})^2$$

$$= \sum_i m_i a^2 + \sum_i m_i d_i'^2 + 2 \sum_i m_i \vec{a} \cdot \vec{d_i'}$$

ma $\sum_i m_i \vec{d_i'} = 0$ è, nel piano pos CM rispetto CM

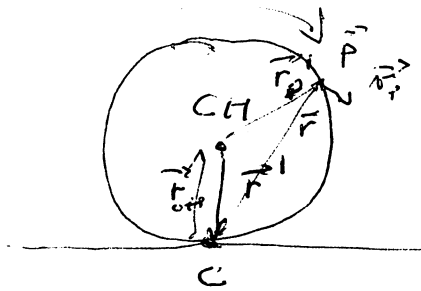
$$\boxed{I = I' + M a^2}$$

Teorema Huygens - Steiner

I' risp C.M.

Mom di inerzia per asse qualunque è = mom di inerzia per asse // passante per CM + mom in. risp asse CM della massa M posta sul primo asse (oss. a)

Asse di rotazione trasla ∥ a se stesso



ha sup. ~~di contatto~~ con cui CR è a contatto: quando la vel. istantanea di C risp. a sup è $v_c = 0$ si ha ~~rotolamento~~ puro rotolamento

Istantaneam. cilindro (o sfera) ruota attorno a C, fermo, con velocità ang. $\vec{\omega}$ (entrante nel foglio, in ohsegno)

Riferita a C la vel. del generico punto P è $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$

$$= \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$$

$\vec{r}'$ è riferito a CM

1a. $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}$ 1b. $v_{CM} = \omega r_{CM}$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_C = \vec{v}_{CM} - \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM} = 0$$

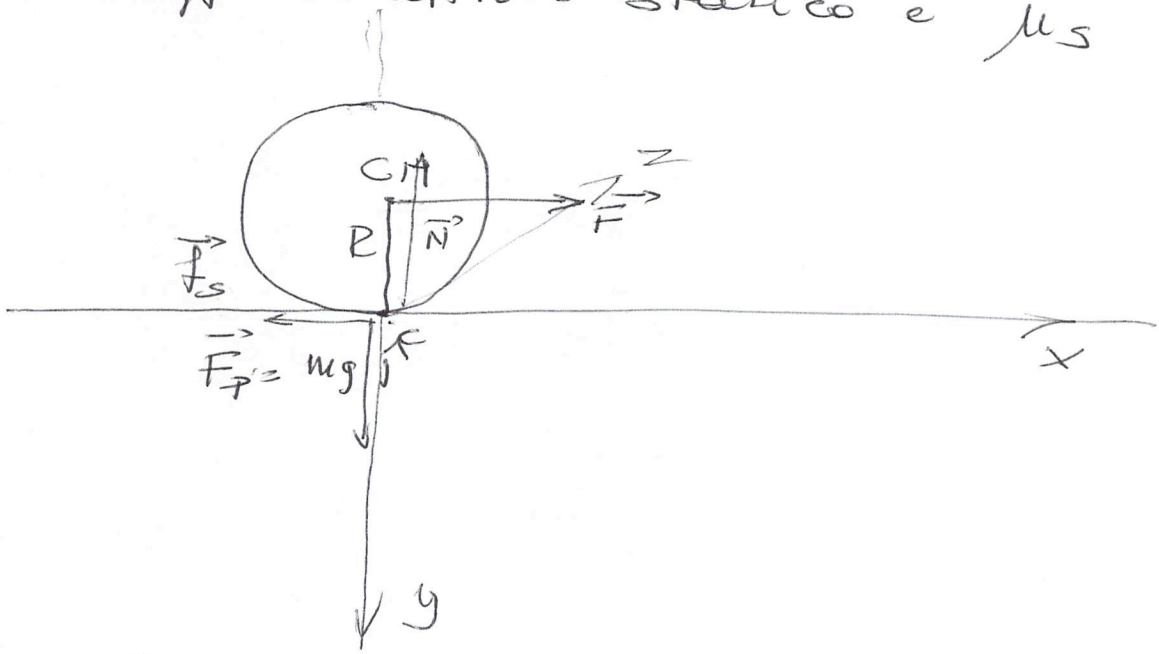
In C agisce la forza di attrito statico $f_s < \mu_s N$, e la forza normale $\vec{N}$.

