Forza esterna $F(t)$ dipendente da t,
non da x, sinusoidale $F(x) = F_0 \cancel{\cos}(\omega t)$

nb. ω non è ω_0 !

- visto che eq. diff. omogenea è stata trattata in $\mathbb{C}$ uso

$$F(x) = F_0 e^{i\omega t} = F_0 (\cos\omega t + i \operatorname{sen} \omega t)$$

qui mi preparo a sfruttare linearità di eq. diff.: se per $F = F_R + i F_I$ trovo sol. $X = X_R + i X_I$ allora la iX_I è soluzione per iF_I, X_R è sol. per F_R

Quindi, qui solo per artificio di calcolo introduco iF_I: mi riesc + semplice trattare exp. che sin

Eq.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

"provo" $x(t) = \cancel{A_0} e^{i(\omega t + \varphi)}$

$$-\omega^2 \cancel{A} e^{i(\omega t + \varphi)} + i\gamma\omega \cancel{A} e^{i(\omega t + \varphi)} + \omega_0^2 \cancel{A} e^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

da cui

$$\cancel{A_0} A e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

ho sol. complessa $\Rightarrow \varphi \neq 0$ in gen.
la soluzione, che è corretta nella forma provata, ha la stessa frequenza di forzante ma diversa costante di fase

abbiamo quindi trovato che

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

è sol. per $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$

vediamo ora A e φ

$$A^2 = \left| A e^{i\varphi} \right|^2 = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

è $A(\omega)$ studiamo poi andamento

$$\tan\varphi = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ attenzione ai segni

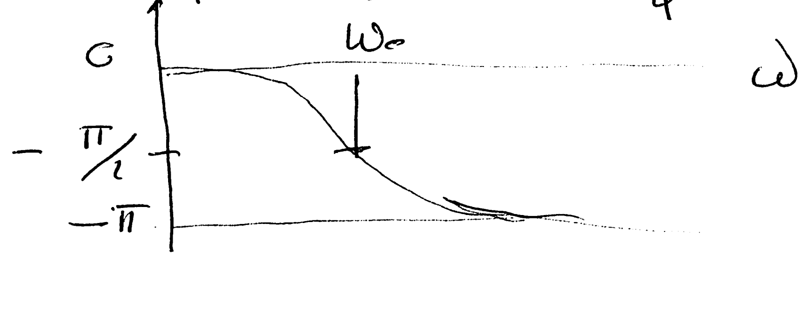
per $\omega < \omega_0$ $\tan\varphi < 0$
$\omega = 0$ $\tan\varphi = 0$
$\omega \to \omega_0^-$ $\tan\varphi \to -\infty$

$\operatorname{sen}\varphi < 0$
$\cos\varphi > 0$
φ nel 4° quad.

$\omega > 0$ $\tan\varphi > 0$
$\omega \to \omega_0^+$ $\tan\varphi > 0$
$\omega \to \infty$ $\tan\varphi \to 0^+$

$\operatorname{sen}\varphi < 0 \Rightarrow \varphi$ nel 3° quad.

quindi per $\omega \to 0$ $\varphi \to 0^-$
$\omega \to \omega_0$ $\varphi = -\pi/2$
$\omega \to \infty$ $\varphi \to -\pi$



Ampiezza

$\omega = 0 \qquad A = F_0 / m\omega_0^2 = \frac{F_0}{K}$

è una forza F_0 che allunga la molla fino ad $A = \frac{F_0}{K}$

poi per γ suff. piccolo A aumenta con ω, fino ad un max in prossimità di ω_0, infine $A \to 0$ per $\omega \to \infty$

Attenzione a condizione per avere max

$$\frac{dA}{d\omega} = -\frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{m}\right) \frac{-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+2\omega\gamma^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right]^{3/2}}$$

non esplicitare a lezione

$\frac{dA}{d\omega} = 0$

$\omega = 0$ min.

$\gamma^2 - 2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$

$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}$ max

esiste solo se $\frac{\gamma^2}{2} < \omega_0^2$

quindi anche per alcuni sottosmorzati non c'è

per $\gamma^2 \ll \omega_0^2 \qquad \omega_{Max} \to \omega_0$

Potenza della $F(t)$

$$P(t) = F(t) \cdot v(t)$$

$$v(t) = -A\,\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$F(t) = -F_0 \cos\omega t \cdot A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Più facile studiare la potenza negativa della $F_v = -\eta\, v(t) = -\gamma m\, v(t)$ mediamente deve essere uguale e opposta all'altra

$$P_\gamma = -\gamma m\, v^2(t)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\cancel{A_0}\,\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$P_\gamma(t) = -\gamma m\, \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\, \cancel{A_0}^2$$

$$\langle P_v(t)\rangle = -\frac{1}{2}\gamma m A^2 \omega^2$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{F_0^2 \gamma\, \omega^2/m}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{F_0^2\gamma}{m}\,\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} = -\frac{m\gamma}{2}\,\omega^2 A^2$$

