20/11/12 ①

Dinamica di sistemi di n particelle

$\vec{r}_i$, $\vec{m}_i$ $\quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ ecc.

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$: q.d.m totale

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i^{\,I} + \vec{F}_i^{\,E}\right)$$

ma $\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$ e $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ (3° principio)

allora $\vec{F}^{\,I} = \sum_i^{n} \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\,E}}$$

sistema isolato $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ q.d.m. conservata

posso subito citare esempio di forze impulsive (collisione) → sist. ≈ isolato per t coll.

$M = \sum_i m_i$

$$\vec{P} = M \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{m_i \vec{r}_i}{M} = M \frac{d}{dt} \sum \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

$\vec{r}_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$ posizione centro di massa

$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{CM} \Longrightarrow \vec{P} = M \vec{v}_{CM}$

$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{CM}$

$$\boxed{\vec{F}_E = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_{CM}}$$

dinamica di CM è quella di part. di massa M su cui agisce $\vec{F}_E$

→ esercizi e oss. su CM → esercitazioni

Lavoro

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \delta W_i^I + \delta W_i^E$$

$$\delta W_i^I = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

$$\delta W^I = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\vec{F}_{ij}\, d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji}\, d\vec{r}_j \right)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\delta W^I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ij} \cdot \underline{d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$$

- $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ invariante per trasf. Galilee
  $\Longrightarrow$ Lavoro forze interne non dip. da osserv. inerziale (W^I)
- quando $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij}$ corpo rigido
  $\Longrightarrow$ in corpo rigido F int. non compiono lav.

$$C.R. \Longrightarrow W^I = 0$$

Applicando a singole part. teorema E_K

$$W_i = \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 = \Delta E_{K_i}$$

$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_B^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 = E_{K_B} - E_{K_A} = \Delta E_K$$

ΔE_K, come per singola particella, dip. in generale da oss. inerziale

Per <u>sistema isolato</u> $W^E = 0$ $\quad W = W^I$

$$\Delta E_K = W^I \quad \text{non dip. da oss. inerz.}$$

Se ho solo forze conservative   n-part.   ③

$$W_i = -\Delta V_i^I - \Delta V_i^E$$

sono energie pot. della risultante ~~di~~ $\vec{F}_i^I$ e $\vec{F}_i^E$

sommando:

$$\Delta E_K = -\Delta V = -\Delta V^I - \Delta V^E \qquad \boxed{\Delta E_K + \Delta V = 0}$$

Nota per i-esima part. l'en. pot. di forze interne è $\sum_{j \neq i} V_{ij}$

ma V_{ij} è - lavoro di $\vec{F}_{ij}$ per portare i risp. j da config. di riferimento a config. osservata, poi non devo fare altro lavoro per portare j dove si trova risp. i

IMPORTANTE!

Quindi $\boxed{V^I = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} V_{ij}}$

ogni mutua en. pot. è sommata una volta sola

e.g. 2 part. $V^I = V_{12}^I$

3 p $V^I = V_{12}^I + V_{13}^I + V_{23}^I$

In presenza di $\vec{F}$ n.c. per ogni W ho

$$W_i = W_{i_c} + W_{i_{n.c}} = -\Delta V_i + W_{i_{nc}} = \Delta E_{K_i}$$

$$\Delta E_K = -V + W_{nc}$$

$$\boxed{\Delta E_K + V = W_{n.c.}}$$

formalmente identica a 1-part.

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{v}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{M}$$

se riferisco le $\vec{v}_i$ a C.M. (att. è inerziale solo se $\vec{F}^E = 0$)

$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$ $\quad v_i'$: vel. i-esima part risp. C.M.

~~Ekeee~~ $\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')$

$$= \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{\sum m_i \vec{v}'}_{M \vec{v}'_{CM} = 0}$$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_K'}$$

teorema di Koenig per ~~[illegible]~~ energia

E_K' : energia cinetica del sistema risp. a C.M (in gen non inerziale)

$\frac{1}{2} M v_{CM}^2$: energia cinetica di part. di massa $M = \sum_i m_i$ in moto come CM

Urti tra 2 particelle : $m_1, \vec{v}_{1}$; $m_2, \vec{v}_2$

- forze interne impulsive

$$\vec{F}^I(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < t_1 \quad t > t_2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^I(t)\, dt = \vec{J} \quad \text{finito}$$