Esempio: disco appoggiato a sup piana ∥ asse x

sul disco agisce $\vec{F}_P = mg\,\hat{j}$

e $\vec{F} = F\,\hat{i}$

il coeff. di attrito statico è μ_s



$\vec{f}_s = -f_s\,\hat{i}$

$\vec{F} = +F\,\hat{i}$

$\vec{F}_P = +mg\,\hat{j}$

$\vec{N} = -N\,\hat{j}$

ho anche $v_{CM_x} = +\omega R$

$\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}$

è condiz. cinematica generale ma alt. a seguito

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Voglio a_{CM} data F

x: $M a_{CM} = F_x = F - f_s$

2 incognite f_s $(< \mu_s N)$ a_x

2 eq:

vale sia risp. C che rispetto CM $\longrightarrow$

$$\begin{cases} M a_{CM} = F - f_s \\ \dfrac{dL_z}{dt} = I\alpha = I\dfrac{a_{CM}}{R} = \tau_z \end{cases}$$

Se Scelgo polo in CM

$\tau_z = R f_s \qquad \frac{I}{R} a_{CM} = R f_s \rightarrow f_s = \frac{I}{R^2} a_{CM}$

quindi

$M a_{CM} = F - f_s$

$\left(M + \frac{I}{R^2}\right) a_{CM} = F$

invece di avere solo M come termine di inerzia ho $M + \frac{I}{R^2}$

. ha dim. M

. per cilindro omogeneo $I = \frac{1}{2} M R^2$

$M + \frac{I}{R^2} = \frac{3}{2} M$

$\Rightarrow a_{CM} = \frac{F}{(3/2 M)}$ (cilindro omogeneo)

però $f_s = \frac{I}{R^2} a_{CM} = F \frac{I/R^2}{M + I/R^2}$

per cil. omog. $f_s = \frac{F}{3}$

va bene tutto purché $f_s < \mu_s Mg$

(può essere utile osservare che

$I_C = \frac{3}{2} M R^2$, $I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2 \Rightarrow I_C = 3 I_{CM}$

ma $\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \frac{\tau_{CM}}{I_{CM}} = \frac{\tau_C}{I_C} \Rightarrow \tau_C = 3 \tau_{CM}$

$\tau_C = F R \qquad \tau_{CM} = f_s R$

$\Big\} f_s = \frac{F}{3}$

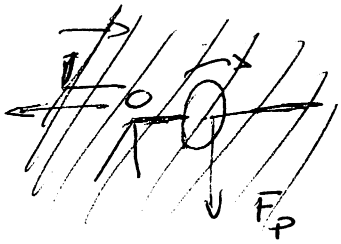
)

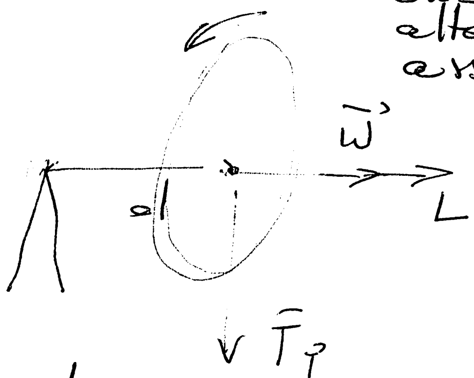
CR con punto fisso → giroscopio

$6-3=3$ g.d.l. ⇒ 3 eq. indipendenti

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ conviene scegliere il punto fisso come polo

Considero caso





disco in rot. attorno proprio asse

$\vec{L} = I\vec{\omega}$

se ad un certo istante $\vec{L} = L\hat{i}$

allora $\vec{\tau} = Mgd\,\hat{j}$

$(\vec{\tau} = -d\hat{i} \times Mg\hat{k})$

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ è $\perp \vec{L}$

(in gen ricordare $\frac{d\vec{a}}{dt} = \hat{u}_{\parallel}\frac{da}{dt} + \hat{u}_{\perp}\, a\frac{d\theta}{dt}$)

$\frac{d\vec{L}}{dt}$ è costante in modulo è sempre $\perp \vec{L}$

⇒ $|\vec{L}| = \text{cost.}$ ⇒ $\vec{L}$ precede attorno a Z

con pulsazione Ω costante

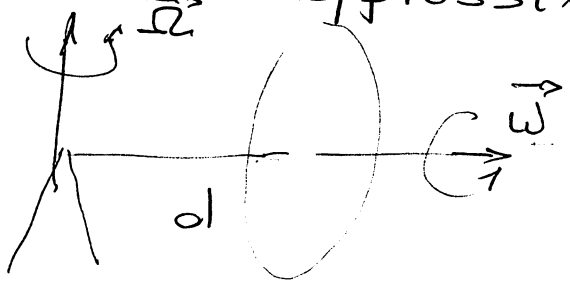
e $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