$\langle P\rangle \to 0$ per $\omega \to \infty$

$\langle P\rangle = 0$ per $\omega = 0$

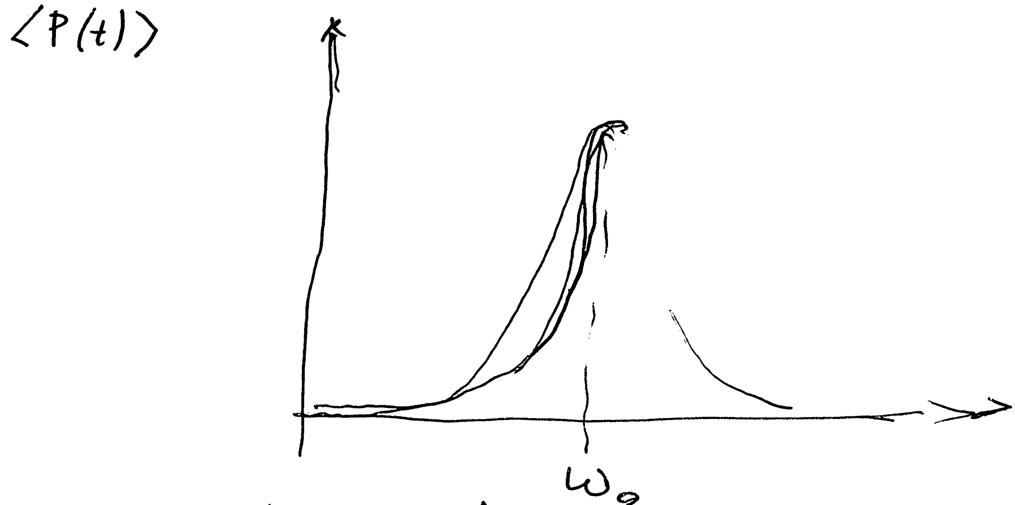
$$\frac{d\langle P\rangle}{d\omega} = c\,\frac{2\omega\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right] - \omega^2\left[-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+2\omega\gamma^2\right]}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2\right]^2}$$

$$\frac{dP}{d\omega} = 0 \longrightarrow \omega = 0$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \cancel{\gamma^2\omega^2} + 2\omega^2(\omega_0^2-\omega^2) - \cancel{\omega^2\gamma^2} = 0$$

$$\omega_0^4 + \omega^4 \cancel{- 2\omega_0^2\omega^2 + 2\omega^2\omega_0^2} - 2\omega^4 = 0$$

$$\rightarrow \quad \omega^4 = \omega_0^4 \qquad (\omega = \pm\,\omega_0)$$



$$\langle P(t)\rangle(\omega_0) = -\frac{1}{2}\,\frac{F_0^2}{\gamma m}$$

visto $A(\omega=0) = F_0/m\omega_0^2 = \dfrac{F_0}{k}$

alla freq. di massima potenza

$$A(\omega=\omega_0) = F_0/m\gamma\omega_0 = \frac{F_0}{k}\,\frac{\omega_0}{\gamma}$$

che per smorzamento critico: $\gamma = 2\omega_0$
vale metà dell'ampiezza in $\omega=0$

$\rightarrow$ massima potenza $\propto \dfrac{1}{\gamma}$

ampiezza a max pot $\propto \dfrac{1}{\gamma}$

Quindi

$$\langle P_{Max} \rangle = \langle P(\omega_0) \rangle = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{m\gamma}$$

non fare conto a lezione

Cerco punti in cui $\langle P(\omega)\rangle = \frac{1}{2}\langle P(\omega_0)\rangle$

$$\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} = \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$\omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega^4 - \gamma^2\omega^2 = 0$$

$$\omega^4 - 2\omega^2\left(\omega_0^2+\frac{\gamma^2}{2}\right) + \omega_0^4 = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{2} \pm \sqrt{\cancel{\omega_0^4} + \frac{\gamma^4}{4} + \gamma^2\omega_0^2 - \cancel{\omega_0^4}}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{2} \pm \gamma\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+\omega_0^2}$$