- per $\vec{F}^E$
  - $\vec{F}^E = 0$

  oppure
  - $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^E(t) = 0$

Quindi, studiando il sistema tra t_1 e t_2

$$\Delta \vec{P} = \vec{J}^E = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^E(t)\, dt = 0$$

$\rightarrow$ quantità di moto totale conservata (tra t_1 e t_2 è sist isolato)

$$\vec{P} = M \vec{v}_{CM} = \text{cost} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$$

Sistema CM è inerziale

Energia

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_k' = \text{cost} + E_k'$$

$\Delta E_K = \Delta E_K'$ (come per tutti sist. isolati)

$\rightarrow$ la variazione di energia cinetica è = a variazione di en. cin. in C.M.

$$\Delta E_K + \Delta V = W_{n.c.}$$

ma $\Delta V = 0$: ho cammino da config iniziale $\vec{F}_{in} = 0$ a config fin $\vec{F}_f = 0$ lungo cui $\vec{F} = 0$ ovunque $\Rightarrow \Delta V = 0$

$$\boxed{\Delta E_K = \Delta E_K' = W_{n.c.}}$$

in generale $\Delta E_K \neq 0$ qualunque

- $\left.\begin{array}{l}\vec{P}_{1in} = m_1 \vec{v}_{1in} \\ \vec{P}_{2in} = m_2 \vec{v}_{2in}\end{array}\right\}$ dati

  (in C.M. $\vec{P}'_{1in} = -\vec{P}'_{2in}$)

- Incognite

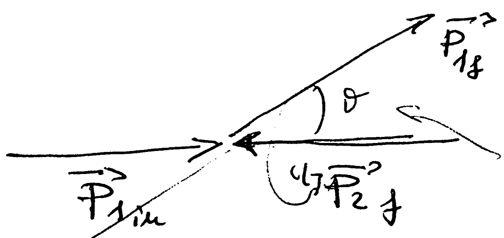
  $\left.\begin{array}{l}\vec{P}_{1f} \\ \vec{P}_{2f}\end{array}\right\}$ 6 incognite (4 in 2-d)

  $\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$ 3 equazioni (2 in 2-d)

  $\Rightarrow$ in 3-d ho 3 grandezze arbitrarie (2 in 2-d)

  possono essere 3-comp di un vettore, o modulo di vett e 2 angoli ....

In C.M.



$\vec{P}_{1f}$ ← è complet. arbitrario

ϑ: an

$\vec{P}_{2f} = -\vec{P}_{1f}$

collisione sta nel piano $\vec{P}_{1in} - \vec{P}_{1f}$

$\rightarrow$ dimentico 3^a dimensione

$\vec{P}_{in} = \vec{P}_f$ 2 eq

$\vec{P}_{1f}, \vec{P}_{2f}$ 4 incognite

$\rightarrow$ indeterminati $|\vec{P}_{1f}|$, ϑ

se conosco $\Delta E_K' = \Delta E_K$ allora ho una sola incognita: angolo di diff. ϑ'

$$E'_{K_{in}} = \frac{p'^2_{1\,in}}{2m_1} + \frac{p'^2_{2\,in}}{2m_2} = \frac{p'^2_{in}(m_1+m_2)}{2m_1 m_2}$$

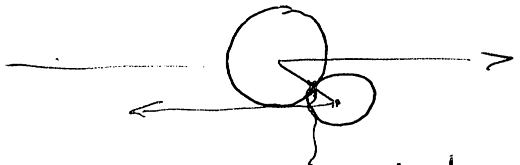
$$E'_{K_f} = \qquad = \frac{p'^2_f(m_1+m_2)}{2m_1 m_2}$$

In gen. conviene descrivere collisione in C.M. e poi trasformare a laboratorio

Classifico

- $\Delta E_K' = 0$ collisione elastica ($W_{nc} = 0$) arbitrario solo angolo ϑ'
  - $\vartheta' = \pi$; collisione elastica centrale completamente definita
- $\Delta E_K' < 0$ collisione inelastica
  - $\Delta E_K' = -E_K'$ totalmente inelastica è completamente definita perchè $\vec{p}\,'_{1f} = 0$
- $\Delta E_K' > 0$ collisione esplosiva

posso usare la stessa analisi per urti tra biglie (esempio)



se qui ho solo $\vec{F}_N$ $\vec{J} = \Delta \vec{p}$ è diretto lungo congiungente tra i due centri allora se collisione è elastica lo stato finale è completamente determinato