ma $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

se $\vec{L} \perp \vec{\Omega}$ $|\vec{\Omega} \times \vec{L}| = \Omega L$

da cui $\Omega = \frac{Mgd}{L} = \frac{Mgd}{I\omega}$

è soluzione approssimata perché



ho una comp. $L_z \approx \Omega M ol^2$ (per $R \ll ol$)

resta costante: $\frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0$

ma deve già essere presente inizialmente

notare anche che vincolo deve esercitare
$F_z = Mg$ e $F_r = -M\Omega^2 ol$ (centripeta)

forze: $\vec{F}_i$ in $\vec{r}_i$ $\quad i=1,n$

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Momento totale risp. polo O (origine di $\vec{r}_i$)

$$\vec{\tau}_T = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Rispetto polo O'

$$\vec{\tau}'_T = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau}_T = \sum_i (\vec{OO'} + \vec{r}'_i) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{OO'} \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$$

$$\boxed{\vec{\tau}_T = \vec{OO'} \times \vec{F}_T + \vec{\tau}'_T}$$

$\Rightarrow$ In generale $\vec{\tau}_T \neq \vec{\tau}'_T$ ma

$$\boxed{\vec{F}_T = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_T = \vec{\tau}'_T}$$

Se la risultante delle forze è nulla il momento risultante è indipendente dal polo

- è risultato da ricordare per statica

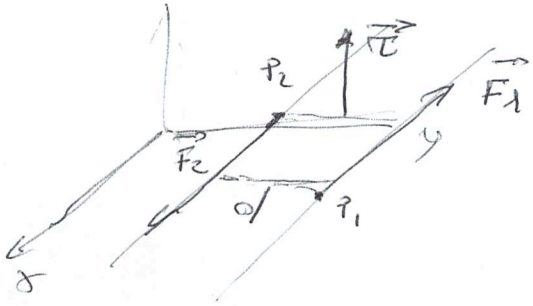
def coppia di forze: forze uguali di verso opposto con diversa retta di azione (sono $\parallel$)

~~per~~ la coppia ha risultante nulla $\Rightarrow$ momento della coppia univocamente definito

$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \quad |\vec{\tau}| = d \cdot F_1$

d = distanza tra rette di azione

$\vec{\tau}$ è $\perp$ al piano definito dalle due rette



momenti
dato sistema $\vec{F_i}$ dei con $\vec{F_T} = \sum_i \vec{F_i}$
è possibile trovare coppia di punti O, P
per cui $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \vec{OP} \times \vec{F_T}$?

Se fosse vero: $\vec{\tau} \perp \vec{F_T}$
e dato O' qualsiasi

$$\vec{\tau}' = \vec{\tau} - \vec{OO'} \times \vec{F_T}$$

è ancora $\vec{\tau}' \perp \vec{F_T}$

quindi se $\nexists$ per O' qualunque $\vec{\tau} \not\perp \vec{F_T}$,
$\nexists$ coppia di punti O, P con caratt. richieste

Si dimostra che per qualunque polo O
sistema di forze $\vec{F_i}$ può essere ridotto
a $\vec{F_T} = \sum_i \vec{F_i}$ di momento nullo risp polo
(retta di azione di $\vec{F_T}$ passa per O)
e coppia di forze di momento $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}$

Nota: la coppia ha risultante nulla risp. O
quindi il suo momento non cambia risp. O'
(prop. gen. di coppia)
il momento delle forze risp. a diverso
polo O' è quindi

$$\vec{\tau}' = \vec{\tau} - \vec{OO'} \times \vec{F_T}$$

Nota pleonastica

Statica CR

- Inizialmente a riposo:

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_{CM} &= 0\\ \vec{\omega} &= 0\end{aligned}\right\}\ 6 \text{ condizioni}$$

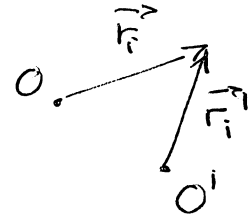
1. $\vec{F}^E = 0$ garantisce $\dfrac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = 0$

2. ~~Affinché~~ $\vec{\tau}^R = 0$

ma in generale $\vec{\tau}$ dipende da polo, tuttavia (v. momenti)

$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ (risp. O)

$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$ (risp O')



$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$= \sum_i (\vec{OO'} + \vec{r}_i') \times \vec{F}_i$$

$$= \vec{OO'} \times \vec{F} + \vec{\tau}'$$

se $\vec{F} = 0$ $\vec{\tau} = \vec{\tau}'$ indipendente dal polo

Quindi se la (1) è soddisfatta la (2) deve essere soddisfatta risp. polo arbitrario → scelto opportuno