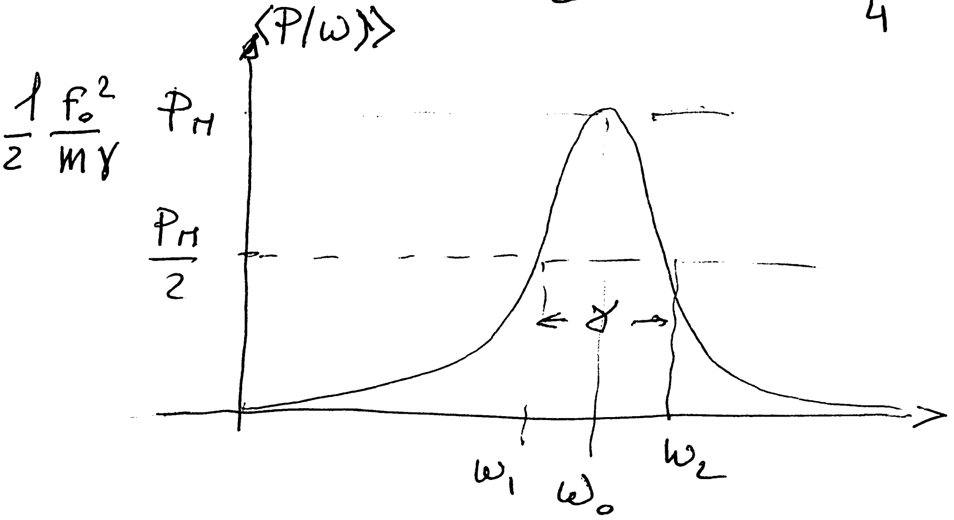
$$= \left(\omega_0^2+\frac{\gamma^2}{4}\right) + \frac{\gamma^2}{4} \pm \gamma\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+\omega_0^2}$$

$$= \left(\pm\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\gamma^2/4+\omega_0^2}\right)^2$$

Le due radici positive sono

$$\omega_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\omega_0^2+\gamma^2/4}$$

$$\omega_2 = +\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\omega_0^2+\frac{\gamma^2}{4}}$$



Conclusioni

- $A(\omega)$ presenta massimo in $\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$
  se $\frac{\gamma^2}{2} < \omega_0^2$

- $A(0) = F_0 / K$
- $P(\omega) = \frac{1}{2} A^2(\omega)\, m \gamma \omega^2$
- $\langle P(\omega) \rangle$ ha sempre Max per $\omega = \omega_0 \longrightarrow$ RISONANZA

$$\langle P_{Max} \rangle = \langle P(\omega_0) \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{m\gamma} = \frac{1}{2} A^2(\omega_0)\, m \gamma \omega_0^2$$

- ω_1, ω_2 t.c. $\langle P(\omega_1) \rangle = \langle P(\omega_2) \rangle = \frac{1}{2} \langle P_{Max} \rangle$
  $\longrightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \gamma$
- $A(\omega_0) = A(0) \frac{\omega_0}{\gamma}$

$\longrightarrow$ $\frac{\omega_0}{\gamma}$ è anche detto fattore di qualità dell'oscillatore

- dove sono sparite condizioni iniziali?

1R. → ho assunto $F(t)$ sinusoidale esiste da tempo infinito
"si sono perse nel tempo"

2R → Analisi-II mi dà risposta più precisa
- quella trovata è sol. particolare per $F(t)$ data
- sol. generale è sol. particol. di inomogenea + $\underbrace{\text{sol gen di omg. ass}}_{\text{2 cost. arbitrarie}}$

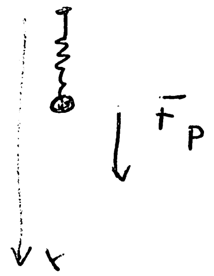
ma sol. di omogenea associata → 0 per t grande ....

In pratica: se a un certo istante do una botta a oscill. $\Delta v = v(t_0) - v_{sol}(t_0)$
$\Delta x = x(t_0) - x_{sol}(t_0)$
sono le condizioni a t_0 per omogenea poi aspetto un tempo suff. lungo e sol. di omogenea si esaurisce → transiente

- Se $F(t)$ non è sinusoidale?
  - se è periodica: Fourier $\sum_{n=0}^{\infty}$ ~~periodich~~ $(\sin n\omega t, \cos n\omega t)$
    $\omega = \frac{2\pi}{T}$
  - se non periodica.....

Fourier
$$\begin{cases} F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)\right) \\ \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)\,dt \\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt \end{cases}$$

- Massa appesa a molla, soggetta a g



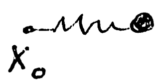
$F_{el} = -Kx$

$F_p = mg$

Posso usare sol. preced. con $\omega = 0$

$F(t) = mg$ cost.

$x(t) = F_0/K = \frac{mg}{K} = x_{eq}$ è sol. a regime sovrapposta a qs. ho sol. di oscillatore libero $\longrightarrow$ se sposto m da pos. di equil. oscilla attorno x_{eq} con sol. trovate per oscill. smorzato

- 

$F = -K(x - x_0)$

$x_0 = x_0(t) = A_0 \cos \omega t$

pos. di equil. varia con t

Allora $F = -K(x - x_0(t)) = \underbrace{-Kx}_{\text{solita } F_{el}} + \underbrace{KA_0 \cos \omega t}_{F(t)}$

- m si comporta come oscill. forzato con $F_{el} = -Kx$, $F(t) = +KA_0 \cos \omega t$